



4



PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

AUCTORE

ISAACO NEWTONO,

EQUITE AURATO.

EDITIO ULTIMA

Cui accedit ANALYSIS *per Quantitatum* SERIES, FLUXIONES *ac* DIFFERENTIAS *cum enumeratione* LINEARUM TERTII ORDINIS.





AMSTÆLODAMI,

SUMPTIBUS SOCIETATIS.

M. D. CCXXIII.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI,

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMÆ REGINÆ

ANNÆ

FLORENTI,

TRACTATUM HUNC D.D.D.

IS. NEWTONUS.

IN

VIRI PRÆSTANTISSIMI

ISAACI NEWTONI

OPUS HOCCE

MATHEMATICO-PHYSICUM

Seculi Gentisque nostræ Decus egregium.

EN tibi norma Poli, & divæ libramina Molis,
Computus en Jovis; & quas, dum primordia rerum
Conderet, omnipotens sibi Leges ipse Creator
Dixerit, atque operum quæ fundamenta locarit.
Intima panduntur victi penetralia Cœli,
Nec latet, extremos quæ Vis circumrotet Orbes.
Sol solio residens ad se jubet omnia prono
Tendere descensu, nec recto tramite currus
Sidereos patitur vastum per inane moveri;
Sed rapit immotis, se centro, singula gyris.
Hinc patet, horrificis qua sit via flexa Cometis:
Discimus hinc tandem, qua causa argentea Phœbe
Passibus haud æquis eat, & cur subdita nulli
Hactenus Astronomo numerorum fræna recuset:
Cur remeent Nodi, curque Auges progrediantur.
Discimus, & quantis refluum vaga Cynthia Pontum
Viribus impellat; fessis dum fluctibus ulvam
Deserit, ac nautis suspectas nudat arenas;
Alternisve ruens spumantia littora pulsat.

Quæ

Quæ toties animos veterum torsere Sophorum,
Quæque Scholas hodie rauco certamine vexant,
Obvia conspicimus; nubem pellente Mathesi:
Quæ superas penetrare domos, atque ardua Cœli,
NEWTONI auspiciis, jam dat contingere Templa.
Surgite Mortales, terrenas mittite curas;
Atque hinc cœligenæ vires cognoscite Mentis,
A pecudum vita longe longeque remotæ.
Qui scriptis primus Tabulis compescere Cædes,
Furta & Adulteria, & perjuræ crimina Fraudis;
Quive vagis populis circumdari mœnibus Urbes
Auctor erat; Cererisve beavit munere gentes;
Vel qui curarum lenimen pressit ab Uva;
Vel qui Niliaca monstravit arundine pictos
Consociare sonos, oculisque exponere Voces;
Humanam sortem minus extulit; utpote pauca
In commune ferens miseræ solatia vitæ.
Jam vero Superis convivæ admittimur, alti
Jura poli tractare licet, jamque abdita diæ
Claustra patent Naturæ, & rerum immobilis ordo;
Et quæ præteritis latuere incognita sæclis.
Talia monstrantem justis celebrate Camænis,
Vos qui cœlesti gaudetis nectare vesci,
NEWTONUM clausi reserantem scrinia Veri,
NEWTONUM Musis carum, qui pectore puro
Phœbus adest, totoque incessit Numine mentem:
Nec fas est propius Mortali attingere Divos.

ED. HALLEY.

AUC-

AUCTORIS
PRÆFATIO
AD
LECTOREM.

Cum Veteres Mechanicam (*uti auctor est* Pappus) *in rerum Naturalium investigatione maximi fecerint; & Recentiores, missis formis substantialibus & qualitatibus occultis, Phænomena Naturæ ad leges Mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc Tractatu* Mathesin *excolere, quatenus ea ad* Philosophiam *spectat.* Mechanicam *vero duplicem Veteres constituerunt:* Rationalem *quæ per Demonstrationes accurate procedit, &* Practicam. *Ad Practicam spectant Artes omnes Manuales, a quibus utique* Mechanica *nomen mutuata est. Cum autem Artifices parum accurate operari soleant, fit ut* Mechanica *omnis a* Geometria *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* Geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* Mechanicam. *Attamen errores non sunt Artis sed Artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est Mechanicus, & si quis accuratissime operari posset, hic foret Mechanicus omnium perfectissimus. Nam & Linearum rectarum & Circulorum descriptiones in quibus* Geometria *fundatur, ad* Mechanicam *pertinent. Has lineas describere* Geometria *non docet sed postulat. Postulat enim ut Tyro easdem accurate describere prius didicerit quam limen attingat* Geometriæ; *dein, quomodo per has operationes Problemata solvantur, docet. Rectas & Circulos describere Problemata sunt, sed non Geometrica. Ex* Mechanica *postulatur horum solutio, in* Geometria *docetur solutorum usus. Ac gloriatur* Geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur*

Geo-

Geometria *in praxi Mechanica*, & *nihil aliud est quam* Mechanicæ universalis *pars illa quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes Manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut* Geometria *ad magnitudinem*, Mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo sensu* Mechanica rationalis *erit Scientia Motuum qui ex viribus quibuscunque resultant, & Virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. Pars hæc* Mechanicæ *a Veteribus in* Potentiis quinque *ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui Gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non Artibus sed Philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maxime tractamus quæ ad Gravitatem, Levitatem, vim Elasticam, resistentiam Fluidorum & ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: & ea propter, hæc nostra tanquam Philosophiæ principia Mathematica proponimus. Omnis enim Philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a Phænomenis motuum investigemus vires Naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant Propositiones generales quas Libro primo & secundo pertractavimus. In Libro autem tertio Exemplum hujus rei proposuimus per explicationem Systematis mundani. Ibi enim, ex Phænomenis cœlestibus, per Propositiones in Libris prioribus Mathematice demonstratas, derivantur vires Gravitatis quibus corpora ad Solem & Planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per Propositiones etiam Mathematicas, deducuntur motus Planetarum, Cometarum, Lunæ & Maris. Utinam cætera Naturæ phænomena ex principiis Mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent ut nonnihil suspicer ea omnia*

via ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitas vel in se mutuo impelluntur & secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur & recedunt: quibus viribus ignotis, Philosophi hactenus Naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic Philosophandi modo, vel veriori alicui, Principia hic posita lucem aliquam præbebunt.

In his edendis, Vir acutissimus & in omne literarum genere eruditissimus Edmundus Halleius *operam navavit, nec solum Typothetarum Sphalmata correxit & Schemata incidi curavit, sed etiam Auctor fuit ut horum editionem aggrederer. Quippe cum demonstratam a me Figuram Orbium cœlestium impetraverat, rogare non destitit ut eandem cum* Societate Regali *communicarem. Quæ deinde hortatibus & benignis suis auspiciis effecit ut de eadem in lucem emittenda cogitare inciperem. At postquam Motuum Lunarium inæqualitates aggressus essem, deinde etiam alia tentare cœpissem quæ ad leges & mensuras Gravitatis & aliarum virium, & Figuras a corporibus secundum datas quascunque leges attractis describendas, ad motus corporum plurium inter se, ad motus corporum in Mediis resistentibus, ad vires, densitates & motus Mediorum, ad Orbes Cometarum, & similia spectant, editionem in aliud tempus differendam esse putavi, ut cætera rimarer & una in publicum darem. Quæ ad motus Lunares spectant, (imperfecta cum sint,) in Corollariis Propositionis* LXVI. *simul complexus sum, ne singula methodo prolixiore quam pro rei dignitate proponere, & sigillatim demonstrare tenerer, & seriem reliquarum Propositionum interrumpere. Nonnulla sero inventa locis minus idoneis inserere malui, quam numerum Propositionum & citationes mutare. Ut omnia candide legantur, & defectus, in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis Lectorum conatibus investigentur, & benigne suppleantur, enixe rogo.*

Dabam *Cantabrigiæ*, e Collegio *S. Trinitatis*, Maii 8. 1686.

IS. NEWTON.

AUCTORIS PRÆFATIO.

IN hac Secunda Principiorum Editione, multa sparsim emendantur & nonnulla adjiciuntur. In Libri primi Sectione II. Inventio virium quibus corpora in Orbibus datis revolvi possint, facilior redditur & amplior. In Libri secundi Sectione VII, Theoria resistentiæ Fluidorum accuratius investigatur & novis Experimentis confirmatur. In Libro tertio Theoria Lunæ & Præcessio Æquinoctiorum ex Principiis suis plenius deducuntur, & Theoria Cometarum pluribus & accuratius computatis Orbium exemplis confirmatur.

Dabam *Londini*,
Mar. 28. 1713.

IS. NEWTON.

EDI-

EDITORIS

PRÆFATIO.

NEWTONIANÆ Philoſophiæ novam tibi, Lector benevole, diuque deſideratam Editionem, plurimum nunc emendatam atque auctiorem exhibemus. Quæ potiſſimum contineantur in hoc Opere celeberrimo, intelligere potes ex Indicibus adjectis: quæ vel addantur vel immutentur, ipſa te fere docebit Auctoris Præfatio. Reliquum eſt, ut adjiciantur nonnulla de Methodo hujus Philoſophiæ.

Qui Phyſicam tractandam ſuſceperunt, ad tres fere claſſes revocari poſſunt. Extiterunt enim, qui ſingulis rerum ſpeciebus Qualitates ſpecificas & occultas tribuerint; ex quibus deinde corporum ſingulorum operationes, ignota quadam ratione, pendere voluerunt. In hoc poſita eſt ſumma doctrinæ Scholaſticæ, ab *Ariſtotele* & Peripateticis derivatæ: Affirmant utique ſingulos Effectus ex corporum ſingularibus Naturis oriri; at unde ſint illæ Naturæ non docent; nihil itaque docent. Cumque toti ſint in rerum nominibus, non in ipſis rebus; Sermonem quendam Philoſophicum cenſendi ſunt adinveniſſe, Philoſophiam tradidiſſe non ſunt cenſendi.

Alii ergo melioris diligentiæ laudem conſequi ſperarunt, rejecta Vocabulorum inutili farragine. Statuerunt itaque Materiam univerſam homogeneam eſſe, omnem vero Formarum varietatem, quæ in corporibus cernitur, ex particularum componentium ſimpliciſſimis quibuſdam & intellectu facillimis affectionibus oriri. Et recte quidem progreſſio inſtituitur a ſimplicioribus ad magis compoſita, ſi particularum primariis illis affectionibus non alios tribuunt modos, quam quos ipſa tribuit Natura. Verum ubi licentiam ſibi aſſumunt, ponendi quaſcunque libet ignotas partium figuras & magnitudines, incertoſque ſitus & motus; quin & fingendi Fluida quædam occulta, quæ corporum poros liberrime permeent, omnipotente prædita ſubtilitate, motibuſque occultis agitata; jam ad ſomnia delabuntur, neglecta rerum conſtitutione vera: quæ ſane fruſtra petenda eſt ex fallacibus conjecturis, cum vix etiam per certiſſimas Obſervationes inveſtigari poſſit. Qui ſpeculationum

suarum fundamentum desumunt ab Hypothesibus, etiamsi deinde secundum leges Mechanicas accuratissime procedant; Fabulam quidem elegantem forte & venustam, Fabulam tamen concinnare dicendi sunt.

Relinquitur adeo tertium genus, qui Philosophiam scilicet Experimentalem profitentur. Hi quidem ex simplicissimis quibus possunt principiis rerum omnium causas derivandas esse volunt: nihil autem Principii loco assumunt, quod nondum ex Phænomenis comprobatum fuerit. Hypotheses non comminiscuntur, neque in Physicam recipiunt, nisi ut Quæstiones de quarum veritate disputetur. Duplici itaque Methodo incedunt, Analytica & Synthetica. Naturæ vires legesque virium simpliciores ex selectis quibusdam Phænomenis per Analysin deducunt, ex quibus deinde per Synthesin reliquorum constitutionem tradunt. Hæc illa est Philosophandi ratio longe optima, quam præ ceteris merito amplectendam censuit Celeberrimus Auctor noster. Hanc solam utique dignam judicavit, in qua excolenda atque adornanda operam suam collocaret. Hujus igitur illustrissimum dedit Exemplum, Mundani nempe Systematis explicationem e Theoria Gravitatis felicissime deductam. Gravitatis virtutem universis corporibus inesse, suspicati sunt vel finxerunt alii: primus Ille & solus ex Apparentiis demonstrare potuit, & speculationibus egregiis firmissimum ponere fundamentum.

Scio equidem nonnullos magni etiam nominis Viros, præjudiciis quibusdam plus æquo occupatos, huic novo Principio ægre assentiri potuisse, & certis incerta identidem prætulisse. Horum famam vellicare non est animus: Tibi potius, Benevole Lector, illa paucis exponere lubet, ex quibus Tute ipse judicium non iniquum feras.

Igitur ut Argumenti sumatur exordium a simplicissimis & proximis; despiciamus paulisper qualis sit in Terrestribus natura Gravitatis, ut deinde tutius progrediamur ubi ad corpora Cœlestia, longissime a sedibus nostris remota, perventum fuerit. Convenit jam inter omnes Philosophos, corpora universa circumterrestria gravitare in Terram. Nulla dari corpora vere levia, jamdudum confirmavit Experientia multiplex. Quæ dicitur Levitas relativa, non est vera Levitas, sed apparens solummodo: & oritur a præpollente Gravitate corporum contiguorum.

Porro, ut corpora universa gravitant in Terram, ita Terra vicissim in corpora æqualiter gravitat; Gravitatis enim actionem esse mutuam & utrinque æqualem, sic ostenditur. Distinguatur Terræ totius

totius moles in binas quascunque partes, vel æquales vel utcunque inæquales: jam si pondera partium non essent in se mutuo æqualia; cederet pondus minus majori, & partes conjunctæ pergerent recta moveri ad infinitum, versus plagam in quam tendit pondus majus: omnino contra Experientiam. Itaque dicendum erit, pondera partium in æquilibrio esse constituta: hoc est, Gravitatis actionem esse mutuam & utrinque æqualem.

Pondera corporum, æqualiter a centro Terræ distantium, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Hoc utique colligitur ex æquali acceleratione corporum omnium, e quiete per ponderum vires cadentium: nam vires quibus inæqualia corpora æqualiter accelerantur, debent esse proportionales quantitatibus materiæ movendæ. Jam vero corpora universa cadentia æqualiter accelerari, ex eo patet, quod in Vacuo *Boyliano* temporibus æqualibus æqualia spatia cadendo describunt, sublata scilicet Aeris resistentia: accuratius autem comprobatur per Experimenta Pendulorum.

Vires attractivæ corporum, in æqualibus distantiis, sunt ut quantitates materiæ in corporibus. Nam cum corpora in Terram & Terra vicissim in corpora momentis æqualibus gravitent; Terræ pondus in unumquodque corpus, seu vis qua corpus Terram attrahit, æquabitur ponderi corporis ejusdem in Terram. Hoc autem pondus erat ut quantitas materiæ in corpore: itaque vis qua corpus unumquodque Terram attrahit, sive corporis vis absoluta, erit ut eadem quantitas materiæ.

Oritur ergo & componitur vis attractiva corporum integrorum ex viribus attractivis partium: siquidem aucta vel diminuta mole materiæ, ostensum est, proportionaliter augeri vel diminui ejus virtutem. Actio itaque Telluris ex conjunctis partium Actionibus conflari censenda erit; atque adeo corpora omnia Terrestria se mutuo trahere oportet viribus absolutis, quæ sint in ratione materiæ trahentis. Hæc est natura Gravitatis apud Terram: videamus jam qualis sit in Cœlis.

Corpus omne perseverare in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare; Naturæ lex est ab omnibus recepta Philosophis. Inde vero sequitur, corpora quæ in Curvis moventur, atque adeo de lineis rectis Orbitas suas tangentibus jugiter abeunt, Vi aliqua perpetuo agente retineri in itinere curvilineo. Planetis igitur in Orbibus curvis revolventibus necessario aderit Vis aliqua, per cujus actiones repetitas indesinenter a Tangentibus deflectantur.

Jam illud concedi æquum eſt, quod Mathematicis rationibus colligitur & certiſſime demonſtratur; Corpora nempe omnia, quæ moventur in linea aliqua curva in plano deſcripta, quæque radio ducto ad punctum vel quieſcens vel utcunque motum deſcribunt areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgeri a Viribus quæ ad idem punctum tendunt. Cum igitur in confeſſo ſit apud Aſtronomos, Planetas primarios circum Solem, ſecundarios vero circum ſuos primarios, areas deſcribere temporibus proportionales; conſequens eſt ut Vis illa, qua perpetuò detorquentur a Tangentibus rectilineis, & in Orbitis curvilineis revolvi coguntur, verſus corpora dirigatur quæ ſita ſunt in Orbitarum centris. Hæc itaque Vis non inepte vocari poteſt, reſpectu quidem corporis revolventis, Centripeta; reſpectu autem corporis centralis, Attractiva; a quacunque demum cauſa oriri fingatur.

Quin & hæc quoque concedenda ſunt, & Mathematice demonſtrantur: Si corpora plura motu æquabili revolvantur in Circulis concentricis, & quadrata temporum periodicorum ſint ut cubi diſtantiarum a centro communi; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Vel, ſi corpora revolvantur in Orbitis quæ ſunt Circulis finitimæ, & quieſcant Orbitarum Apſides; Vires centripetas revolventium fore reciproce ut quadrata diſtantiarum. Obtinere caſum alterutrum in Planetis univerſis conſentiunt Aſtronomi. Itaque Vires centripetæ Planetarum omnium ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum ab Orbium centris. Si quis objiciat Planetarum & Lunæ præſertim, Apſides non penitus quieſcere; ſed motu quodam lento ferri in conſequentia: reſponderi poteſt, etiamſi concedamus hunc motum tardiſſimum exinde profectum eſſe quod Vis centripetæ proportio aberret aliquantum a duplicata, aberrationem illam per computum Mathematicum inveniri poſſe & plane inſenſibilem eſſe. Ipſa enim ratio Vis centripetæ Lunaris, quæ omnium maxime turbari debet, paululum quidem duplicatam ſuperabit; ad hanc vero ſexaginta fere vicibus propius accedet quam ad triplicatam. Sed verior erit reſponſio, ſi dicamus hanc Apſidum progreſſionem, non ex aberratione a duplicata proportione, ſed ex alia prorſus diverſa cauſa oriri, quemadmodum egregie commonſtratur in hac Philoſophia. Reſtat ergo ut Vires centripetæ, quibus Planetæ primarii tendunt verſus Solem & ſecundarii verſus primarios ſuos, ſint accurate ut quadrata diſtantiarum reciproce.

Ex

Ex iis quæ hactenus dicta sunt, constat Planetas in Orbitis suis retineri per Vim aliquam in ipsos perpetuo agentem: constat Vim illam dirigi semper versus Orbitarum centra: constat hujus efficaciam augeri in accessu ad centrum, diminui in recessu ab eodem: & augeri quidem in eadem proportione qua diminuitur quadratum distantiæ, diminui in eadem proportione qua distantiæ quadratum augetur. Videamus jam, comparatione instituta inter Planetarum Vires centripetas & Vim Gravitatis, annon ejusdem forte sint generis. Ejusdem vero generis erunt, si deprehendantur hinc & inde leges eædem eædemque affectiones. Primo itaque Lunæ, quæ nobis proxima est, vim centripetam expendamus.

Spatia rectilinea, quæ a corporibus e quiete demissis dato tempore sub ipso motus initio describuntur, ubi a viribus quibuscunque urgentur, proportionalia sunt ipsis viribus: Hoc utique consequitur ex ratiociniis Mathematicis. Erit igitur Vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis, ad Vim Gravitatis in superficie Terræ, ut spatium quod tempore quam minimo describeret Luna descendendo per Vim centripetam versus Terram, si circulari omni motu privari fingeretur, ad spatium quod eodem tempore quam minimo describit grave corpus in vicinia Terræ, per Vim gravitatis suæ cadendo. Horum spatiorum prius æquale est arcus a Luna per idem tempus descripti sinui verso, quippe qui Lunæ translationem de Tangente, factam a Vi centripeta, metitur; atque adeo computari potest ex datis tum Lunæ tempore periodico tum distantia ejus a centro Terræ. Spatium posterius invenitur per Experimenta Pendulorum, quemadmodum docuit *Hugenius*. Inito itaque calculo, spatium prius ad spatium posterius, seu vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis ad vim Gravitatis in superficie Terræ, erit ut quadratum semidiametri Terræ ad Orbitæ semidiametri quadratum. Eandem habet rationem, per ea quæ superius ostenduntur, vis centripeta Lunæ in Orbita sua revolventis ad vim Lunæ centripetam prope Terræ superficiem. Vis itaque centripeta prope Terræ superficiem æqualis est vi Gravitatis. Non ergo diversæ sunt vires, sed una atque eadem: si enim diversæ essent, corpora viribus conjunctis duplo celerius in Terram caderent quam ex vi sola Gravitatis. Constat igitur Vim illam centripetam, qua Luna perpetuo de Tangente vel trahitur vel impellitur & in Orbita retinetur, ipsam esse vim Gravitatis terrestris ad Lunam usque pertingentem. Et rationi quidem consentaneum est ut ad ingentes distantias illa sese Virtus extendat,

cum.

cum nullam ejus ſenſibilem imminutionem, vel in altiſſimis montium cacuminibus, obſervare licet. Gravitat itaque Luna in Terram: quin & actione mutua, Terra viciſſim in Lunam æqualiter gravitat: id quod abunde quidem confirmatur in hac Philoſophia, ubi agitur de Maris æſtu & Æquinoctiorum præceſſione, ab actione tum Lunæ tum Solis in Terram oriundis. Hinc & illud tandem edocemur, qua nimirum lege vis Gravitatis decreſcat in majoribus a Tellure diſtantiis. Nam cum Gravitas non diverſa ſit a Vi centripeta Lunari, hæc vero ſit reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ; diminuetur & Gravitas in eadem ratione.

Progrediamur jam ad Planetas reliquos. Quoniam revolutiones primariorum circa Solem & ſecundariorum circa Jovem & Saturnum ſunt Phænomena generis ejuſdem ac revolutio Lunæ circa Terram, quoniam porro demonſtratum eſt vires centripetas primariorum dirigi verſus centrum Solis, ſecundariorum verſus centra Jovis & Saturni, quemadmodum Lunæ vis centripeta verſus Terræ centrum dirigitur; adhæc, quoniam omnes illæ vires ſunt reciproce ut quadrata diſtantiarum a centris, quemadmodum vis Lunæ eſt ut quadratum diſtantiæ a Terra: concludendum erit eandem eſſe naturam univerſis. Itaque ut Luna gravitat in Terram, & Terra viciſſim in Lunam; ſic etiam gravitabunt omnes ſecundarii in primarios ſuos, & primarii viciſſim in ſecundarios; ſic & omnes primarii in Solem, & Sol viciſſim in primarios.

Igitur Sol in Planetas univerſos gravitat & univerſi in Solem. Nam ſecundarii dum primarios ſuos comitantur, revolvuntur interea circum Solem una cum primariis. Eodem itaque argumento, utriuſque generis Planetæ gravitant in Solem, & Sol in ipſos. Secundarios vero Planetas in Solem gravitare abunde inſuper conſtat ex inæqualitatibus Lunaribus; quarum accuratiſſimam Theoriam, admiranda ſagacitate patefactam, in tertio hujus Operis libro expoſitam habemus.

Solis virtutem attractivam quoquoverſum propagari ad ingentes uſque diſtantias, & ſeſe diffundere ad ſingulas circumjecti ſpatii partes, apertiſſime colligi poteſt ex motu Cometarum; qui ab immenſis intervallis profecti feruntur in viciniam Solis, & nonnunquam adeo ad ipſum proxime accedunt ut Globum ejus, in Periheliis ſuis verſantes, tantum non contingere videantur. Horum Theoriam ab Aſtronomis antehac fruſtra quæſitam, noſtro tandem ſæculo feliciter inventam & per Obſervationes certiſſime demonſtratam, Præſtantiſſimo noſtro Auctori debemus. Patet

igitur

igitur Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere. Ex hisce vero Phænomenis manifestum est & Mathematice comprobatur, vires illas, quibus Cometæ retinentur in orbitis suis, respicere Solem & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro. Gravitant itaque Cometæ in Solem: atque adeo Solis vis attractiva non tantum ad corpora Planetarum in datis distantiis & in eodem fere plano collocata, sed etiam ad Cometas in diversissimis Cœlorum regionibus & in diversissimis distantiis positos pertingit. Hæc igitur est natura corporum gravitantium, ut vires suas edant ad omnes distantias in omnia corpora gravitantia. Inde vero sequitur, Planetas & Cometas universos se mutuo trahere, & in se mutuo graves esse: quod etiam confirmatur ex perturbatione Jovis & Saturni, Astronomis non incognita, & ab actionibus horum Planetarum in se invicem oriunda; quin & ex motu illo lentissimo Apsidum, qui supra memoratus est, quique a causa consimili proficiscitur.

Eo demum pervenimus ut dicendum sit, & Terram & Solem & corpora omnia cœlestia, quæ Solem comitantur, se mutuo attrahere. Singulorum ergo particulæ quæque minimæ vires suas attractivas habebunt, pro quantitate materiæ pollentes; quemadmodum supra de Terrestribus ostensum est. In diversis autem distantiis, erunt & harum vires in duplicata ratione distantiarum reciproce: nam ex particulis hac lege trahentibus componi debere Globos eadem lege trahentes, Mathematice demonstratur.

Conclusiones præcedentes huic innituntur Axiomati, quod a nullis non recipitur Philosophis; Effectuum scilicet ejusdem generis, quorum nempe quæ cognoscuntur proprietates eædem sunt, easdem esse causas & easdem esse proprietates quæ nondum cognoscuntur. Quis enim dubitat, si Gravitas sit causa descensus Lapidis in *Europa*, quin eadem sit causa descensus in *America?* Si Gravitas mutua fuerit inter Lapidem & Terram in *Europa*; quis negabit mutuam esse in *America?* Si vis attractiva Lapidis & Terræ componatur, in *Europa*, ex viribus attractivis partium; quis negabit similem esse compositionem in *America*? Si attractio Terræ ad omnia corporum genera & ad omnes distantias propagetur in *Europa*; quidni pariter propagari dicamus in *America*? In hac Regula fundatur omnis Philosophia: quippe qua sublata nihil affirmare possimus de Universis. Constitutio rerum singularum innotescit per Observationes & Experimenta: inde vero non

 nisi

nisi per hanc Regulam de rerum universarum natura judicamus.

Jam cum Gravia sint omnia corpora, quæ apud Terram vel in Cœlis reperiuntur, de quibus Experimenta vel Observationes instituere licet; omnino dicendum erit, Gravitatem corporibus universis competere. Et quemadmodum nulla concipi debent corpora, quæ non sint Extensa, Mobilia, & Impenetrabilia; ita nulla concipi debere, quæ non sint Gravia. Corporum Extensio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non nisi per Experimenta innotescunt: eodem plane modo Gravitas innotescit. Corpora omnia de quibus Observationes habemus, Extensa sunt & Mobilia & Impenetrabilia: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus Observationes non habemus, Extensa esse & Mobilia & Impenetrabilia. Ita corpora omnia sunt Gravia, de quibus Observationes habemus: & inde concludimus corpora universa, etiam illa de quibus Observationes non habemus, Gravia esse. Si quis dicat corpora Stellarum inerrantium non esse Gravia, quandoquidem eorum Gravitas nondum est observata; eodem argumento dicere licebit neque Extensa esse, nec Mobilia, nec Impenetrabilia, cum hæ Fixarum affectiones nondum sint observatæ. Quid opus est verbis? Inter primarias qualitates corporum universorum vel Gravitas habebit locum; vel Extensio, Mobilitas, & Impenetrabilitas non habebunt. Et natura rerum vel recte explicabitur per corporum Gravitatem, vel non recte explicabitur per corporum Extensionem, Mobilitatem, & Impenetrabilitatem.

Audio nonnullos hanc improbare conclusionem, & de occultis qualitatibus nescio quid mussitare. Gravitatem scilicet Occultum esse quid, perpetuo argutari solent; occultas vero causas procul esse ablegandas a Philosophia. His autem facile respondetur; occultas esse causas, non illas quidem quarum existentia per Observationes clarissime demonstratur, sed has solum quarum occulta est & ficta existentia nondum vero comprobata. Gravitas ergo non erit occulta causa motuum cœlestium; siquidem ex Phænomenis ostensum est, hanc virtutem revera existere. Hi potius ad occultas confugiunt causas; qui nescio quos Vortices, materiæ cujusdam prorsus fictitiæ & sensibus omnino ignotæ, motibus iisdem regendis præficiunt.

Ideone autem Gravitas occulta causa dicetur, eoque nomine rejicietur e Philosophia, quod causa ipsius Gravitatis occulta est & nondum inventa? Qui sic statuunt, videant nequid statuant absurdi,

ſurdi, unde totius tandem Philoſophiæ fundamenta convellantur. Etenim cauſæ continuo nexu procedere ſolent a compoſitis ad ſimpliciora: ubi ad cauſam ſimpliciſſimam perveneris, jam non licebit ulterius progredi. Cauſæ igitur ſimpliciſſimæ nulla dari poteſt mechanica explicatio: ſi daretur enim, cauſa nondum eſſet ſimpliciſſima. Has tu proinde cauſas ſimpliciſſimas appellabis occultas, & exulare jubebis? ſimul vero exulabunt & ab his proximè pendentes & quæ ab illis porro pendent, uſque dum a cauſis omnibus vacua fuerit & probe purgata Philoſophia.

Sunt qui Gravitatem præter naturam eſſe dicunt, & Miraculum perpetuum vocant. Itaque rejiciendam eſſe volunt, cum in Phyſica præternaturales cauſæ locum non habeant. Huic ineptæ prorſus objectioni diluendæ, quæ & ipſa Philoſophiam ſubruit univerſam, vix operæ pretium eſt immorari. Vel enim Gravitatem corporibus omnibus inditam eſſe negabunt, quod tamen dici non poteſt: vel eo nomine præter naturam eſſe affirmabunt, quod ex aliis corporum affectionibus atque adeo ex cauſis Mechanicis originem non habeat. Dantur certe primariæ corporum affectiones; quæ, quoniam ſunt primariæ, non pendent ab aliis. Viderint igitur annon & hæ omnes ſint pariter præter naturam, eoque pariter rejiciendæ: viderint vero qualis ſit deinde futura Philoſophia.

Nonnulli ſunt quibus hæc tota Phyſica cœleſtis vel ideo minus placet, quod cum *Carteſii* dogmatibus pugnare & vix conciliari poſſe videatur. His ſua licebit opinione frui; ex æquo autem agant oportet: non ergo denegabunt aliis eandem libertatem quam ſibi concedi poſtulant. NEWTONIANAM itaque Philoſophiam, quæ nobis verior habetur, retinere & amplecti licebit, & cauſas ſequi per Phænomena comprobatas, potius quam fictas & nondum comprobatas. Ad veram Philoſophiam pertinet, rerum naturas ex cauſis vere exiſtentibus derivare: eas vero leges quærere, quibus voluit Summus Opifex hunc Mundi pulcherrimum ordinem ſtabilire; non eas quibus potuit, ſi ita viſum fuiſſet. Rationi enim conſonum eſt, ut a pluribus cauſis, ab invicem nonnihil diverſis, idem poſſit Effectus proficiſci: hæc autem vera erit cauſa, ex qua vere atque actu proficiſcitur; reliquæ locum non habent in Philoſophia vera. In Horologiis automatis idem Indicis horarii motus vel ab appenſo Pondere vel ab intus concluſo Elatere oriri poteſt. Quod ſi oblatum Horologium revera ſit inſtructum Pondere;

 ridebitur

ridebitur qui finget Elaterem, & ex Hypothesi sic præpropere confícta motum Indicis explicare suscipiet: oportuit enim internam Machinæ fabricam penitius perscrutari, ut ita motus propositi principium verum exploratum habere posset. Idem vel non absimile feretur judicium de Philosophis illis, qui materia quadam subtilissima Cœlos esse repletos, hanc autem in Vortices indesinenter agi voluerunt. Nam si Phænomenis vel accuratissime satisfacere possent ex Hypothesibus suis; veram tamen Philosophiam tradidisse, & veras causas motuum cœlestium invenisse nondum dicendi sunt; nisi vel has revera existere, vel saltem alias non existere demonstraverint. Igitur si ostensum fuerit, universorum corporum Attractionem habere verum locum in rerum natura; quinetiam ostensum fuerit, qua ratione motus omnes cœlestes abinde solutionem recipiant; vana fuerit & merito deridenda objectio, si quis dixerit eosdem motus per Vortices explicari debere, etiamsi id fieri posse vel maxime concesserimus. Non autem concedimus: Nequeunt enim ullo pacto Phænomena per Vortices explicari; quod ab Auctore nostro abunde quidem & clarissimis rationibus evincitur; ut somniis plus æquo indulgeant oporteat, qui ineptissimo figmento resarciendo, novisque porro commentis ornando infelicem operam addicunt.

Si corpora Planetarum & Cometarum circa Solem deferantur a Vorticibus; oportet corpora delata & Vorticum partes proxime ambientes eadem velocitate eademque cursus determinatione moveri, & eandem habere densitatem vel eandem Vim inertiæ pro mole materiæ. Constat vero Planetas & Cometas, dum versantur in iisdem regionibus Cœlorum, velocitatibus variis variaque cursus determinatione moveri. Necessario itaque sequitur, ut Fluidi cœlestis partes illæ, quæ sunt ad easdem distantias a Sole revolvantur eodem tempore in plagas diversas cum diversis velocitatibus: etenim alia opus erit directione & velocitate, ut transire possint Planetæ, alia, ut transire possint Cometæ. Quod cum explicari nequeat; vel fatendum erit, universa corpora cœlestia non deferri a materia Vorticis; vel dicendum erit, eorundem motus repetendos esse non ab uno eodemque Vortice, sed a pluribus qui ab invicem diversi sint, idemque spatium Soli circumjectum pervadant.

Si plures Vortices in eodem spatio contineri, & sese mutuo penetrare, motibusque diversis revolvi ponantur; quoniam hi motus debent esse conformes delatorum corporum motibus, qui sunt

funt fumme regulares, & peraguntur in Sectionibus Conicis, nunc valde eccentricis, nunc ad Circulorum proxime formam accedentibus; jure quærendum erit, qui fieri poffit, ut iidem integri conferventur, nec ab actionibus materiæ occurfantis per tot fæcula quicquam perturbentur. Sane fi motus hi fictitii funt magis compofiti & difficilius explicantur, quam veri illi motus Planetarum & Cometarum; fruftra mihi videntur in Philofophiam recipi: omnis enim caufa debet effe Effectu fuo fimplicior. Conceffa Fabularum licentia, affirmaverit aliquis Planetas omnes & Cometas circumcingi Atmofphæris, adinftar Telluris noftræ; quæ quidem Hypothefis rationi magis confentanea videbitur quam Hypothefis Vorticum. Affirmaverit deinde has Atmofphæras, ex natura fua, circa Solem moveri & Sectiones Conicas defcribere; qui fane motus multo facilius concipi poteft, quam confimilis motus Vorticum fe invicem permeantium. Denique Planetas ipfos & Cometas circa Solem deferri ab Atmofphæris fuis credendum effe ftatuat, & ob repertas motuum cœleftium caufas triumphum agat. Quifquis autem hanc Fabulam rejiciendam effe putet, idem & alteram Fabulam rejiciet: nam ovum non eft ovo fimilius, quam Hypothefis Atmofphærarum Hypothefi Vorticum.

Docuit *Galilæus*, lapidis projecti & in parabola moti deflexionem a curfu rectilineo oriri a Gravitate lapidis in Terram, ab occulta fcilicet qualitate. Fieri tamen poteft ut alius aliquis, nafi acutioris, Philofophus caufam aliquam comminifcatur. Finget igitur ille materiam quandam fubtilem, quæ nec vifu, nec tactu, neque ullo fenfu percipitur, verfari in regionibus quæ proxime contingunt Telluris fuperficiem. Hanc autem materiam, in diverfas plagas, variis & plerumque contrariis motibus ferri, & lineas Parabolicas defcribere contendet. Deinde vero lapidis deflexionem pulchre fic expediet, & vulgi plaufum merebitur. Lapis, inquiet, in Fluido illo fubtili natat; & curfui ejus obfequendo, non poteft non eandem una femitam defcribere. Fluidum vero movetur in lineis Parabolicis; ergo lapidem in Parabola moveri neceffe eft. Quis nunc non mirabitur acutiffimum hujufce Philofophi ingenium, ex caufis Mechanicis, materia fcilicet & motu, Phænomena Naturæ ad vulgi etiam captum præclare deducentis? Quis vero non fubfannabit bonum illum *Galilæum*, qui magno molimine Mathematico qualitates occultas, e Philofophia feliciter exclufas, denuo revocare fuftinuerit? fed pudet nugis diutius immorari.

Summa rei huc tandem redit: Cometarum ingens est numerus; motus eorum sunt summe regulares, & easdem leges cum Planetarum motibus observant. Moventur in Orbibus Conicis, hi orbes sunt valde admodum eccentrici. Feruntur undique in omnes Cœlorum partes, & Planetarum regiones liberrime pertranseunt, & sæpe contra Signorum ordinem incedunt. Hæc Phænomena certissime confirmantur ex Observationibus Astronomicis: & per Vortices nequeunt explicari: Imo, ne quidem cum Vorticibus Planetarum consistere possunt. Cometarum motibus omnino locus non erit; nisi materia illa fictitia penitus e Cœlis amoveatur.

Si enim Planetæ circum Solem a Vorticibus devehuntur; Vorticum partes, quæ proxime ambiunt unumquemque Planetam, ejusdem densitatis erunt ac Planeta; uti supra dictum est. Itaque materia illa omnis quæ contigua est Orbis magni perimetro, parem habebit ac Tellus densitatem: quæ vero jacet intra Orbem magnum atque Orbem Saturni, vel parem vel majorem habebit. Nam ut constitutio Vorticis permanere possit, debent partes minus densæ centrum occupare, magis densæ longius a centro abire. Cum enim Planetarum tempora periodica sint in ratione sesquiplicata distantiarum a Sole, oportet partium Vorticis periodos eandem rationem servare. Inde vero sequitur, vires centrifugas harum partium fore reciproce ut quadrata distantiarum. Quæ igitur majore intervallo distant a centro, nituntur ab eodem recedere minore vi: unde si minus densæ fuerint, necesse est ut cedant vi majori, qua partes centro propiores ascendere conantur. Ascendent ergo densiores, descendent minus densæ, & locorum fiet invicem permutatio; donec ita fuerit disposita atque ordinata materia fluida totius Vorticis, ut conquiescere jam possit in æquilibrio constituta. Si bina Fluida, quorum diversa est densitas, in eodem vase continentur; utique futurum est ut Fluidum, cujus major est densitas, majore vi Gravitatis infimum petat locum: & ratione non absimili omnino dicendum est, densiores Vorticis partes majore vi centrifuga petere supremum locum. Tota igitur illa & multo maxima pars Vorticis, quæ jacet extra Telluris orbem, densitatem habebit atque adeo vim inertiæ pro mole materiæ, quæ non minor erit quam densitas & vis inertiæ Telluris: inde vero Cometis trajectis orietur ingens resistentia, & valde admodum sensibilis; ne dicam, quæ motum eorundem penitus sistere atque absorbere posse merito videatur. Constat autem ex motu Cometarum

metarum prorsus regulari, nullam ipsos resistentiam pati quæ vel minimum sentiri potest; atque adeo neutiquam in materiam ullam incursare, cujus aliqua sit vis resistendi, vel proinde cujus aliqua sit densitas seu vis Inertiæ. Nam resistentia Mediorum oritur vel ab inertia materiæ fluidæ, vel a defectu lubricitatis. Quæ oritur a defectu lubricitatis, admodum exigua est; & sane vix observari potest in Fluidis vulgo notis, nisi valde tenacia fuerint adinstar Olei & Mellis. Resistentia quæ sentitur in Aere, Aqua, Hydrargyro, & hujusmodi Fluidis non tenacibus fere tota est prioris generis; & minui non potest per ulteriorem quemcunque gradum subtilitatis, manente Fluidi densitate vel vi inertiæ, cui semper proportionalis est hæc resistentia: quemadmodum clarissime demonstratum est ab Auctore nostro in peregregia Resistentiarum Theoria, quæ paulo nunc accuratius exponitur, hac secunda vice, & per Experimenta corporum cadentium plenius confirmatur.

Corpora progrediendo motum suum Fluido ambienti paulatim communicant, & communicando amittunt, amittendo autem retardantur. Est itaque retardatio motui communicato proportionalis; motus vero communicatus, ubi datur corporis progredientis velocitas, est ut Fluidi densitas; ergo retardatio seu resistentia erit ut eadem Fluidi densitas; neque ullo pacto tolli potest, nisi a Fluido ad partes corporis posticas recurrente restituatur motus amissus. Hoc autem dici non poterit, nisi impressio Fluidi in corpus ad partes posticas æqualis fuerit impressioni corporis in Fluidum ad partes anticas, hoc est, nisi velocitas relativa qua Fluidum irruit in corpus a tergo, æqualis fuerit velocitati qua corpus irruit in Fluidum, id est, nisi velocitas absoluta Fluidi recurrentis duplo major fuerit quam velocitas absoluta Fluidi propulsi; quod fieri nequit. Nullo igitur modo tolli potest Fluidorum resistentia, quæ oritur ab eorundem densitate & vi inertiæ. Itaque concludendum erit; Fluidi cœlestis nullam esse vim inertiæ, cum nulla sit vis resistendi: nullam esse vim qua motus communicetur, cum nulla sit vis inertiæ: nullam esse vim qua mutatio quælibet vel corporibus singulis vel pluribus inducatur, cum nulla sit vis qua motus communicetur: nullam esse omnino efficaciam, cum nulla sit facultas mutationem quamlibet inducendi. Quidni ergo hanc Hypothesin, quæ fundamento plane destituitur, quæque naturæ rerum explicandæ ne minimum quidem inservit, ineptissimam vocare liceat & Philosopho prorsus

ſus indignam. Qui cœlos materia fluida repletos eſſe volunt; hanc vero non inertem eſſe ſtatuunt; Hi verbis tollunt Vacuum, re ponunt. Nam cum hujuſmodi materia fluida ratione nulla ſecerni poſſit ab inani Spatio; diſputatio tota fit de rerum nominibus, non de naturis. Quod ſi aliqui ſint adeo uſque dediti Materiæ, ut Spatium a corporibus vacuum nullo pacto admittendum credere velint; videamus quo tandem oporteat illos pervenire.

Vel enim dicent hanc, quam confingunt, Mundi per omnia pleni conſtitutionem ex voluntate Dei profectam eſſe, propter eum finem, ut operationibus Naturæ ſubſidium præſens haberi poſſet ab Æthere ſubtiliſſimo cuncta permeante & implente; quod tamen dici non poteſt, ſiquidem jam oſtenſum eſt ex Cometarum phænomenis, nullam eſſe hujus Ætheris efficaciam: vel dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, propter finem aliquem ignotum; quod neque dici debet, ſiquidem diverſa Mundi conſtitutio eodem argumento pariter ſtabiliri poſſet: vel denique non dicent ex voluntate Dei profectam eſſe, ſed ex neceſſitate quadam Naturæ. Tandem igitur delabi oportet in fæces ſordidas Gregis impuriſſimi. Hi ſunt qui ſomniant Fato univerſa regi, non Providentia; Materiam ex neceſſitate ſua ſemper & ubique extitiſſe, infinitam eſſe & æternam. Quibus poſitis, erit etiam undiquaque uniformis: nam varietas formarum cum neceſſitate omnino pugnat. Erit etiam immota: nam ſi neceſſario moveatur in plagam aliquam determinatam, cum determinata aliqua velocitate; pari neceſſitate movebitur in plagam diverſam cum diverſa velocitate; in plagas autem diverſas, cum diverſis velocitatibus, moveri non poteſt; oportet igitur immotam eſſe. Neutiquam profecto potuit oriri Mundus, pulcherrima formarum & motuum varietate diſtinctus, niſi ex liberrima voluntate cuncta providentis & gubernantis Dei.

Ex hoc igitur fonte promanarunt illæ omnes quæ dicuntur Naturæ leges: in quibus multa ſane ſapientiſſimi conſilii, nulla neceſſitatis apparent veſtigia. Has proinde non ab incertis conjecturis petere, ſed Obſervando atque Experiendo addiſcere debemus. Qui veræ Phyſicæ principia Legeſque rerum, ſola mentis vi & interno Rationis lumine fretum, invenire ſe poſſe confidit; hunc oportet, vel ſtatuere Mundum ex neceſſitate fuiſſe, Legeſque propoſitas ex eadem neceſſitate ſequi; vel ſi per voluntatem Dei conſtitutus ſit ordo Naturæ, ſe tamen, homunc ionem miſellum

misellum, quid optimum factu sit perspectum habere. Sana omnis & vera Philosophia fundatur in Phænomenis rerum: quæ si nos vel invitos & reluctantes ad hujusmodi principia deducunt, in quibus clarissime cernuntur Consilium optimum & Dominium summum sapientissimi & potentissimi Entis; non erunt hæc ideo non admittenda principia, quod quibusdam forsan hominibus minus grata sint futura. His vel Miracula vel Qualitates occultæ dicantur, quæ displicent; verum nomina malitiose indita non sunt ipsis rebus vitio vertenda; nisi illud fateri tandem velint, utique debere Philosophiam in Atheismo fundari. Horum hominum gratia non erit labefactanda Philosophia, siquidem rerum ordo non vult immutari.

Obtinebit igitur apud probos & æquos Judices præstantissima Philosophandi ratio, quæ fundatur in Experimentis & Observationibus. Huic vero, dici vix poterit, quanta lux accedat, quanta dignitas, ab hoc Opere præclaro Illustrissimi nostri Auctoris; cujus eximiam ingenii felicitatem, difficillima quæque Problemata enodantis, & ad ea porro pertingentis ad quæ nec spes erat humanam mentem assurgere potuisse, merito admirantur & suspiciunt quicunque paulo profundius in hisce rebus versati sunt. Claustris ergo reseratis, aditum Nobis aperuit ad pulcherrima rerum mysteria. Systematis Mundani compagem elegantissimam ita tandem patefecit & penitius perspectandam dedit; ut nec ipse, si nunc revivisceret, Rex *Alphonsus* vel simplicitatem vel harmoniæ gratiam in ea desideraret. Itaque Naturæ majestatem propius jam licet intueri, & dulcissima contemplatione frui, Conditorem vero ac Dominum Universorum impensius colere & venerari, qui fructus est Philosophiæ multo uberrimus. Cæcum esse oportet, qui ex optimis & sapientissimis rerum structuris non statim videat Fabricatoris Omnipotentis infinitam sapientiam & bonitatem: insanum, qui profiteri nolit.

Extabit igitur Eximium NEWTONI Opus adversus Atheorum impetus munitissimum præsidium: neque enim alicunde felicius, quam ex hac pharetra, contra impiam Catervam tela deprompseris. Hoc sensit pridem, & in pereruditis Concionibus Anglice Latineque editis, primus egregie demonstravit Vir in omni Literarum genere præclarus idemque bonarum Artium fautor eximius RICHARDUS BENTLEIUS, Sæculi sui & Academiæ nostræ magnum Ornamentum, Collegii nostri *S. Trinitatis* Magister dignissimus & integerrimus. Huic ego me pluribus nominibus obstrictum fateri

d debeo:

debeo: Huic & Tuas quæ debentur gratias, Lector benevole, non denegabis. Is enim, cum a longo tempore Celeberrimi Auctoris amicitia intima frueretur, (qua etiam apud Posteros censeri non minoris æstimat, quam propriis Scriptis quæ literato orbi in deliciis sunt inclarescere) Amici simul famæ & scientiarum incremento consuluit. Itaque cum Exemplaria prioris Editionis rarissima admodum & immani pretio coemenda superessent; suasit Ille crebris efflagitationibus & tantum non objurgando perpulit denique Virum Præstantissimum, nec modestia minus quam eruditione summa Insignem, ut novam hanc Operis Editionem, per omnia elimatam denuo & egregiis insuper accessionibus ditatam, suis sumptibus & auspiciis prodire pateretur: Mihi vero, pro jure suo, pensum non ingratum demandavit, ut quam posset emendate id fieri curarem.

Cantabrigiæ,
Maji 12. 1713.

ROGERUS COTES Collegii *S. Trinitatis* Socius,
Astronomiæ & Philosophiæ Experimentalis
Professor *Plumianus*.

INDEX

INDEX CAPITUM.
TOTIUS OPERIS.

SECT.

DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

DE MUNDI SYSTEMATE LIBER TERTIUS.

PHILO-

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas Materiæ est mensura ejusdem orta ex illius Densitate & Magnitudine conjunctim.

AER, densitate duplicata, in spatio etiam duplicato fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de Nive & Pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas qualcunque diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem Quantitatem sub nomine Corporis vel Massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque Pondus. Nam Ponderi proportionalem esse reperi per experimenta Pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas Motus est mensura ejusdem orta ex Velocitate & Quantitate Materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; adeoque in corpore duplo majore æquali cum velocitate duplus est, & dupla cum velocitate quadruplus.

DEFINITIONES.

DEFINITIO III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Hæc semper proportionalis est suo corpori, neque differt quicquam ab inertia massæ, nisi in modo concipiendi. Per inertiam materiæ, fit ut corpus omne de statu suo vel quiescendi vel movendi difficulter deturbetur. Unde etiam vis insita nomine significantissimo Vis Inertiæ dici possit. Exercet vero corpus hanc vim solummodo in mutatione status sui per vim aliam in se impressam facta; estque exercitium ejus sub diverso respectu & Resistentia & Impetus: resistentia, quatenus corpus ad conservandum statum suum reluctatur vi impressæ; impetus, quatenus corpus idem, vi resistentis obstaculi difficulter cedendo, conatur statum ejus mutare. Vulgus resistentiam quiescentibus & impetum moventibus tribuit: sed motus & quies, uti vulgo concipiuntur, respectu solo distinguuntur ab invicem; neque semper vere quiescunt quæ vulgo tanquam quiescentia spectantur.

DEFINITIO IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

Consistit hæc vis in actione sola, neque post actionem permanet in corpore. Perseverat enim corpus in statu omni novo per solam vim inertiæ. Est autem vis impressa diversarum originum, ut ex Ictu, ex Pressione, ex vi Centripeta.

DEFINITIO V.

Vis Centripeta est, qua corpora versus punctum aliquod tanquam ad Centrum undique trahuntur, impelluntur, vel utcunque tendunt.

Hujus generis est Gravitas, qua corpora tendunt ad centrum terræ; Vis Magnetica, qua ferrum petit magnetem; & Vis illa, quæcunque sit, qua Planetæ perpetuo retrahuntur a motibus rectilineis, & in lineis curvis revolvi coguntur. Lapis, in funda circumactus,

actus, a circumagente manu abire conatur; & conatu suo fundam distendit, eoque fortius quo celerius revolvitur; & quamprimum dimittitur, avolat. Vim conatui illi contrariam, qua funda lapidem in manum perpetuo retrahit & in orbe retinet, quoniam in manum ceu orbis centrum dirigitur, Centripetam appello. Et par est ratio corporum omnium, quæ in gyrum aguntur. Conantur ea omnia a centris orbium recedere; & nisi adsit vis aliqua conatui isti contraria, qua cohibeantur & in orbibus retineantur, quamque ideo Centripetam appello, abibunt in rectis lineis uniformi cum motu. Projectile, si vi Gravitatis destitueretur, non deflecteretur in terram, sed in linea recta abiret in cœlos; idque uniformi cum motu, si modo aeris resistentia tolleretur. Per gravitatem suam retrahitur a cursu rectilineo & in terram perpetuo flectitur, idque magis vel minus pro gravitate sua & velocitate motus. Quo minor erit ejus gravitas pro quantitate materiæ vel major velocitas quacum projicitur, eo minus deviabit a cursu rectilineo & longius perget. Si Globus plumbeus, data cum velocitate secundum lineam horizontalem a montis alicujus vertice vi pulveris tormentarii projectus, pergeret in linea curva ad distantiam duorum milliarium, priusquam in terram decideret: hic dupla cum velocitate quasi duplo longius pergeret, & decupla cum velocitate quasi decuplo longius: si modo aeris resistentia tolleretur. Et augendo velocitatem augeri posset pro lubitu distantia in quam projiceretur, & minui curvatura lineæ quam describeret, ita ut tandem caderet ad distantiam graduum decem vel triginta vel nonaginta; vel etiam ut terram totam circuiret priusquam caderet; vel denique ut in terram nunquam caderet, sed in cœlos abiret & motu abeundi pergeret in infinitum. Et eadem ratione, qua Projectile vi gravitatis in orbem flecti posset & terram totam circuire, potest & Luna vel vi gravitatis, si modo gravis sit, vel alia quacunque vi, qua in terram urgeatur, retrahi semper a cursu rectilineo terram versus, & in orbem suum flecti: & absque tali vi Luna in orbe suo retineri non potest. Hæc vis, si justo minor esset, non satis flecteret Lunam de cursu rectilineo: si justo major, plus satis flecteret, ac de orbe terram versus deduceret. Requiritur quippe, ut sit justæ magnitudinis: & Mathematicorum est invenire Vim, qua corpus in dato quovis orbe data cum velocitate accurate retineri possit; & vicissim invenire Vim curvilineam, in quam corpus e dato quovis loco data cum velocitate egressum a data vi flectatur. Est autem vis hujus centripetæ Quantitas trium generum, Absoluta, Acceleratrix, & Motrix.

DEFINITIO VI.

Vis centripetæ Quantitas Absoluta est mensura ejusdem major vel minor pro Efficacia causæ eam propagantis a centro per regiones in circuitu.

Ut Vis Magnetica pro mole magnetis vel intensione virtutis major in uno magnete, minor in alio.

DEFINITIO VII.

Vis centripetæ Quantitas Acceleratrix est ipsius mensura Velocitati proportionalis, quam dato tempore generat.

Uti Virtus magnetis ejusdem major in minori distantia, minor in majori: vel vis Gravitans major in vallibus, minor in cacuminibus præaltorum montium, atque adhuc minor (ut posthac patebit) in majoribus distantiis a globo terræ; in æqualibus autem distantiis eadem undique, propterea quod corpora omnia cadentia (gravia an levia, magna an parva) sublata Aeris resistentia, æqualiter accelerat.

DEFINITIO VIII.

Vis centripetæ Quantitas Motrix est ipsius mensura proportionalis Motui, quem dato tempore generat.

Uti Pondus majus in majore corpore, minus in minore; inque corpore eodem majus prope terram, minus in cœlis. Hæc Quantitas est corporis totius centripetentia seu propensio in centrum, & (ut ita dicam) Pondus; & innotescit semper per vim ipsi contrariam & æqualem, qua descensus corporis impediri potest.

Hasce virium quantitates brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad Corpora, centrum petentia, ad corporum Loca, & ad Centrum virium: nimirum vim motricem ad Corpus, tanquam conatum & propensionem totius in centrum ex propensionibus omnium partium compositam; & vim acceleratricem ad Locum corporis, tanquam efficaciam quandam, de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora quæ in ipsis sunt; vim autem absolutam ad Centrum, tanquam causa aliqua præditum, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu; sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro

centro vis gravitantis) sive alia aliqua quæ non apparet. Mathematicus duntaxat est hic conceptus. Nam virium causas & sedes Physicas jam non expendo. DEFINITIONES.

Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiæ. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix seu vis gravitans in corporibus universis eadem est, gravitas motrix seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur ubi gravitas acceleratrix fit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum. Sic in regionibus ubi gravitas acceleratrix duplo minor est, pondus corporis duplo vel triplo minoris erit quadruplo vel sextuplo minus.

Porro attractiones & impulsus eodem sensu acceleratrices & motrices nomino. Voces autem Attractionis, Impulsus, vel Propensionis cujuscunque in centrum, indifferenter & pro se mutuo promiscue usurpo; has vires non physice sed mathematice tantum considerando. Unde caveat lector, ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta Mathematica) vires vere & physice tribuere; si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero.

Scholium.

Hactenus voces minus notas, quo sensu in sequentibus accipiendæ sint, explicare visum est. Nam Tempus, Spatium, Locum & Motum, ut omnibus notissima, non definio. Notandum tamen, quod vulgus quantitates hasce non aliter quam ex relatione ad sensibilia concipiat. Et inde oriuntur præjudicia quædam, quibus tollendis convenit easdem in absolutas & relativas, veras & apparentes, mathematicas & vulgares distingui.

I. Tempus Absolutum, verum, & mathematicum, in se & natura sua absque relatione ad externum quodvis, æquabiliter fluit, alioque nomine dicitur Duratio: Relativum, apparens, & vulgare est sensibilis & externa quævis Durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur; ut Hora, Dies, Mensis, Annus.

DEFINITIONES. II. Spatium Absolutum, natura sua absque relatione ad externum quodvis, semper manet similare & immobile: Relativum est spatii hujus mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur, & a vulgo pro spatio immobili usurpatur: uti dimensio spatii subterranei, aerei vel cœlestis definita per situm suum ad Terram. Idem sunt spatium absolutum & relativum, specie & magnitudine; sed non permanent idem semper numero. Nam si Terra, verbi gratia, movetur; spatium Aeris nostri, quod relative & respectu Terræ semper manet idem, nunc erit una pars spatii absoluti in quam Aer transit, nunc alia pars ejus; & sic absolute mutabitur perpetuo.

III. Locus est pars spatii quam corpus occupat, estque pro ratione spatii vel Absolutus vel Relativus. Pars, inquam, spatii; non Situs corporis, vel Superficies ambiens. Nam solidorum æqualium æquales semper sunt loci; Superficies autem ob dissimilitudinem figurarum ut plurimum inæquales sunt; Situs vero proprie loquendo quantitatem non habent, neque tam sunt loca quam affectiones locorum. Motus totius idem est cum summa motuum partium, hoc est, translatio totius de suo loco eadem est cum summa translationum partium de locis suis; adeoque locus totius idem cum summa locorum partium, & propterea internus & in corpore toto.

IV. Motus Absolutus est translatio corporis de loco absoluto in locum absolutum, Relativus de relativo in relativum. Sic in navi quæ velis passis fertur, relativus corporis Locus est navigii regio illa in qua corpus versatur, seu cavitatis totius pars illa quam corpus implet, quæque adeo movetur una cum navi: & Quies relativa est permansio corporis in eadem illa navis regione vel parte cavitatis. At quies vera est permansio corporis in eadem parte spatii illius immoti in qua navis ipsa una cum cavitate sua & contentis universis movetur. Unde si Terra vere quiescit, corpus quod relative quiescit in navi, movebitur vere & absolute ea cum velocitate qua navis movetur in Terra. Sin Terra etiam movetur; orietur verus & absolutus corporis motus, partim ex Terræ motu vero in spatio immoto, partim ex navis motu relativo in Terra: & si corpus etiam movetur relative in navi; orietur verus ejus motus, partim ex vero motu Terræ in spatio immoto, partim ex relativis motibus tum navis in Terra, tum corporis in navi; & ex his motibus relativis orietur corporis motus relativus in Terra. Ut si Terræ pars illa, ubi navis versatur, moveatur vere in orientem cum velocitate partium 10010; & velis ventoque feratur navis in occidentem cum velocitate partium decem; Nauta autem ambulet in navi orientem

tem versus cum velocitatis parte una: movebitur Nauta vere & absolute in spatio immoto cum velocitatis partibus 10001 in orientem, & relative in terra occidentem versus cum velocitatis partibus novem. DEFINITIONES.

Tempus Absolutum a relativo distinguitur in Astronomia per Æquationem temporis vulgi. Inæquales enim sunt dies Naturales, qui vulgo tanquam æquales pro mensura temporis habentur. Hanc inæqualitatem corrigunt Astronomi, ut ex veriore tempore mensurent motus cœlestes. Possibile est, ut nullus sit motus æquabilis quo Tempus accurate mensuretur. Accelerari & retardari possunt motus omnes, sed fluxus temporis absoluti mutari nequit. Eadem est duratio seu perseverantia existentiæ rerum; sive motus sint celeres, sive tardi, sive nulli: proinde hæc a mensuris suis sensibilibus merito distinguitur, & ex iisdem colligitur per Æquationem Astronomicam. Hujus autem æquationis in determinandis Phænomenis necessitas, tum per experimentum Horologii Oscillatorii, tum etiam per eclipses Satellitum Jovis evincitur.

Ut partium Temporis ordo est immutabilis, sic etiam ordo partium Spatii. Moveantur hæ de locis suis, & movebuntur (ut ita dicam) de seipsis. Nam tempora & spatia sunt sui ipsorum & rerum omnium quasi Loca. In Tempore quoad ordinem successionis; in Spatio quoad ordinem situs locantur universa. De illorum essentia est ut sint Loca: & loca primaria moveri absurdum est. Hæc sunt igitur absoluta Loca; & solæ translationes de his locis sunt absoluti Motus.

Verum quoniam hæ Spatii partes videri nequeunt, & ab invicem per sensus nostros distingui; earum vice adhibemus mensuras sensibiles. Ex positionibus enim & distantiis rerum a corpore aliquo, quod spectamus ut immobile, definimus loca universa: deinde etiam & omnes motus æstimamus cum respectu ad prædicta loca, quatenus corpora ab iisdem transferri concipimus. Sic vice locorum & motuum absolutorum relativis utimur, nec incommode in rebus humanis: in Philosophicis autem abstrahendum est a sensibus. Fieri etenim potest, ut nullum revera quiescat corpus, ad quod loca motusque referantur.

Distinguuntur autem Quies & Motus absoluti & relativi ab invicem per Proprietates suas & Causas & Effectus. Quietis proprietas est, quod corpora vere quiescentia quiescunt inter se. Ideoque cum possibile sit, ut corpus aliquod in regionibus Fixarum, aut longe ultra, quiescat absolute; sciri autem non possit ex situ corporum ad invicem in regionibus nostris, horumne aliquod ad longinquum

DEFINITIONIS. quum illud datam positionem servet necne; quies vera ex horum situ inter se definiri nequit.

Motus proprietas est, quod partes, quæ datas servant positiones ad tota, participant motus eorundem totorum. Nam Gyrantium partes omnes conantur recedere ab axe motus, & Progredientium impetus oritur ex conjuncto impetu partium singularum. Motis igitur corporibus ambientibus, moventur quæ in ambientibus relative quiescunt. Et propterea motus verus & absolutus definiri nequit per translationem e vicinia corporum, quæ tanquam quiescentia spectantur. Debent enim corpora externa non solum tanquam quiescentia spectari, sed etiam vere quiescere. Alioquin inclusa omnia, præter translationem e vicinia ambientium, participabunt etiam ambientium motus veros; & sublata illa translatione non vere quiescent, sed tanquam quiescentia solummodo spectabuntur. Sunt enim ambientia ad inclusa, ut totius pars exterior ad partem interiorem, vel ut cortex ad nucleum. Moto autem cortice, nucleus etiam, absque translatione de vicinia corticis, ceu pars totius movetur.

Præcedenti proprietati affinis est quod moto Loco movetur una Locatum: adeoque corpus, quod de loco moto movetur, participat etiam loci sui motum. Motus igitur omnes, qui de locis motis fiunt, sunt partes solummodo motuum integrorum & absolutorum: & motus omnis integer componitur ex motu corporis de loco suo primo, & motu loci hujus de loco suo, & sic deinceps; usque dum perveniatur ad locum immotum, ut in exemplo Nautæ supra memorato. Unde motus integri & absoluti non nisi per loca immota definiri possunt: & propterea hos ad loca immota, relativos ad mobilia supra retuli. Loca autem immota non sunt, nisi quæ omnia ab infinito in infinitum datas servant positiones ad invicem; atque adeo semper manent immota, spatiumque constituunt quod Immobile appello.

Causæ, quibus motus veri & relativi distinguuntur ab invicem, sunt Vires in corpora impressæ ad motum generandum. Motus verus nec generatur nec mutatur; nisi per vires in ipsum corpus motum impressas: at motus relativus generari & mutari potest absque viribus impressis in hoc corpus. Sufficit enim ut imprimantur in alia solum corpora ad quæ fit relatio, ut iis cedentibus mutetur relatio illa in qua hujus quies vel motus relativus consistit. Rursum motus verus a viribus in corpus motum impressis semper mutatur; at motus relativus ab his viribus non mutatur necessario. Nam si eædem vires in alia etiam corpora, ad quæ fit relatio, sic imprimantur

mantur ut situs relativus conservetur, conservabitur relatio in qua motus relativus consistit. Mutari igitur potest motus omnis relativus ubi verus conservatur, & conservari ubi verus mutatur; & propterea motus verus in ejusmodi relationibus minime consistit. DEFINITIONES.

Effectus quibus motus absoluti & relativi distinguuntur ab invicem, sunt vires recedendi ab axe motus circularis. Nam in motu circulari nude relativo hæ vires nullæ sunt, in vero autem & absoluto majores vel minores pro quantitate motus. Si pendeat situla a filo prælongo, agaturque perpetuo in orbem, donec filum a contorsione admodum rigescat, dein impleatur aqua, & una cum aqua quiescat; tum vi aliqua subitanea agatur motu contrario in orbem, & filo se relaxante, diutius perseveret in hoc motu; superficies aquæ sub initio plana erit, quemadmodum ante motum vasis: at postquam, vi in aquam paulatim impressâ, effecit vas, ut hæc quoque sensibiliter revolvi incipiat; recedet ipsa paulatim a medio, ascendetque ad latera vasis, figuram concavam induens, (ut ipse expertus sum) & incitatiore semper motu ascendet magis & magis, donec revolutiones in æqualibus cum vase temporibus peragendo, quiescat in eodem relative. Indicat hic ascensus conatum recedendi ab axe motus, & per talem conatum innotescit & mensuratur motus aquæ circularis verus & absolutus, motuique relativo hic omnino contrarius. Initio, ubi maximus erat aquæ motus relativus in vase, motus ille nullum excitabat conatum recedendi ab axe: aqua non petebat circumferentiam ascendendo ad latera vasis, sed plana manebat, & propterea motus illius circularis verus nondum inceperat. Postea vero, ubi aquæ motus relativus decrevit, ascensus ejus ad latera vasis indicabat conatum recedendi ab axe; atque hic conatus monstrabat motum illius circularem verum perpetuo crescentem, ac tandem maximum factum ubi aqua quiescebat in vase relative. Igitur conatus iste non pendet a translatione aquæ respectu corporum ambientium, & propterea motus circularis verus per tales translationes definiri nequit. Unicus est corporis cujusque revolventis motus vere circularis, conatui unico tanquam proprio & adæquato effectui respondens: motus autem relativi pro variis relationibus ad externa innumeri sunt; & relationum instar, effectibus veris omnino destituuntur, nisi quatenus verum illum & unicum motum participant. Unde & in Systemate eorum qui Cœlos nostros infra Cœlos Fixarum in orbem revolvi volunt, & Planetas secum deferre; singulæ Cœlorum partes, & Planetæ qui relative quidem in Cœlis suis proximis quiescunt, moven-

DEFINITIONES. tur vere. Mutant enim positiones suas ad invicem (secus quam fit in vere quiescentibus) unaque cum cœlis delati participant eorum motus, & ut partes revolventium totorum, ab eorum axibus recedere conantur.

Igitur quantitates relativæ non sunt eæ ipsæ quantitates, quarum nomina præ se ferunt, sed earum mensuræ illæ sensibiles (veræ an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendæ sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci & Motus proprie intelligendæ erunt hæ mensuræ; & sermo erit insolens & pure Mathematicus, si quantitates mensuratæ hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin & Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus & vulgaribus mensuris confundunt.

Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere, & ab apparentibus actu discriminare, difficillimum est: propterea quod partes spatii illius immobilis, in quo corpora vere moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata. Nam suppetunt argumenta, partim ex motibus apparentibus qui sunt motuum verorum differentiæ, partim ex viribus quæ sunt motuum verorum causæ & effectus. Ut si globi duo, ad datam ab invicem distantiam filo intercedente connexi, revolverentur circa commune gravitatis centrum; innotesceret ex tensione fili conatus globorum recedendi ab axe motus, & inde quantitas motus circularis computari posset. Deinde si vires quælibet æquales in alternas globorum facies ad motum circularem augendum vel minuendum simul imprimerentur, innotesceret ex aucta vel diminuta fili tensione augmentum vel decrementum motus, & inde tandem inveniri possent facies globorum in quas vires imprimi deberent, ut motus maxime augeretur; id est, facies posticæ, sive quæ in motu circulari sequuntur. Cognitis autem faciebus quæ sequuntur, & faciebus oppositis quæ præcedunt, cognosceretur determinatio motus. In hunc modum inveniri posset & quantitas & determinatio motus hujus circularis in vacuo quovis immenso, ubi nihil extaret externum & sensibile quocum globi conferri possent. Si jam constituerentur in spatio illo corpora aliqua longinqua datam inter se positionem servantia, qualia sunt Stellæ Fixæ in regionibus nostris: sciri quidem non posset ex relativa globorum translatione inter corpora, utrum his an illis tribuendus esset motus. At si atten-

attenderetur ad filum, & deprenderetur tenſionem ejus illam ipſam eſſe quam motus globorum requireret; concludere liceret motum eſſe globorum, & corpora quieſcere; & tum demum ex tranſlatione globorum inter corpora, determinationem hujus motus colligere. Motus autem veros ex eorum cauſis, effectibus, & apparentibus differentiis colligere; & contra ex motibus ſeu veris ſeu apparentibus eorum cauſas & effectus, docebitur fuſius in ſequentibus. Hunc enim in finem Tractatum ſequentem compoſui. DEFINITIONES.

AXIOMATA, SIVE

AXIOMATA,
SIVE
LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

PRojectilia perseverant in motibus suis, nisi quatenus a resistentia aeris retardantur, & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

LEX II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

LEX

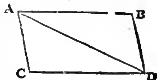
LEX III.

Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Si quis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi alligatum trahit, retrahetur etiam & equus (ut ita dicam) æqualiter in lapidem: nam funis utrinque distentus eodem relaxandi se conatu urgebit equum versus lapidem, ac lapidem versus equum; tantumque impediet progressum unius quantum promovet progressum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi sua quomodocunque mutaverit, idem quoque vicissim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem pressionis mutuæ) subibit. His actionibus æquales fiunt mutationes, non velocitatum, sed motuum; scilicet in corporibus non aliunde impeditis. Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, sunt corporibus reciproce proportionales. Obtinet etiam hæc Lex in Attractionibus, ut in Scholio proximo probabitur.

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.



Si corpus dato tempore, vi sola *M* in loco *A* impressa, ferretur uniformi cum motu ab *A* ad *B*; & vi sola *N* in eodem loco impressa, ferretur ab *A* ad *C*: compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraque feretur id eodem tempore in diagonali ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit secundum lineam *AC* ipsi *BD* parallelam, hæc vis per Legem II nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD*, sive vis *N* imprimatur, sive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriusque lineæ concursu *D* reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ab *A* ad *D* per Legem I.

 COROL-

AXIOMATA, SIVE

COROLLARIUM II.

Et hinc patet compositio vis directæ AD *ex viribus quibusvis obliquis* AB *&* BD, *& vicissim resolutio vis cujusvis directæ* AD *in obliquas quascunque* AB *&* BD. *Quæ quidem compositio & resolutio abunde confirmatur ex Mechanica.*

Ut si de rotæ alicujus centro *O* exeuntes radii inæquales *O M*, *O N* filis *M A*, *N P* sustineant pondera *A* & *P*, & quærantur vires ponderum ad movendam rotam: Per centrum *O* agatur recta *K O L* filis perpendiculariter occurrens in *K* & *L*, centroque *O* & intervallorum *O K*, *O L* majore *O L* describatur circulus occurrens filo *M A* in *D*: & actæ rectæ *O D* parallela sit *A C*, & perpendicularis *D C*. Quoniam nihil refert, utrum filorum puncta, *K*, *L*, *D* affixa sint an non affixa ad planum rotæ: pondera idem valebunt, ac si suspenderentur a punctis *K* & *L* vel *D* & *L*. Ponderis autem *A* exponatur vis tota per lineam *A D*, & hæc resolvetur in vires *A C*, *C D*, quarum *A C* trahendo radium *O D* directe a centro nihil valet ad movendam rotam; vis autem altera *D C*, trahendo radium *D O* perpendiculariter, idem valet ac si perpendiculariter traheret radium *O L* ipsi *O D* æqualem; hoc est, idem atque pondus *P*, si modo pondus illud sit ad pondus *A* ut vis *D C* ad vim *D A*, id est (ob similia triangula *A D C*, *D O K*,) ut *O K* ad *O D* seu *O L*. Pondera igitur *A* & *P*, quæ sunt reciproce ut radii in directum positi *O K* & *O L*, idem pollebunt, & sic consistent in æquilibrio: quæ est proprietas notissima Libræ, Vectis, & Axis in Peritrochio. Sin pondus alterutrum sit majus quam in hac ratione, erit vis ejus ad movendam rotam tanto major.

M H N K O L D G Q p C A P

Quod si pondus *p* ponderi *P* æquale partim suspendatur filo *N p*; partim incumbat plano obliquo *p G*: agantur *p H*, *N H*, prior horizonti, posterior plano *p G* perpendicularis; & si vis ponderis *p* deorsum tendens, exponatur per lineam *p H*, resolvi potest hæc in vires *p N*, *H N*. Si filo *p N* perpendiculare esset planum aliquod *p Q*, secans planum alterum *p G* in linea ad horizontem parallela; & pondus *p* his planis *p Q*, *p G* solummodo incumberet; urgeret

geret illud hæc plana viribus pN, HN perpendiculariter, nimirum planum pQ vi pN, & planum pG vi HN. Ideoque si tollatur planum pQ, ut pondus tendat filum; quoniam filum sustinendo pondus jam vicem præstat plani sublati, tendetur illud eadem vi pN, qua planum antea urgebatur. Unde tensio fili hujus obliqui erit ad tensionem fili alterius perpendicularis PN, ut pN ad pH. Ideoque si pondus p sit ad pondus A in ratione quæ componitur ex ratione reciproca minimarum distantiarum filorum suorum pN, AM a centro rotæ, & ratione directa pH ad pN; pondera idem valebunt ad rotam movendam, atque adeo se mutuo sustinebunt, ut quilibet experiri potest. LEGES MOTUS.

Pondus autem p, planis illis duobus obliquis incumbens, rationem habet cunei inter corporis fissi facies internas: & inde vires cunei & mallei innotescunt: utpote cum vis qua pondus p urget planum pQ sit ad vim, qua idem vel gravitate sua vel ictu mallei impellitur secundum lineam pH in plana, ut pN ad pH; atque ad vim, qua urget planum alterum pG, ut pN ad NH. Sed & vis Cochleæ per similem virium divisionem colligitur; quippe quæ cuneus est a vecte impulsus. Usus igitur Corollarii hujus latissime patet, & late patendo veritatem suam evincit; cum pendeat ex jam dictis Mechanica tota ab Auctoribus diversimode demonstrata. Ex hisce enim facile derivantur vires Machinarum, quæ ex Rotis, Tympanis, Trochleis, Vectibus, nervis tensis & ponderibus directe vel oblique ascendentibus, cæterisque potentiis Mechanicis componi solent, ut & vires Tendinum ad animalium ossa movenda.

COROLLARIUM III.

Quantitas motus quæ colligitur capiendo summam motuum factorum ad eandem partem, & differentiam factorum ad contrarias; non mutatur ab actione corporum inter se.

Etenim actio eique contraria reactio æquales sunt per Legem III, adeoque per Legem II æquales in motibus efficiunt mutationes versus contrarias partes. Ergo si motus fiunt ad eandem partem; quicquid additur motui corporis fugientis, subducetur motui corporis insequentis sic, ut summa maneat eadem quæ prius. Sin corpora obviam eant; æqualis erit subductio de motu utriusque, adeoque differentia motuum factorum in contrarias partes manebit eadem.

Ut si corpus sphæricum A sit triplo majus corpore sphærico B, habeatque duas velocitatis partes; & B sequatur in eadem recta cum velocitatis

AXIOMATA, SIVE locitatis partibus decem, adeoque motus ipsius *A* sit ad motum ipsius *B*, ut sex ad decem: ponantur motus illis esse partium sex & partium decem, & summa erit partium sexdecim. In corporum igitur concursu, si corpus *A* lucretur motus partes tres vel quatuor vel quinque, corpus *B* amittet partes totidem adeoque perget corpus *A* post reflexionem cum partibus novem vel decem vel undecim, & *B* cum partibus septem vel sex vel quinque, existente semper summa partium sexdecim ut prius. Si corpus *A* lucretur partes novem vel decem vel undecim vel duodecim, adeoque progrediatur post concursum cum partibus quindecim vel sexdecim vel septendecim vel octodecim, corpus *B*, amittendo tot partes quot *A* lucratur, vel cum una parte progredietur amissis partibus novem, vel quiescet amisso motu suo progressivo partium decem, vel cum una parte regredietur amisso motu suo & (ut ita dicam) una parte amplius, vel regredietur cum partibus duabus ob detractum motum progressivum partium duodecim. Atque ita summæ motuum conspirantium $15 + 1$ vel $16 + 0$, & differentiæ contrariorum $17 - 1$ & $18 - 2$ semper erunt partium sexdecim, ut ante concursum & reflexionem. Cognitis autem motibus quibuscum corpora post reflexionem pergent, invenietur cujusque velocitas, ponendo eam esse ad velocitatem ante reflexionem, ut motus post est ad motum ante. Ut in casu ultimo, ubi corporis *A* motus erat partium sex ante reflexionem & partium octodecim postea, & velocitas partium duarum ante reflexionem; invenietur ejus velocitas partium sex post reflexionem, dicendo, ut motus partes sex ante reflexionem ad motus partes octodecim postea, ita velocitatis partes duæ ante reflexionem ad velocitatis partes sex postea.

Quod si corpora vel non Sphærica vel diversis in rectis moventia incidant in se mutuo oblique, & requirantur eorum motus post reflexionem; cognoscendus est situs plani a quo corpora concurrentia tanguntur in puncto concursus: dein corporis utriusque motus (per Corol. II.) distinguendus est in duos, unum huic plano perpendicularem, alterum eidem parallelum: motus autem paralleli, propterea quod corpora agant in se invicem secundum lineam huic plano perpendicularem, retinendi sunt iidem post reflexionem atque antea; & motibus perpendicularibus mutationes æquales in partes contrarias tribuendæ sunt sic, ut summa conspirantium & differentia contrariorum maneat eadem quæ prius. Ex hujusmodi reflexionibus oriri etiam solent motus circulares corporum circa centra propria. Sed hos casus in sequentibus non considero, & nimis longum esset omnia huc spectantia demonstrare.

COROL-

COROLLARIUM IV.

Commune gravitatis Centrum, corporum duorum vel plurium, ab actionibus corporum inter se non mutat statum suum vel motus vel quietis; & propterea corporum omnium in se mutuo agentium (exclusis actionibus & impedimentis externis) commune Centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Nam si puncta duo progrediantur uniformi cum motu in lineis rectis, & distantia eorum dividatur in ratione data, punctum dividens vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta. Hoc postea in Lemmate XXIII demonstratur, si punctorum motus fiant in eodem plano; & eadem ratione demonstrari potest, si motus illi non fiant in eodem plano. Ergo si corpora quotcunque moventur uniformiter in lineis rectis, commune centrum gravitatis duorum quorumvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod linea, horum corporum centra in rectis uniformiter progredientia jungens, dividitur ab hoc centro communi in ratione data. Similiter & commune centrum horum duorum & tertii cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia centri communis corporum duorum & centri corporis tertii in data ratione. Eodem modo & commune centrum horum trium & quarti cujusvis vel quiescit vel progreditur uniformiter in linea recta; propterea quod ab eo dividitur distantia inter centrum commune trium & centrum quarti in data ratione, & sic in infinitum. Igitur in systemate corporum quæ actionibus in se invicem aliisque omnibus in se extrinsecus impressis omnino vacant, adeoque moventur singula uniformiter in rectis singulis, commune omnium centrum gravitatis vel quiescit vel movetur uniformiter in directum.

Porro in systemate duorum corporum in se invicem agentium, cum distantiæ centrorum utriusque a communi gravitatis centro sint reciproce ut corpora; erunt motus relativi corporum eorundem, vel accedendi ad centrum illud vel ab eodem recedendi, æquales inter se. Proinde centrum illud a motuum æqualibus mutationibus in partes contrarias factis, atque adeo ab actionibus horum corporum inter se, nec promovetur nec retardatur nec mutationem patitur in statu suo quoad motum vel quietem. In systemate autem corporum plurium, quoniam duorum quorumvis in se mutuo agentium commune gravitatis centrum ob actionem illam nullatenus

 mutat ſtatum ſuum; & reliquorum, quibuſcum actio illa non intercedit, commune gravitatis centrum nihil inde patitur; diſtantia autem horum duorum centrorum dividitur a communi corporum omnium centro in partes ſummis totalibus corporum quorum ſunt centra reciproce proportionales, adeoque centris illis duobus ſtatum ſuum movendi vel quieſcendi ſervantibus, commune omnium centrum ſervat etiam ſtatum ſuum: manifeſtum eſt quod commune illud omnium centrum ob actiones binorum corporum inter ſe nunquam mutat ſtatum ſuum quoad motum & quietem. In tali autem ſyſtemate actiones omnes corporum inter ſe vel inter bina ſunt corpora, vel ab actionibus inter bina compoſitæ; & propterea communi omnium centro mutationem in ſtatu motus ejus vel quietis nunquam inducunt. Quare cum centrum illud ubi corpora non agunt in ſe invicem, vel quieſcit, vel in recta aliqua progreditur uniformiter; perget idem non obſtantibus corporum actionibus inter ſe, vel ſemper quieſcere, vel ſemper progredi uniformiter in directum; niſi a viribus in ſyſtema extrinſecus impreſſis deturbetur de hoc ſtatu. Eſt igitur ſyſtematis corporum plurium Lex eadem quæ corporis ſolitarii, quoad perſeverantiam in ſtatu motus vel quietis. Motus enim progreſſivus ſeu corporis ſolitarii ſeu ſyſtematis corporum ex motu centri gravitatis æſtimari ſemper debet.

COROLLARIUM V.

Corporum dato ſpatio incluſorum iidem ſunt motus inter ſe, ſive ſpatium illud quieſcat, ſive moveatur idem uniformiter in directum abſque motu circulari.

Nam differentiæ motuum tendentium ad eandem partem, & ſummæ tendentium ad contrarias, eædem ſunt ſub initio in utroque caſu (ex hypotheſi) & ex his ſummis vel differentiis oriuntur congreſſus & impetus quibus corpora ſe mutuo feriunt. Ergo per Legem II. æquales erunt congreſſuum effectus in utroque caſu; & propterea manebunt motus inter ſe in uno caſu æquales motibus inter ſe in altero. Idem comprobatur experimento luculento. Motus omnes eodem modo ſe habent in Navi, ſive ea quieſcat, ſive moveatur uniformiter in directum.

COROLLARIUM VI.

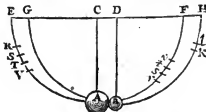
Si corpora moveantur quomodocunque inter ſe, & a viribus acceleratricibus æqualibus ſecundum lineas parallelas urgeantur; pergent omnia eodem modo moveri inter ſe, ac ſi viribus illis non eſſent incitata.

Nam vires illæ æqualiter (pro quantitatibus movendorum corporum)

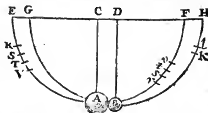
rum) & secundum lineas parallelas agendo, corpora omnia æqualiter (quoad velocitatem) movebunt per Legem II. adeoque nunquam mutabunt positiones & motus eorum inter se. LEGES MOTUS.

Scholium.

Hactenus principia tradidi a Mathematicis recepta & experientia multiplici confirmata. Per Leges duas primas & Corollaria duo prima *Galilæus* invenit descensum Gravium esse in duplicata ratione temporis, & motum Projectilium fieri in Parabola; conspirante experientia, nisi quatenus motus illi per aeris resistentiam aliquantulum retardantur. Ab iisdem Legibus & Corollariis pendent demonstrata de temporibus oscillantium Pendulorum, suffragante Horologiorum experientia quotidiana. Ex his iisdem & Lege tertia *Christophorus Wrennus* Eques Auratus, *Johannes Wallisius S. T. D.* & *Christianus Hugenius*, hujus ætatis Geometrarum facile principes, regulas congressuum & reflexionum duorum corporum seorsim invenerunt, & eodem fere tempore cum *Societate Regia* communicarunt, inter se (quoad has leges) omnino conspirantes: & primus quidem *Wallisius*, deinde *Wrennus* & *Hugenius* inventum prodiderunt. Sed & veritas comprobata est a *Wrenno* coram *Regia Societate* per experimentum Pendulorum: quod etiam *Clarissimus Mariottus* libro integro exponere mox dignatus est. Verum, ut hoc experimentum cum Theoriis ad amussim congruat, habenda est ratio cum resistentiæ aeris, tum etiam vis Elasticæ concurrentium corporum. Pendeant corpora A, B filis parallelis & æqualibus AC, BD, a centris C, D. His centris & intervallis describantur semicirculi EAF, GBH radiis CA, DB. bisecti. Trahatur corpus A ad arcus EAF punctum quodvis R, & (subducto corpore B) demittatur inde, redeatque post unam oscillationem ad punctum V. Est RV retardatio ex resistentia aeris. Hujus RV fiat ST pars quarta sita in medio, ita scilicet ut RS & TV æquentur, sitque RS ad ST ut 3 ad 2. Et ista ST exhibebit retardationem in descensu ab S ad A quam proxime. Restituatur corpus B in locum suum. Cadat corpus A de puncto S, & velocitas ejus in loco reflexionis A, absque errore sensibili, tanta erit ac



AXIOMATA, SIVE si in vacuo cecidisset de loco *T*. Exponatur igitur hæc velocitas per chordam arcus *T A*. Nam velocitatem Penduli in puncto infimo esse ut chordam arcus quem cadendo descripsit, Propositio est Geometris notissima. Post reflexionem perveniat corpus *A* ad locum *s*, & corpus *B* ad locum *k*. Tollatur corpus *B* & inveniatur locus *v*; a quo si corpus *A* demittatur & post unam oscillationem redeat ad locum *r*, sit *s t* pars quarta ipsius *r v* sita in medio, ita videlicet ut *r s* & *t u* æquentur; & per chordam arcus *t A* exponatur velocitas quam corpus *A* proxime post reflexionem habuit in loco *A*. Nam *t* erit locus ille verus & correctus, ad quem corpus *A*, sublata aeris resistentia, ascendere debuisset. Simili methodo corrigendus erit locus *k*, ad quem corpus *B* ascendit, & inveniendus locus *l*, ad quem corpus illud ascendere debuisset in vacuo. Hoc pacto experiri licet omnia perinde ac si in vacuo constituti essemus. Tandem ducendum erit corpus *A* in chordam arcus *T A* (quæ velocitatem ejus exhibet) ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime ante reflexionem; deinde in chordam arcus *t A*; ut habeatur motus ejus in loco *A* proxime post reflexionem. Et sic corpus *B* ducendum erit in chordam arcus *B l*, ut habeatur motus ejus proxime post reflexionem. Et simili methodo, ubi corpora duo simul demittuntur de locis diversis, inveniendi sunt motus utriusque tam ante, quam post reflexionem; & tum demum conferendi sunt motus inter se & colligendi effectus reflexionis. Hoc modo in Pendulis pedum decem rem tentando, idque in corporibus tam inæqualibus quam æqualibus, & faciendo ut corpora de intervallis amplissimis, puta pedum octo vel duodecim vel sexdecim, concurrerent; reperi semper sine errore trium digitorum in mensuris, ubi corpora sibi mutuo directe occurrebant, quod æquales erant mutationes motuum corporibus in partes contrarias illatæ, atque adeo quod actio & reactio semper erant æquales. Ut si corpus *A* incidebat in corpus *B* cum novem partibus motus, & amissis septem partibus pergebat post reflexionem cum duabus; corpus *B* resiliebat cum partibus illis septem. Si corpora obviam ibant *A* cum duodecim partibus & *B* cum sex, & redibat *A* cum duabus; redibat *B* cum octo, facta detractione partium quatuordecim utrinque. De motu ipsius *A* subducantur partes duodecim, & restabit nihil:

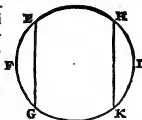


nihil: ſubducantur aliæ partes duæ, & fiet motus duarum partium in plagam contrariam: & ſic de motu corporis *B* partium ſex ſubducendo partes quatuordecim, fient partes octo in plagam contrariam. Quod ſi corpora ibant ad eandem plagam, *A* velocius cum partibus quatuordecim, & *B* tardius cum partibus quinque, & poſt reflexionem pergebat *A* cum quinque partibus; pergebat *B* cum quatuordecim, facta tranſlatione partium novem de *A* in *B*. Et ſic in reliquis. A congreſſu & colliſione corporum nunquam mutabatur quantitas motus, quæ ex ſumma motuum conſpirantium & differentia contrariorum colligebatur. Nam errorem digiti unius & alterius in menſuris tribuerim difficultati peragendi ſingula ſatis accurate. Difficile erat, tum pendula ſimul demittere ſic, ut corpora in ſe mutuo impingerent in loco infimo *AB*; tum loca, *s*, *k* notare, ad quæ corpora aſcendebant poſt concurſum. Sed & in ipſis pilis inæqualis partium denſitas, & textura aliis de cauſis irregularis, errores inducebant.

Porro nequis objiciat Regulam, ad quam probandam inventum eſt hoc experimentum, præſupponere corpora vel abſolute dura eſſe, vel ſaltem perfecte elaſtica, cujuſmodi nulla reperiuntur in compoſitionibus naturalibus; addo quod Experimenta jam deſcripta ſuccedunt in corporibus mollibus æque ac in duris, nimirum a conditione duritiei neutiquam pendentia. Nam ſi Regula illa in corporibus non perfecte duris tentanda eſt, debebit ſolummodo reflexio minui in certa proportione pro quantitate vis Elaſticæ. In Theoria *Wrenni* & *Hugenii* corpora abſolute dura redeunt ab invicem cum velocitate congreſſus. Certius id affirmabitur de perfecte Elaſticis. In imperfecte Elaſticis velocitas reditus minuenda eſt ſimul cum vi Elaſtica; propterea quod vis illa, (niſi ubi partes corporum ex congreſſu læduntur, vel extenſionem aliqualem quaſi ſub malleo patiuntur,) certa ac determinata ſit (quantum ſentio) faciatque corpora redire ab invicem cum velocitate relativa, quæ ſit ad relativam velocitatem concurſus in data ratione. Id in pilis ex lana arcte conglomerata & fortiter conſtricta ſic tentavi. Primum demittendo Pendula & menſurando reflexionem, inveni quantitatem vis Elaſticæ; deinde per hanc vim determinavi reflexiones in aliis caſibus concurſuum, & reſpondebant Experimenta. Redibant ſemper pilæ ab invicem cum velocitate relativa, quæ eſſet ad velocitatem relativam concurſus ut 5 ad 9 circiter. Eadem fere cum velocitate redibant pilæ ex chalybe: aliæ ex ſubere cum paulo minore: in vitreis autem proportio erat 15 ad 16 circiter. Atque hoc pacto Lex tertia quoad ictus & reflexiones per Theoriam comprobata eſt, quæ cum experientia plane congruit.

In Attractionibus rem ſic breviter oſtendo. Corporibus duobus quibuſvis *A*, *B* ſe mutuo trahentibus, concipe obſtaculum quodvis interponi quo congreſſus eorum impediatur. Si corpus alterutrum *A* magis trahitur verſus corpus alterum *B*, quam illud alterum *B* in prius *A*, obſtaculum magis urgebitur preſſione corporis *A* quam preſſione corporis *B*; proindeque non manebit in æquilibrio. Prævalebit preſſio fortior, facietque ut ſyſtema corporum duorum & obſtaculi moveatur in directum in partes verſus *B*, motuque in ſpatiis liberis ſemper accelerato abeat in infinitum. Quod eſt abſurdum & Legi primæ contrarium. Nam per Legem primam debebit ſyſtema perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, proindeque corpora æqualiter urgebunt obſtaculum, & idcirco æqualiter trahentur in invicem. Tentavi hoc in Magnete & Ferro. Si hæc in vaſculis propriis ſeſe contingentibus ſeorſim poſita, in aqua ſtagnante juxta fluitent; neutrum propellet alterum, ſed æqualitate attractionis utrinque ſuſtinebunt conatus in ſe mutuos, ac tandem in æquilibrio conſtituta quieſcent.

Sic etiam gravitas inter Terram & ejus partes, mutua eſt. Secetur Terra *FI* plano quovis *EG* in partes duas *EGF* & *EGI*; & æqualia erunt harum pondera in ſe mutuo. Nam ſi plano alio *HK* quod priori *EG* parallelum ſit, pars major *EGI* ſecetur in partes duas *EGKH* & *HKI*, quarum *HKI* æqualis ſit parti prius abſciſſæ *EFG*: manifeſtum eſt quod pars media *EGKH* pondere proprio in neutram partium extremarum propendebit, ſed inter utramque in æ quilibrio, ut ita dicam, ſuſpendetur, & quieſcet. Pars autem extrema *HKI* toto ſuo pondere incumbet in partem mediam, & urgebit illam in partem alteram extremam *EGF*; ideoque vis qua partium *HKI* & *EGKH* ſumma *EGI* tendit verſus partem tertiam *EGF*, æqualis eſt ponderi partis *HKI*, id eſt ponderi partis tertiæ *EGF*. Et propterea pondera partium duarum *EGI*, *EGF* in ſe mutuo ſunt æqualia, uti volui oſtendere. Et niſi pondera illa æqualia eſſent, Terra tota in libero æthere fluitans ponderi majori cederet, & ab eo fugiendo abiret in infinitum.



Ut corpora in concurſu & reflexione idem pollent, quorum velocitates ſunt reciproce ut vires inſitæ: ſic in movendis Inſtrumentis mechanicis agentia idem pollent & conatibus contrariis ſe mutuo ſuſtinent, quorum velocitates ſecundum determinationem

virium

virium æstimatæ, sunt reciproce ut vires. Sic pondera æquipollent ad movenda brachia Libræ, quæ oscillante Libra sunt reciproce ut eorum velocitates sursum & deorsum: hoc est pondera, si recta ascendunt & descendunt, æquipollent, quæ sunt reciproce ut punctorum a quibus suspenduntur distantiæ ab axe Libræ; sin planis obliquis aliisve admotis obstaculis impedita ascendunt vel descendunt oblique, æquipollent quæ sunt reciproce ut ascensus & descensus, quatenus facti secundum perpendiculum: id adeo ob determinationem gravitatis deorsum. Similiter in Trochlea seu Polyspasto vis manus funem directe trahentis, quæ sit ad pondus vel directe vel oblique ascendens ut velocitas ascensus perpendicularis ad velocitatem manus funem trahentis, sustinebit pondus. In Horologiis & similibus instrumentis, quæ ex rotulis commissis constructa sunt, vires contrariæ ad motum rotularum promovendum & impediendum, si sint reciproce ut velocitates partium rotularum in quas imprimuntur, sustinebunt se mutuo. Vis Cochleæ ad premendum corpus est ad vim manus manubrium circumagentis, ut circularis velocitas manubrii ea in parte ubi a manu urgetur, ad velocitatem progressivam cochleæ versus corpus pressum. Vires quibus Cuneus urget partes duas ligni fissi sunt ad vim mallei in cuneum, ut progressus cunei secundum determinationem vis a malleo in ipsum impressæ, ad velocitatem qua partes ligni cedunt cuneo, secundum lineas faciebus cunei perpendiculares. Et par est ratio Machinarum omnium.

Harum efficacia & usus in eo solo consistit, ut diminuendo velocitatem augeamus vim, & contra: unde solvitur in omni aptorum instrumentorum genere Problema, *Datum pondus data vi movendi*, aliamve datam resistentiam vi data superandi. Nam si Machinæ ita formentur, ut velocitates Agentis & Resistentis sint reciproce ut vires; Agens resistentiam sustinebit: & majori cum velocitatum disparitate eandem vincet. Certe si tanta sit velocitatum disparitas, ut vincatur etiam resistentia omnis, quæ tam ex contiguorum & inter se labentium corporum attritione, quam ex continuorum & ab invicem separandorum cohæsione & elevandorum ponderibus oriri solet; superata omni ea resistentia, vis redundans accelerationem motus sibi proportionalem, partim in partibus machinæ, partim in corpore resistente producet. Ceterum Mechanicam tractare non est hujus instituti. Hisce volui tantum ostendere, quam late pateat quamque certa sit Lex tertia Motus. Nam si æstimetur Agentis actio ex ejus vi & veloci-

tate

tate conjunctim; & ſimiliter Reſiſtentis reactio æſtimetur conjunctim ex ejus partium ſingularum velocitatibus & viribus reſiſtendi ab earum attritione, cohæſione, pondere, & acceleratione oriundis; erunt actio & reactio, in omni inſtrumentorum uſu, ſibi invicem ſemper æquales. Et quatenus actio propagatur per inſtrumentum & ultimo imprimitur in corpus omne reſiſtens, ejus ultima determinatio determinationi reactionis ſemper erit contraria.

DE MOTU CORPORUM LIBER PRIMUS.

SECTIO I.

De Methodo Rationum primarum & ultimarum, cujus ope ſequentia demonſtrantur.

LEMMA I.

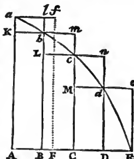
Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem tempore quovis finito conſtanter tendunt, & ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo æquales.

Si negas; fiant ultimo inæquales, & ſit earum ultima differentia D. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia D: contra hypotheſin.

LEMMA

LEMMA II.

Si in Figura quavis AacE, *rectis* Aa, AE *&* *curva* acE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunque* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *Figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem Figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*



Nam Figuræ inscriptæ & circumscriptæ differentia est summa parallelogrammorum *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, hoc est (ob æquales omnium bases) rectangulum sub unius basi *Kb* & altitudinum summa *Aa*, id est, rectangulum *ABla*. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus *AB* in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo (per Lemma 1.) Figura inscripta & circumscripta & multo magis Figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Eædem rationes ultimæ sunt etiam rationes æqualitatis, ubi parallelogrammorum latitudines &c. AB, BC, CD, *sunt inæquales, & omnes minuuntur in infinitum.*

Sit enim *AF* æqualis latitudini maximæ, & compleatur parallelogrammum *FAaf*. Hoc erit majus quam differentia Figuræ inscriptæ & Figuræ circumscriptæ; at latitudine sua *AF* in infinitum diminuta, minus fiet quam datum quodvis rectangulum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc summa ultima parallelogrammorum evanescentium coincidit omni ex parte cum Figura curvilinea.

Corol. 2. Et multo magis Figura rectilinea, quæ chordis evanescentium

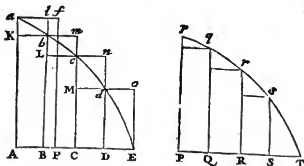
 centium arcuum *ab*, *bc*, *cd*, *&c.* comprehenditur, coincidit ultimo cum Figura curvilinea.

Corol. 3. Ut & Figura rectilinea circumscripta quæ tangentibus eorundem arcuum comprehenditur.

Corol. 4. Et propterea hæ Figuræ ultimæ (quoad perimetros *acE*,) non sunt rectilineæ, sed rectilinearum limites curvilinei.

LEMMA IV.

Si in duabus Figuris AacE, PprT, *inscribantur (ut supra) duæ parallelogrammorum series, sitque idem amborum numerus, & ubi latitudines in infinitum diminuuntur, rationes ultimæ parallelogrammorum in una Figura ad parallelogramma in altera, singulorum ad singula, sint eædem; dico quod Figuræ duæ* AacE, PprT, *sunt ad invicem in eadem illa ratione.*



Etenim ut sunt parallelogramma singula ad singula, ita (componendo) fit summa omnium ad summam omnium, & ita Figura ad Figuram; existente nimirum Figura priore (per Lemma III) ad summam priorem, & Figura posteriore ad summam posteriorem in ratione æqualitatis. *Q. E. D.*

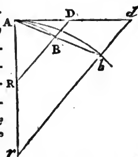
Corol. Hinc si duæ cujuscunque generis quantitates in eundem partium numerum utcunque dividantur; & partes illæ, ubi numerus earum augetur & magnitudo diminuitur in infinitum, datam obtineant rationem ad invicem, prima ad primam, secunda ad secundam, cæteræque suo ordine ad cæteras: erunt tota ad invicem in eadem illa data ratione. Nam si in Lemmatis hujus Figuris sumantur parallelo-

rallelogramma inter se ut partes, summæ partium semper erunt ut summæ parallelogrammorum; atque adeo, ubi partium & parallelogrammorum numerus augetur & magnitudo diminuitur in infinitum in ultima ratione parallelogrammi ad parallelogrammum, id est (per hypothesin) in ultima ratione partis ad partem.

LEMMA V.

Similium Figurarum latera omnia, quæ sibi mutuo respondent, sunt proportionalia, tam curvilinea quam rectilinea; & areæ sunt in duplicata ratione laterum.

LEMMA VI.



Si arcus quilibet positione datus AB *subtendatur chorda* AB, *& in puncto aliquo* A, *in medio curvaturæ continuæ, tangatur a recta utrinque producta* AD; *dein puncta* A, B *ad invicem accedant & coëant; dico quod angulus* BAD, *sub chorda & tangente contentus, minuetur in infinitum & ultimo evanescet.*

Nam si angulus ille non evanescit, continebit arcus *AB* cum tangente *AD* angulum rectilineo æqualem, & propterea curvatura ad punctum *A* non erit continua, contra hypothesin.

LEMMA VII.

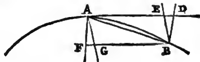
Iisdem positis; dico quod ultima ratio arcus, chordæ, & tangentis ad invicem est ratio æqualitatis.

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *A* & *AD* ad puncta longinqua *b* ac *d* produci, & secanti *BD* parallela agatur *bd*. Sitque arcus *Ab* semper similis arcui *AB*. Et punctis *A*, *B* coeuntibus, angulus *dAb*, per Lemma superius, evanescet; adeoque rectæ semper finitæ *Ab*, *Ad* & arcus intermedius *Ab* coincident, & propterea æquales erunt. Unde & hisce semper proportionales rectæ *AB*, *AD*, & arcus intermedius *AB*

D 2 eva-

evanescent, & rationem ultimam habebunt æqualitatis. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si per *B* ducatur tangenti parallela *BF*, rectam quamvis *AF* per *A* transeuntem perpetuo secans in *F*, hæc *BF* ultimo ad arcum evanescentem *AB* rationem habebit æqualitatis, eo quod completo parallelogrammo *AFBD* rationem semper habet æqualitatis ad *AD*.



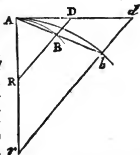
Corol. 2. Et si per *B* & *A* ducantur plures rectæ *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, secantes tangentem *AD* & ipsius parallelam *BF*; ratio ultima abscissarum omnium *AD*, *AE*, *BF*, *BG*, chordæque & arcus *AB* ad invicem erit ratio æqualitatis.

Corol. 3. Et propterea hæ omnes lineæ, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA VIII.

Si rectæ datæ AR, BR *cum arcu* AB, *chorda* AB *&* *tangente* AD, *triangula tria* ARB, ARB, ARD *constituunt, dein puncta* A, B *accedunt ad invicem: dico quod ultima forma triangulorum evanescentium est similitudinis, & ultima ratio æqualitatis.*

Nam dum punctum *B* ad punctum *A* accedit, intelligantur semper *AB*, *AD*, *AR* ad puncta longinqua *b*, *d* & *r* produci, ipsique *RD* parallela agi *rbd*, & arcui *AB* similis semper sit arcus *Ab*. Et coeuntibus punctis *A*, *B*, angulus *bAd* evanescet, & propterea triangula tria semper finita *rAb*, *rAb*, *rAd* coincident, suntque eo nomine similia & æqualia. Unde & hisce semper similia & proportionalia *RAB*, *RAB*, *RAD* fient ultimo sibi invicem similia & æqualia. *Q. E. D.*

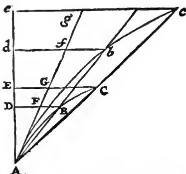


Corol. Et hinc triangula illa, in omni de rationibus ultimis argumentatione, pro se invicem usurpari possunt.

LEMMA

LEMMA IX.

Si recta AE *& curva* ABC *positione datæ se mutuo secent in angulo dato* A, *& ad rectam illam in alio dato angulo ordinatim applicentur* BD, CE *curvæ occurrentes in* B, C; *dein puncta* B, C *simul accedant ad punctum* A: *dico quod areæ triangulorum* ABD, ACE *erunt ultimo ad invicem in duplicata ratione laterum.*



Etenim dum puncta *B*, *C* accedunt ad punctum *A*, intelligatur semper *AD* produci ad puncta longinqua *d* & *e*, ut sint *Ad*, *Ae* ipsis *AD*, *AE* proportionales, & erigantur ordinatæ *db*, *ec* ordinatis *DB*, *EC* parallelæ quæ occurrant ipsis *AB*, *AC* productis in *b* & *c*. Duci intelligatur, tum curva *Abc* ipsi *ABC* similis, tum recta *Ag*, quæ tangat curvam utramque in *A*, & secet ordinatim applicatas *DB*, *EC*, *db*, *ec* in *F*, *G*, *f*, *g*. Tum manente longitudine *Ae* coeant puncta *B*, *C* cum puncto *A*; & angulo *cAg* evanescente, coincident areæ curvilineæ *Abd*, *Ace* cum rectilineis *Afd*, *Age*: adeoque (per Lemma v.) erunt in duplicata ratione laterum *Ad*, *Ae*: Sed his areis proportionales semper sunt areæ *ABD*, *ACE*, & his lateribus latera *AD*, *AE*. Ergo & areæ *ABD*, *ACE* sunt ultimo in duplicata ratione laterum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

LEMMA X.

Spatia quæ corpus urgente quacunque Vi finita describit, sive Vis illa determinata & immutabilis sit, sive eadem continuo augeatur vel continuo diminuatur, sunt ipso motus initio in duplicata ratione Temporum.

Exponantur tempora per lineas *AD*, *AE*, & velocitates genitæ per ordinatas *DB*, *EC*; & spatia his velocitatibus descripta, erunt ut areæ *ABD*, *ACE* his ordinatis descriptæ, hoc est, ipso motus initio (per Lemma ix.) in duplicata ratione temporum *AD*, *AE*. *Q. E. D.*

De Motu Corporum

Corol. 1. Et hinc facile colligitur, quod corporum similes similium Figurarum partes temporibus proportionalibus describentium Errores, qui viribus quibusvis æqualibus ad corpora similiter applicatis generantur, & mensurantur per distantias corporum a Figurarum similium locis illis ad quæ corpora eadem temporibus iisdem proportionalibus absque viribus illis pervenirent, sunt ut quadrata temporum in quibus generantur quam proxime.

Corol. 2. Errores autem qui viribus proportionalibus ad similes Figurarum similium partes similiter applicatis generantur, sunt ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 3. Idem intelligendum est de spatiis quibusvis quæ corpora urgentibus diversis viribus describunt. Hæc sunt, ipso motus initio, ut vires & quadrata temporum conjunctim.

Corol. 4. Ideoque vires sunt ut spatia, ipso motus initio, descripta directe & quadrata temporum inverse.

Corol. 5. Et quadrata temporum sunt ut descripta spatia directe & vires inverse.

Scholium.

Si quantitates indeterminatæ diversorum generum conferantur inter se, & earum aliqua dicatur esse ut est alia quævis directe vel inverse: sensus est, quod prior augetur vel diminuitur in eadem ratione cum posteriore, vel cum ejus reciproca. Et si earum aliqua dicatur esse ut sunt aliæ duæ vel plures directe vel inverse; sensus est, quod prima augetur vel minuitur in ratione quæ componitur ex rationibus in quibus aliæ vel aliarum reciprocæ augentur vel diminuuntur. Ut si A dicatur esse ut B directe & C directe & D inverse: sensus est, quod A augetur vel diminuitur in eadem ratione cum $B \times C \times \frac{1}{D}$, hoc est, quod A & $\frac{BC}{D}$ sunt ad invicem in ratione data.

LEMMA XI.

Subtensa evanescens anguli contactus, in curvis omnibus curvaturam finitam ad punctum contactus habentibus, est ultimo in ratione duplicata subtensæ arcus contermini.

Cas. 1. Si arcus ille *AB*, tangens ejus *AD*, subtensa anguli contactus ad tangentem perpendicularis *BD*, subtensa arcus *AB*. Huic subtensæ *AB* & tangenti *AD* perpendiculares erigantur *AG*, *BG*, concur-

concurrentes in G; dein accedant puncta D, B, G, ad puncta d, b, g, fitque J interfectio linearum BG, AG ultimo facta ubi puncta D, B accedunt usque ad A. Manifestum est quod distantia GJ minor esse potest quam assignata quævis. Est autem (ex natura circulorum per puncta ABG, Abg transeuntium) AB *quad.* æquale $AG \times BD$ & Ab *quad.* æquale $Ag \times bd$, adeoque ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* componitur ex rationibus AG ad Ag & BD ad bd. Sed quoniam GJ assumi potest minor longitudine quavis assignata, fieri potest ut ratio AG ad Ag minus differat a ratione æqualitatis quam pro differentia quavis assignata, adeoque ut ratio AB *quad.* ad Ab *quad.* minus differat a ratione BD ad bd quam pro differentia quavis assignata. Est ergo, per Lemma 1, ratio ultima AB *quad.* ad Ab *quad.* æqualis rationi ultimæ BD ad bd. *Q. E. D.*

Cas. 2. Inclinetur jam BD ad AD in angulo quovis dato, & eadem semper erit ratio ultima BD ad bd quæ prius, adeoque eadem ac AB *quad.* ad Ab *quad.* *Q. E. D.*

Cas. 3. Et quamvis angulus D non detur, sed recta BD ad datum punctum convergente, vel alia quacunque lege constituatur; tamen anguli D, d communi lege constituti ad æqualitatem semper vergent & propius accedent ad invicem quam pro differentia quavis assignata, adeoque ultimo æquales erunt, per Lem. 1, & propterea lineæ BD, bd sunt in eadem ratione ad invicem ac prius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde cum tangentes AD, Ad, arcus AB, Ab, & eorum sinus BC, bc fiant ultimo chordis AB, Ab, æquales; erunt etiam illorum quadrata ultimo ut subtensæ BD, bd.

Corol. 2. Eorundem quadrata sunt etiam ultimo ut sunt arcuum sagittæ quæ chordas bisecant & ad datum punctum convergunt. Nam sagittæ illæ sunt ut subtensæ BD, bd.

Corol. 3. Ideoque sagitta est in duplicata ratione temporis quo corpus data velocitate describit arcum.

Corol. 4. Triangula rectilinea ADB, Adb sunt ultimo in triplicata ratione laterum AD, Ad, inque sesquiplicata laterum DB, db; utpote in composita ratione laterum AD, & DB, Ad & db existentia. Sic & triangula ABC, Abc sunt ultimo in triplicata ratione laterum BC, bc. Rationem vero sesquiplicatam voco triplicatæ subduplicatam, quæ nempe ex simplici & subduplicata componitur, quamque alias sesquialteram dicunt. *Corol.*

Corol. 5. Et quoniam DB, db sunt ultimo parallelæ & in duplicata ratione ipsarum AD, Ad: erunt areæ ultimæ curvilineæ ADB, Adb (ex natura Parabolæ) duæ tertiæ partes triangulorum rectilineorum ADB, Adb; & segmenta AB, Ab partes tertiæ eorundem triangulorum. Et inde hæ areæ & hæc segmenta erunt in triplicata ratione tum tangentium AD, Ad; tum chordarum & arcuum AB, Ab.

Scholium.

Cæterum in his omnibus supponimus angulum contactus nec infinite majorem esse angulis contactuum, quos Circuli continent cum tangentibus suis, nec iisdem infinite minorem; hoc est curvaturam ad punctum A, nec infinite parvam esse nec infinite magnam, seu intervallum AJ finitæ esse magnitudinis. Capi enim potest DB ut AD^3: quo in casu Circulus nullus per punctum A inter tangentem AD & curvam AB duci potest, proindeque angulus contactus erit infinite minor Circularibus. Et simili argumento si fiat DB successive ut AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. habebitur series angulorum contactus pergens in infinitum, quorum quilibet posterior est infinite minor priore. Et si fiat AB successive ut AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. habebitur alia series infinita angulorum contactus, quorum primus est ejusdem generis cum Circularibus, secundus infinite major, & quilibet posterior infinite major priore. Sed & inter duos quosvis ex his angulis potest series utrinque in infinitum pergens angulorum intermediorum inseri, quorum quilibet posterior erit infinite major minorve priore. Ut si inter terminos AD^2 & AD^3 inseratur series $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $BD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Et rursus inter binos quosvis angulos hujus seriei inseri potest series nova angulorum intermediorum ab invicem infinitis intervallis differentium. Neque novit natura limitem.

Quæ de curvis lineis deque superficiebus comprehensis demonstrata sunt, facile applicantur ad solidorum superficies curvas & contenta. Præmisi vero hæc Lemmata, ut effugerem tædium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum. Contractiores enim redduntur demonstrationes per methodum Indivisibilium. Sed quoniam durior est Indivisibilium hypothesis, & propterea methodus illa minus Geometrica censetur; malui demonstrationes rerum sequentium ad ultimas quantitatum eva-

evanescentium summas & rationes, primasque nascentium, id est, ad limites summarum & rationum deducere; & propterea limitum illorum demonstrationes qua potui brevitate præmittere. His enim idem præstatur quod per methodum Indivisibilium; & principiis demonstratis jam tutius utemur. Proinde in sequentibus, si quando quantitates tanquam ex particulis constantes consideravero, vel si pro rectis usurpavero lineolas curvas; nolim indivisibilia, sed evanescentia divisibilia, non summas & rationes partium determinatarum, sed summarum & rationum limites semper intelligi; vimque talium demonstrationum ad methodum præcedentium Lemmatum semper revocari.

Objectio est, quod quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe quæ, antequam evanuerunt, non est ultima, ubi evanuerunt, nulla est. Sed & eodem argumento æque contendi posset nullam esse corporis ad certum locum pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam corpus attingit locum, non esse ultimam, ubi attingit, nullam esse. Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam intelligi eam, qua corpus movetur neque antequam attingit locum ultimum & motus cessat, neque postea, sed tunc cum attingit; id est, illam ipsam velocitatem quacum corpus attingit locum ultimum & quacum motus cessat. Et similiter per ultimam rationem quantitatum evanescentium, intelligendam esse rationem quantitatum non antequam evanescunt, non postea, sed quacum evanescunt. Pariter & ratio prima nascentium est ratio quacum nascuntur. Et summa prima & ultima est quacum esse (vel augeri & minui) incipiunt & cessant. Extat limes quem velocitas in fine motus attingere potest, non autem transgredi. Hæc est velocitas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum & proportionum omnium incipientium & cessantium. Cumque hic limes sit certus & definitus, Problema est vere Geometricum eundem determinare. Geometrica vero omnia in aliis Geometricis determinandis ac demonstrandis legitime usurpantur.

Contendi etiam potest, quod si dentur ultimæ quantitatum evanescentium rationes, dabuntur & ultimæ magnitudines: & sic quantitas omnis constabit ex Indivisibilibus, contra quam *Euclides* de Incommensurabilibus, in libro decimo Elementorum, demonstravit. Verum hæc Objectio falsæ innititur hypothesi. Ultimæ rationes illæ quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quantitatum sine limite decrescentium rationes semper appropinquant; & quas propius assequi possunt quam pro data quavis differentia, nunquam vero

De Motu Corporum. transgredi, neque prius attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum. Res clarius intelligetur in infinite magnis. Si quantitates duæ quarum data est differentia augeantur in infinitum, dabitur harum ultima ratio, nimirum ratio æqualitatis, nec tamen ideo dabuntur quantitates ultimæ seu maximæ quarum ista est ratio. Igitur in sequentibus, siquando facili rerum conceptui consulens dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, vel ultimas; cave intelligas quantitates magnitudine determinatas, sed cogita semper diminuendas sine limite.

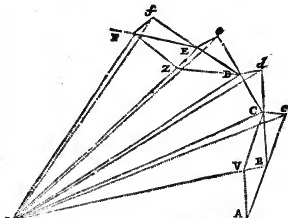
SECTIO II.

De Inventione Virium Centripetarum.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Areas, quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. 1.) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*; adeo ut radiis *AS*, *BS*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad *B*, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, efficiatque ut corpus de recta *Bc* declinet & pergat in recta *BC*. Ipsi *BS*



parallela agatur *cC*, occurrens *BC* in *C*; & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1.) reperietur in *C*, in

eodem

eodem plano cum triangulo ASB. Junge SC; & triangulum SBC, ob parallelas SB, Cc, æquale erit triangulo SBc, atque adeo etiam triangulo SAB. Simili argumento si vis centripeta successive agat in C, D, E, &c. faciens ut corpus singulis temporis particulis singulas describat rectas CD, DE, EF, &c. jacebunt hæ omnes in eodem plano; & triangulum SCD triangulo SBC, & SDE ipsi SCD, & SEF ipsi SDE æquale erit. Æqualibus igitur temporibus æquales areæ in plano immoto describuntur: & componendo, sunt arearum summæ quævis $SADS$, $SAFS$ inter se, ut sunt tempora descriptionum. Augeatur jam numerus & minuatur latitudo triangulorum in infinitum; & eorum ultima perimeter ADF, (per Corollarium quartum Lemmatis tertii) erit linea curva: adeoque vis centripeta, qua corpus a tangente hujus curvæ perpetuo retrahitur, aget indesinenter; areæ vero quævis descriptæ $SADS$, $SAFS$ temporibus descriptionum semper proportionales, erunt iisdem temporibus in hoc casu proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas corporis in centrum immobile attracti est in spatiis non resistentibus reciproce ut perpendiculum, a centro illo in Orbis tangentem rectilineam demissum. Est enim velocitas in locis illis A, B, C, D, E, ut sunt bases æqualium triangulorum AB, BC, CD, DE, EF; & hæ bases sunt reciproce ut perpendicula in ipsas demissa.

Corol. 2. Si arcuum duorum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus ab eodem corpore successive descriptorum chordæ AB, BC compleantur in parallelogrammum $ABCV$, & hujus diagonalis BV in ea positione quam ultimo habet ubi arcus illi in infinitum diminuuntur, producatur utrinque; transibit eadem per centrum virium.

Corol. 3. Si arcuum æqualibus temporibus in spatiis non resistentibus descriptorum chordæ AB, BC ac DE, EF compleantur in parallelogramma $ABCV$, $DEFZ$; vires in B & E sunt ad invicem in ultima ratione diagonalium BU, EZ, ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam corporis motus BC & EF componuntur (per Legum Corol. 1.) ex motibus Bc, BU & Ef, EZ: atqui BU & EZ ipsis Cc & Ff æquales, in Demonstratione Propositionis hujus generabantur ab impulsibus vis centripetæ in B & E, ideoque sunt his impulsibus proportionales.

Corol. 4. Vires quibus corpora quælibet in spatiis non resistentibus a motibus rectilineis retrahuntur ac detorquentur in orbes curvos sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus descriptorum sagittæ illæ quæ convergunt ad centrum virium, & chordas bisecant

De Motu Corporum. ubi arcus illi in infinitum diminuuntur. Nam hæ sagittæ sunt semisses diagonalium de quibus egimus in Corollario tertio.

Corol. 5. Ideoque vires eædem sunt ad vim gravitatis, ut hæ sagittæ ad sagittas horizonti perpendiculares arcuum Parabolicorum quos projectilia eodem tempore describunt.

Corol. 6. Eadem omnia obtinent per Legum Corol. IV. ubi plana in quibus corpora moventur, una cum centris virium quæ in ipsis sita sunt, non quiescunt, sed moventur uniformiter in directum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Corpus omne, quod movetur in linea aliqua curva in plano descripta, & radio ducto ad punctum vel immobile, vel motu rectilineo uniformiter progrediens, describit areas circa punctum illud temporibus proportionales, urgetur a vi centripeta tendente ad idem punctum.

Cas. 1. Nam corpus omne quod movetur in linea curva, detorquetur de cursu rectilineo per vim aliquam in ipsum agentem (per Leg. I.) Et vis illa qua corpus de cursu rectilineo detorquetur, & cogitur triangula quam minima *SAB*, *SBC*, *SBD*, &c. circa punctum immobile *S* temporibus æqualibus æqualia describere, agit in loco *B* secundum lineam parallelam ipsi *cC* (per Prop. XL. Lib. I. Elem. & Leg. II.) hoc est, secundum lineam *BS*; & in loco *C* secundum lineam ipsi *dD* parallelam, hoc est, secundum lineam *SC*, &c. Agit ergo semper secundum lineas tendentes ad punctum illud immobile *S*. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et, per Legum Corollarium quintum, perinde est sive quiescat superficies in qua Corpus describit figuram rectilineam, sive moveatur eadem una cum corpore, figura descripta, & puncto suo *S* uniformiter in directum.

Corol. 1. In Spatiis vel Mediis non resistentibus, si areæ non sunt temporibus proportionales, vires non tendunt ad concursum radiorum; sed inde declinant in consequentia seu versus plagam in quam fit motus, si modo arearum descriptio acceleratur: sin retardatur, declinant in antecedentia.

Corol. 2. In Mediis etiam resistentibus, si arearum descriptio acceleratur, virium directiones declinant a concursu radiorum versus plagam in quam fit motus.

Scholium.

Scholium.

Urgeri poteſt corpus a vi centripeta compoſita ex pluribus viribus. In hoc caſu ſenſus Propoſitionis eſt, quod vis illa quæ ex omnibus componitur, tendit ad punctum *S*. Porro ſi vis aliqua agat perpetuo ſecundum lineam ſuperficiei deſcriptæ perpendicularem; hæc faciet ut corpus deflectatur a plano ſui motus; ſed quantitatem ſuperficiei deſcriptæ nec augebit nec minuet, & propterea in compoſitione virium negligenda eſt.

PROPOSITIO III. THEOREMA III.

Corpus omne, quod radio ad centrum corporis alterius utcunque moti ducto deſcribit areas circa centrum illud temporibus proportionales, urgetur vi compoſita ex vi centripeta tendente ad corpus illud alterum, & ex vi omni acceleratrice qua corpus illud alterum urgetur.

Sit corpus primum *L* & corpus alterum *T*: & (per Legum Corol. VI.) ſi vi nova, quæ æqualis & contraria ſit illi qua corpus alterum *T* urgetur, urgeatur corpus utrumque ſecundum lineas parallelas; perget corpus primum *L* deſcribere circa corpus alterum *T* areas eaſdem ac prius: vis autem, qua corpus alterum *T* urgebatur, jam deſtruetur per vim ſibi æqualem & contrariam; & propterea (per Leg. I.) corpus illud alterum *T* ſibimet ipſi jam relictum vel quieſcet vel movebitur uniformiter in directum: & corpus primum *L* urgente differentia virium, id eſt, urgente vi reliqua perget areas temporibus proportionales circa corpus alterum *T* deſcribere. Tendit igitur (per Theor. II.) differentia virium ad corpus illud alterum *T* ut centrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi corpus unum *L* radio ad alterum *T* ducto deſcribit areas temporibus proportionales; atque de vi tota (ſive ſimplici, ſive ex viribus pluribus, juxta Legum Corollarium ſecundum, compoſita,) qua corpus prius *L* urgetur, ſubducatur (per idem Legum Corollarium) vis tota acceleratrix qua corpus alterum urgetur: vis omnis reliqua qua corpus prius urgetur tendet ad corpus alterum *T* ut centrum.

Corol. 2. Et, ſi areæ illæ ſunt temporibus quamproxime proportionales, vis reliqua tendet ad corpus alterum *T* quamproxime.

Corol. 3. Et vice verſa, ſi vis reliqua tendit quamproxime ad

 corpus alterum *T*, erunt areæ illæ temporibus quamproxime proportionales.

Corol. 4. Si corpus *L* radio ad alterum corpus *T* ducto describit areas quæ, cum temporibus collatæ, sunt valde inæquales; & corpus illud alterum *T* vel quiescit vel movetur uniformiter in directum: actio vis centripetæ ad corpus illud alterum *T* tendentis, vel nulla est, vel miscetur & componitur cum actionibus admodum potentibus aliarum virium: Visque tota ex omnibus, si plures sunt vires, composita, ad aliud (sive immobile sive mobile) centrum dirigitur. Idem obtinet, ubi corpus alterum motu quocunque movetur; si modo vis centripeta sumatur, quæ restat post subductionem vis totius in corpus illud alterum *T* agentis.

Scholium.

Quoniam æquabilis arearum descriptio Index est Centri, quod vis illa respicit qua corpus maxime afficitur, quaque retrahitur a motu rectilineo & in orbita sua retinetur: quidni usurpemus in sequentibus æquabilem arearum descriptionem, ut Indicem Centri circum quod motus omnis circularis in spatiis liberis peragitur?

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Corporum, quæ diversos circulos æquabili motu describunt, vires centripetas ad centra eorundem circulorum tendere; & esse inter se, ut sunt arcuum simul descriptorum quadrata applicata ad circulorum radios.

Tendunt hæ vires ad centra circulorum per Prop. II. & Corol. II. Prop. I; & sunt inter se ut arcuum æqualibus temporibus quam minimis descriptorum sinus versi per Corol. IV. Prop. I; hoc est, ut quadrata arcuum eorundem ad diametros circulorum applicata per Lem. VII: & propterea, cum hi arcus sint ut arcus temporibus quibusvis æqualibus descripti, & diametri sint ut eorum radii; vires erunt ut arcuum quorumvis simul descriptorum quadrata applicata ad radios circulorum. *Q. E. D.*

Corol. I. Igitur, cum arcus illi sint ut velocitates corporum, vires centripetæ sunt ut velocitatum quadrata applicata ad radios circulorum: hoc est, ut cum Geometris loquar, vires sunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum directe & ratione simplici radiorum inverse.

Corol.

Corol. 2. Et, cum tempora periodica sint in ratione composita ex ratione radiorum directe & ratione velocitatum inverse, vires centripetæ sunt reciproce ut quadrata temporum periodicorum applicata ad circulorum radios; hoc est, in ratione composita ex ratione radiorum directe & ratione duplicata temporum periodicorum inverse.

Corol. 3. Unde, si tempora periodica æquentur & propterea velocitates sint ut radii; erunt etiam vires centripetæ ut radii: & contra.

Corol 4. Si & tempora periodica & velocitates sint in ratione subduplicata radiorum; æquales erunt vires centripetæ inter se: & contra.

Corol 5. Si tempora periodica sint ut radii & propterea velocitates æquales; vires centripetæ erunt reciproce ut radii: & contra.

Corol. 6. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicata radiorum & propterea velocitates reciproce in radiorum ratione subduplicata; vires centripetæ erunt reciproce ut quadrata radiorum; & contra.

Corol. 7. Et universaliter, si tempus periodicum sit ut Radii R potestas quælibet R^n, & propterea velocitates reciproce ut Radii potestas R^{n-1}; erit vis centripeta reciproce ut Radii potestas R^{2n-1}; & contra.

Corol. 8. Eadem omnia de temporibus, velocitatibus, & viribus, quibus corpora similes figurarum quarumcunque similium, centraque in figuris illis similiter posita habentium, partes describunt, consequuntur ex Demonstratione præcedentium ad hosce casus applicata. Applicatur autem substituendo æquabilem arearum descriptionem pro æquabili motu, & distantias corporum a centris pro radiis usurpando.

Corol. 9. Ex eadem demonstratione consequitur etiam; quod arcus, quem corpus in circulo data vi centripeta uniformiter revolvendo tempore quovis describit, medius est proportionalis inter diametrum circuli, & descensum corporis eadem data vi eodemque tempore cadendo confectum.

Scholium.

Casus Corollarii sexti obtinet in corporibus cœlestibus (ut seorsum collegerunt etiam nostrates *Wrennus*, *Hookius* & *Hallæus*) & propterea quæ spectant ad vim centripetam decrescentem in duplicata ratione distantiarum a centris, decrevi fusius in sequentibus exponere.

Porro

Porro præcedentis propositionis & corollariorum ejus beneficio, colligitur etiam proportio vis centripetæ ad vim quamlibet notam, qualis est ea Gravitatis. Nam si corpus in circulo Terræ concentrico vi gravitatis suæ revolvatur, hæc gravitas est ipsius vis centripeta. Datur autem, ex descensu gravium, & tempus revolutionis unius, & arcus dato quovis tempore descriptus, per hujus Corol. IX. Et hujusmodi propositionibus *Hugenius*, in eximio suo Tractatu *de Horologio Oscillatorio*, vim gravitatis cum revolventium viribus centrifugis contulit.

Demonstrari etiam possunt præcedentia in hunc modum. In circulo quovis describi intelligatur Polygonum laterum quotcunque. Et si corpus, in polygoni lateribus data cum velocitate movendo, ad ejus angulos singulos a circulo reflectatur; vis qua singulis reflexionibus impingit in circulum erit ut ejus velocitas: adeoque summa virium in dato tempore erit ut velocitas illa & numerus reflexionum conjunctim: hoc est (si polygonum detur specie) ut longitudo dato illo tempore descripta & longitudo eadem applicata ad Radium circuli; id est, ut quadratum longitudinis illius applicatum ad Radium: adeoque, si polygonum lateribus infinite diminutis coincidat cum circulo, ut quadratum arcus dato tempore descripti applicatum ad radium. Hæc est vis centrifuga, qua corpus urget circulum: & huic æqualis est vis contraria, qua circulus continuo repellit corpus centrum versus.

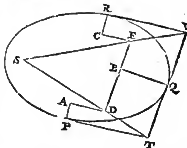
PROPOSITIO IV. PROBLEMA I.

Data quibuscunque in locis velocitate, qua corpus figuram datam viribus ad commune aliquod centrum tendentibus describit, centrum illud invenire.

Figuram descriptam tangant rectæ tres PT, TQV, VR, in punctis totidem P, Q, R, concurrentes in T & V. Ad tangentes erigantur perpendicula PA, QB, RC, velocitatibus corporis in punctis illis P, Q, R, a quibus eriguntur reciproce proportionalia; id est, ita ut sit PA ad QB, ut velocitas in Q ad velocitatem in P, & QB ad RC ut velocitas in R ad velocitatem in Q. Per perpendiculorum terminos A, B, C ad angulos rectos ducantur AD, DBE, EC concurrentes in D & E: Et actæ TD, VE concurrent in centro quæsito S.

Nam

Nam perpendicula a centro S in tangentes PT, QT demissa (per Corol. 1 Prop. 1.) sunt reciproce ut velocitates corporis in punctis P & Q; adeoque per constructionem ut perpendicula AP, BQ directe, id est ut perpendicula a puncto D in tangentes demissa. Unde facile colligitur quod puncta S, D, T, sunt in una recta. Et simili argumento puncta S, E, V sunt etiam in una recta; & propterea centrum S in concursu rectarum TD, VE versatur. *Q. E. D.*



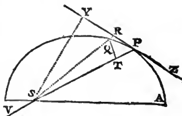
PROPOSITIO VI. THEOREMA V.

Si corpus in spatio non resistente circa centrum immobile in Orbe quocunque revolvatur, & arcum quemvis jamjam nascentem tempore quam minimo describat, & sagitta arcus duci intelligatur quæ chordam bisecet, & producta transeat per centrum virium: erit vis centripeta in medio arcus, ut sagitta directe & tempus bis inverse.

Nam sagitta dato tempore est ut vis (per Corol. 4. Prop. 1.) & augendo tempus in ratione quavis, ob auctum arcum in eadem ratione sagitta augetur in ratione illa duplicata (per Corol. 2. & 3. Lem. XI.) adeoque est ut vis semel & tempus bis. Subducatur duplicata ratio temporis utrinque, & fiet vis ut sagitta directe & tempus bis inverse. *Q. E. D.*

Idem facile demonstratur etiam per Corol. 4. Lem. X.

Corol. 1. Si corpus P revolvendo circa centrum S describat lineam curvam APQ, tangat vero recta ZPR curvam illam in puncto quovis P, & ad tangentem ab alio quovis Curvæ puncto Q agatur QR distantiæ SP parallela, ac demittatur QT perpendicularis ad distantiam illam SP: vis centripeta erit reciproce ut solidum $\frac{SP\,quad. \times QT\,quad.}{QR}$ si modo solidi illius ea semper sumatur quantitas, quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q. Nam QR æqualis est



 est sagittæ dupli arcus QP, in cujus medio est P, & duplum trianguli SQP sive $SP \times QT$, tempori quo arcus iste duplus describitur proportionale est, ideoque pro temporis exponente scribi potest.

Corol. 2. Eodem argumento vis centripeta est reciproce ut solidum $\frac{STq \times QPq}{QR}$, si modo ST perpendiculum sit a centro virium in Orbis tangentem PR demissum. Nam rectangula $ST \times QP$ & $SP \times QT$ æquantur.

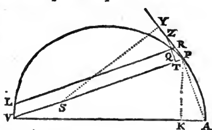
Corol. 3. Si Orbis vel circulus est, vel angulum contactus cum circulo quam minimum continet, eandem habens curvaturam eundemque radium curvaturæ ad punctum contactus P, & si PV chorda sit circuli hujus a corpore per centrum virium acta: erit vis centripeta reciproce ut solidum $STq \times PV$. Nam PV est $\frac{QPq}{QR}$.

Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum ST per Corol. 1 Prop. 1.

Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ, & in ea detur etiam punctum S ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis P a cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $STq \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in Problematis sequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia Circuli, requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.



Esto Circuli circumferentia $VQPA$, punctum datum ad quod vis ceu ad centrum suum tendit S, corpus in circumferentia latum P, locus proximus in quem movebitur Q, & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV, & acta circuli diametro VA jungatur AP, & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z, ac

ac denique per punctum Q agatur LR quæ ipsi SP parallela fit & occurrat tum circulo in L tum tangenti PZ in R. Et ob similia triangula ZQR, ZTP, VPA; erit RP *quad.* hoc est QRL ad QT *quad.* ut AV *quad.* ad PV *quad.* Ideoque $\frac{QRL \times PV \; quad.}{AV \; quad.}$ æquatur QT *quad.* Ducantur hæc æqualia in $\frac{SP \; quad.}{QR}$ &, punctis P & Q coeuntibus, scribatur PV pro RL. Sic fiet $\frac{SP \; quad. \times PV \; cub.}{AV \; quad.}$ æquale $\frac{SP \; quad. \times QT \; quad.}{QR}$. Ergo (per Corol. 1 & 5 Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV \; cub.}{AV \; quad.}$ id est (ob datum AV *quad.*) reciproce ut quadratum distantiæ seu altitudinis SP & cubus chordæ PV conjunctim. *Q. E. I.*

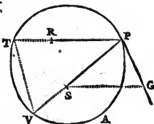
LIBER PRIMUS.

Idem aliter.

Ad tangentem PR productam demittatur perpendiculum SY, & ob similia triangula SYP, VPA; erit AV ad PV ut SP ad SY, ideoque $\frac{SP \times PV}{AV}$ æquale SY, & $\frac{SP \; quad. \times PV \; cub.}{AV \; quad.}$ æquale SY *quad.* $\times PV$. Et propterea (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $\frac{SPq \times PV \; cub.}{AVq}$ hoc est, ob datam AV, reciproce ut $SPq \times PV \; cub.$ *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si punctum datum S ad quod vis centripeta semper tendit, locetur in circumferentia hujus circuli, puta ad V; erit vis centripeta reciproce ut quadrato-cubus altitudinis SP.

Corol. 2. Vis qua corpus P in circulo $APTV$ circum virium centrum S revolvitur, est ad vim qua corpus idem P in eodem circulo & eodem tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest ut RP *quad.* $\times SP$ ad cubum rectæ SG quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & distantiæ corporis a secundo virium centro parallela est. Nam, per constructionem hujus Propositionis, vis prior est ad vim posteriorem, ut $RPq \times PT \; cub.$ ad $SPq \times PV \; cub.$



id

id est, ut $SP \times RPq$ ad $\frac{SP\ cub. \times PV\ cub.}{PI\ cub.}$ sive (ob similia triangula PSG, TPV) ad $SG\ cub.$

Corol. 3. Vis, qua corpus P in Orbe quocunque circum virium centrum S revolvitur, est ad vim qua corpus idem P in eodem orbe eodemque tempore periodico circum aliud quodvis virium centrum R revolvi potest, ut $SP \times RPq$ contentum utique sub distantia corporis a primo virium centro S & quadrato distantiæ ejus a secundo virium centro R ad cubum rectæ SG quæ a primo virium centro S ad orbis tangentem PG ducitur, & corporis a secundo virium centro distantiæ RP parallela est. Nam vires in hoc orbe, ad ejus punctum quodvis P, eædem sunt ac in Circulo ejusdem curvaturæ.

PROPOSITIO VIII. PROBLEMA III.

Moveatur corpus in circulo PQA: *ad hunc effectum requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad punctum adeo longinquum* S, *ut lineæ omnes* PS, RS *ad id ductæ, pro parallelis haberi possint.*

A Circuli centro C agatur semidiameter CA parallelas istas perpendiculariter secans in M & N, & jungatur CP. Ob similia triangula CPM, PZT & RZQ est CPq ad PMq ut PRq ad QTq & ex natura Circuli PRq æquale est rectangulo $QR \times \overline{RN + QN}$ sive coeuntibus punctis P, Q rectangulo $QR \times 2PM$. Ergo est CPq ad $PM\ quad.$ ut $QR \times 2PM$ ad $QT\ quad.$ adeoque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub.}{CP\ quad.}$, & $\frac{QT\ quad. \times SP\ quad.}{QR}$ æquale $\frac{2PM\ cub. \times SP\ qu.}{CP\ quad.}$ Est ergo (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2PM\ cub. \times SP\ quad.}{CP\ quad.}$ hoc est neglecta ratione determinata $\left(\frac{2SP\ quad.}{CP\ quad.}\right)$ reciproce ut $PM\ cub.$ Q. E. I.

Idem facile colligitur etiam ex Propositione præcedente.

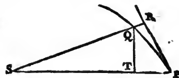
Scho-

Scholium.

Et simili argumento corpus movebitur in Ellipsi vel etiam in Hyperbola vel Parabola, vi centripeta quæ sit reciproce ut cubus ordinatim applicatæ ad centrum virium maxime longinquum tendentis.

PROPOSITIO IX. PROBLEMA IV.

Gyretur corpus in Spirali PQS *secante radios omnes* SP, SQ, *&c. in angulo dato: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Spiralis.*



Detur angulus indefinite parvus PSQ, & ob datos omnes angulos dabitur specie figura $SPQRT$. Ergo datur ratio $\frac{QT}{QR}$, estque $\frac{QT\ quad.}{QR}$ ut QT, hoc est ut SP. Mutetur jam utcunque angulus PSQ, & recta QR angulum contactus QPR subtendens mutabitur (per Lemma XI.) in duplicata ratione ipsius PR vel QT. Ergo manebit $\frac{QT\ quad.}{QR}$ eadem quæ prius, hoc est ut SP. Quare $\frac{QTq. \times SPq}{QR}$ est ut SP *cub.* adeoque (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut cubus distantiæ SP. *Q. E. I.*

Idem aliter.

Perpendiculum ST in tangentem demissum, & circuli Spiralem tangentis chorda PV sunt ad altitudinem SP in datis rationibus; ideoque SP *cub.* est ut $STq \times PV$, hoc est (per Corol. 3 & 5 Prop. VI.) reciproce ut vis centripeta.

L E M M A XII.

Parallelogramma omnia, circa datæ Ellipseos vel Hyperbolæ diametros quasvis conjugatas descripta, esse inter se æqualia.

Constat ex Conicis.

PROPOSITIO X. PROBLEMA V.

Gyretur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad centrum Ellipseos.

Sunto CA, CB semiaxes Ellipseos; GP, DK diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; Qv ordinatim applicata ad diametrum GP; & si compleatur parallelogrammum $QvPR$, erit (ex Conicis) PvG ad Pv *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & (ob similia triangula Qvt, PCF) Qv *quad.* est ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad PF *quad.* & conjunctis rationibus, PvG ad Qt *quad.* ut PC *quad.* ad CD *quad.* & PC *quad.* ad PF *quad.* id est, vG ad $\frac{Qt\ quad.}{Pv}$ ut PC *quad.* ad $\frac{CDq \times PFq.}{PCq}$ Scribe QR pro Pv & (per Lemma XII.) $BC \times CA$ pro $CD \times PF$, nec non, punctis P & Q coeuntibus, $2\,PC$ pro vG, & ductis extremis & mediis in se mutuo, fiet $\frac{Qt\ quad. \times PCq}{QR}$ æquale $\frac{2\,BCq \times CAq.}{PC}$. Est ergo (per Corol. 5. Prop. VI.) vis centripeta reciproce ut $\frac{2\,BCq \times CAq;}{PC}$ id est (ob datum $2\,BCq \times CAq$) reciproce ut $\frac{1}{PC}$; hoc est, directe ut distantia PC. *Q.E.I.*

Idem aliter.

In PG ab altera parte puncti t posita intelligatur tu æqualis ipsi tv; deinde cape uV quæ sit ad vG ut est DC *quad.* ad PC *quad.* Et quoniam ex Conicis est Qv *quad.* ad PvG, ut DC *quad.* ad PC *quad.* erit Qv *quad.* æquale $Pv \times uV$. Unde quadratum chordæ

dæ arcus PQ erit æquale rectangulo VPv; adeoque Circulus qui tangit Sectionem Conicam in P & transit per punctum Q, transibit etiam per punctum V. Coeant puncta P & Q, & hic circulus ejusdem erit curvaturæ cum sectione conica in P, & PV æqualis erit $\frac{2DCq}{PC}$. Proinde vis qua corpus P in Ellipsi revolvitur erit reciproce ut $\frac{2DCq}{PC}$ in PFq (per Corol. 3. Prop. VI.) hoc est (ob datum $2DCq$ in PFq) directe ut PC. *Q. E. I.*

Corol. 1. Est igitur vis ut distantia corporis a centro Ellipseos: & vicissim, si vis sit ut distantia, movebitur corpus in Ellipsi centrum habente in centro virium, aut forte in circulo, in quem utique Ellipsis migrare potest.

Corol. 2. Et æqualia erunt revolutionum in Ellipsibus universis circum centrum idem factarum periodica tempora. Nam tempora illa in Ellipsibus similibus æqualia sunt per Corol. 3. & 8, Prop. IV: in Ellipsibus autem communem habentibus axem majorem, sunt ad invicem ut Ellipseon areæ totæ directe & arearum particulæ simul descriptæ inverse; id est, ut axes minores directe & corporum velocitates in verticibus principalibus inverse; hoc est, ut axes illi minores directe & ordinatim applicatæ ad axes alteros inverse; & propterea (ob æqualitatem rationum directarum & inversarum) in ratione æqualitatis.

Scholium.

Si Ellipsis centro in infinitum abeunte vertatur in Parabolam, corpus movebitur in hac Parabola, & vis ad centrum infinite distans jam tendens evadet æquabilis. Hoc est Theorema *Galilæi*. Et si coni sectio Parabolica, inclinatione plani ad conum sectum mutata, vertatur in Hyperbolam, movebitur corpus in hujus perimetro, vi centripeta in centrifugam versa. Et quemadmodum in Circulo vel Ellipsi, si vires tendunt ad centrum figuræ in Abscissa positum, hæ vires augendo vel diminuendo Ordinatas in ratione quacunque data, vel etiam mutando angulum inclinationis Ordinatarum ad Abscissam, semper augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro, si modo tempora periodica maneant æqualia: sic etiam in figuris universis, si Ordinatæ augeantur vel diminuantur in ratione quacunque data, vel angulus ordinationis utcunque mutetur, manente tempore periodico; vires ad centrum quodcunque in Abscissa positum tendentes a binis quibusvis figurarum locis, ad quæ terminantur Ordinatæ correspondentibus Abscissarum punctis insistentes, augentur vel diminuuntur in ratione distantiarum a centro.

SECTIO

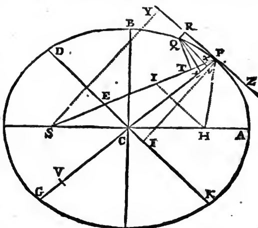
SECTIO III.

De motu Corporum in Conicis Sectionibus excentricis.

PROPOSITIO XI. PROBLEMA VI.

Revolvatur corpus in Ellipsi: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum Ellipseos.

Esto Ellipseos umbilicus S. Agatur SP secans Ellipseos tum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QxPR$. Patet EP æqualem esse semiaxi majori AC, eo quod acta ab altero Ellipseos umbilico H linea HI ipsi EC parallela, (ob æquales CS, CH) æquentur ES, EI, adeo ut EP semisumma sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas HI, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quæ conjunctim axem totum $2AC$ adæquant. Ad SP demittatur perpendicularis QT, & Ellipseos latere recto principali (seu $\frac{2BC\,quad.}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, id est ut PE seu AC ad PC; & $L \times Pv$ ad GvP ut L ad Gv; & GvP ad $Qv\,quad.$ ut $PC\,quad.$ ad $CD\,quad.$; & (per Corol. 2 Lem. VII.) $Qv\,quad.$ ad $Qx\,quad.$ punctis Q & P coeuntibus, est ratio æqualitatis; & $Qx\,quad.$ seu $Qv\,quad.$ est ad $QT\,quad.$ ut $EP\,quad.$ ad $PF\,quad.$ id est ut $CA\,quad.$ ad $PF\,quad.$ sive (per Lem. XII.) ut $CD\,quad.$ ad $CB\,quad.$ Et conjunctis his omnibus rationibus, $L \times QR$ fit ad $QT\,quad.$ ut $AC \times L \times PCq. \times CDq.$ seu $2CBq. \times PCq. \times CDq.$ ad $PC \times Gv \times CDq. \times CBq.$ sive ut $2PC$ ad Gv.



Sed,

Sed, punctis Q & P coeuntibus, æquantur $2PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & $QT\,quad.$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$ & fiet $L \times SPq.$ æquale $\frac{SPq. \times QTq.}{QR}$ Ergo (per Corol. 1. & 5. Prop. VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq.$ id est, reciproce in ratione duplicata distantiæ $SP.$ *Q. E. I.*

Idem aliter.

Cum vis ad centrum Ellipseos tendens qua corpus P in Ellipsi illa revolvi potest, sit (per Corol. 1. Prop. X.) ut CP distantia corporis ab Ellipseos centro C; ducatur CE parallela Ellipseos tangenti PR: & vis qua corpus idem P, circum aliud quodvis Ellipseos punctum S revolvi potest, si CE & PS concurrant in E, erit ut $\frac{PE\,cub.}{SPq}$ (per Corol. 3. Prop. VII.) hoc est, si punctum S sit umbilicus Ellipseos, adeoque PE detur, ut SPq reciproce. *Q. E. I.*

Eadem brevitate qua traduximus Problema quintum ad Parabolam, & Hyperbolam, liceret idem hic facere: verum ob dignitatem Problematis & usum ejus in sequentibus, non pigebit casus ceteros demonstratione confirmare.

PROPOSITIO XII. PROBLEMA VII.

Moveatur corpus in Hyperbola: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum figuræ.

Sunto CA, CB semi-axes Hyperbolæ; PG, KD diametri conjugatæ; PF, Qt perpendicula ad diametros; & Qv ordinatim applicata ad diametrum GP. Agatur SP secans cum diametrum DK in E, tum ordinatim applicatam Qv in x, & compleatur parallelogrammum $QRPx$. Patet EP æqualem esse semiaxi transverso AC, eo quod, acta ab altero Hyperbolæ umbilico H linea HI ipsi EC parallela, ob æquales CS, CH, æquentur ES, EI; adeo ut EP semidifferentia sit ipsarum PS, PI, id est (ob parallelas IH, PR & angulos æquales IPR, HPZ) ipsarum PS, PH, quarum differentia axem totum $2AC$ adæquat. Ad SP demittatur perpendicularis QT. Et Hyperbolæ latere recto principali (seu $\frac{2BCq}{AC}$) dicto L, erit $L \times QR$ ad $L \times Pv$ ut QR ad Pv, id est, ut PE seu AC ad PC; Et $L \times Pv$ ad GvP ut L ad

 Gv;

Gv; & GvP ad Qv *quad.* ut PCq. ad CDq; & (per Corol. 2. Lem. VII.) Qv *quad.* ad Qx *quad.* punctis Q & P coeuntibus fit ratio æqualitatis; & Qx *quad.* seu Qv *quad.* est ad QTq. ut EPq. ad PFq, id est ut CAq, ad PFq, sive (per Lem. XII.) ut CDq, ad CBq: & conjunctis his omnibus rationibus $L \times QR$ fit ad QTq. ut $AC \times L \times PCq \times CDq$ seu $2\,CBq \times PCq \times CDq$ ad $PC \times Gv \times CDq \times CB$ *quad.* sive ut $2\,PC$ ad Gv. Sed punctis P & Q coeuntibus æquantur $2\,PC$ & Gv. Ergo & his proportionalia $L \times QR$ & QTq. æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$. & fiet $L \times SPq$. æquale $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. Ergo (per Corol. 1. & 5 Prop VI.) vis centripeta reciproce est ut $L \times SPq$, id est reciproce in ratione duplicata distantiæ SP. $Q.E.I.$

Idem

Idem aliter.

Inveniatur vis quæ tendit ab Hyperbolæ centro C. Prodibit hæc distantiæ CP proportionalis. Inde vero (per Corol. 3. Prop. VII.) vis ad umbilicum S tendens erit ut $\frac{PE\ cub.}{SPq}$, hoc est, ob datam PE, reciproce ut SPq. *Q. E. I.*

Eodem modo demonstratur quod corpus, hac vi centripeta in centrifugam versa, movebitur in Hyperbola conjugata.

LEMMA XIII.

Latus rectum Parabolæ ad verticem quemvis pertinens, est quadruplum distantiæ verticis illius ab umbilico figuræ.

Patet ex Conicis.

LEMMA XIV.

Perpendiculum quod ab umbilico Parabolæ ad tangentem ejus demittitur, medium est proportionale inter distantias umbilici a puncto contactus & a vertice principali figuræ.

Sit enim APQ Parabola, S umbilicus ejus, A vertex principalis, P punctum contactus, PO ordinatim applicata ad diametrum principalem, PM tangens diametro principali occurrens in M, & SN, linea perpendicularis ab umbilico in tangentem. Jungatur AN, & ob æquales MS & SP, MN & NP, MA & AO, parallelæ erunt rectæ AN & OP, & inde triangulum SAN rectangulum erit ad A & simile triangulis æqualibus SNM, SNP. Ergo PS est ad SN, ut SN ad SA. *Q. E. D.*

Corol. 1. $PSq.$ est ad SNq ut PS ad SA.

Corol. 2. Et ob datam SA, est $SNq.$ ut PS.

Corol. 3. Et concursus tangentis cujusvis PM cum recta SN, quæ ab umbilico in ipsam perpendicularis est, incidit in rectam AN, quæ Parabolam tangit in vertice principali.

PROPOSITIO XIII. PROBLEMA VIII.

Moveatur corpus in perimetro Parabolæ: requiritur Lex vis centripetæ tendentis ad umbilicum hujus figuræ.

Maneat constructio Lemmatis, sitque P corpus in perimetro Parabolæ, & a loco Q in quem corpus proxime movetur, age ipsi SP parallelam QR & perpendicularem QT, nec non Qv tangenti parallelam & occurrentem tum diametro YPG in v, tum distantiæ SP in x. Jam ob similia triangula Pxv, SPM & æqualia unius latera SM, SP, æqualia sunt alterius latera Px seu QR & Pv. Sed, ex Conicis, quadratum ordinatæ Qv æquale est rectangulo sub latere recto & segmento diametri Pv, id est (per Lem. XIII.) rectangulo $4PS \times Pv$, seu $4PS \times QR$; & punctis P & Q coeuntibus, ratio Qv ad Qx (per Corol. 2. Lem. VII.) fit ratio æqualitatis. Ergo Qx *quad.* eo in casu, æquale est rectangulo $4PS \times QR$. Est autem (ob similia triangula QxT, SPN) $Qxq.$ ad $QTq.$ ut $PSq.$ ad $SNq.$ hoc est (per Corol. 1. Lem. XIV.) ut PS ad SA, id est ut $4PS \times QR$ ad $4SA \times QR$, & inde (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) $QTq.$ & $4SA \times QR$ æquantur. Ducantur hæc æqualia in $\frac{SPq}{QR}$, & fiet $\frac{SPq \times QTq}{QR}$. æquale $SPq. \times 4SA$: & propterea (per Corol. 1 & 5. Prop. VI.) vis centripeta est reciproce ut $SPq \times 4SA$, id est, ob datam $4SA$, reciproce in duplicata ratione distantiæ SP. *Q.E.I.*

Corol.

Corol. 1. Ex tribus novissimis Propositionibus consequens est, quod si corpus quodvis P, secundum lineam quamvis rectam PR, quacunque cum velocitate exeat de loco P, & vi centripeta quæ sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, simul agitetur; movebitur hoc corpus in aliqua sectionum Conicarum umbilicum habente in centro virium; & contra. Nam datis umbilico & puncto contactus & positione tangentis, describi potest sectio Conica quæ curvaturam datam ad punctum illud habebit. Datur autem curvatura ex data vi centripeta: & Orbes duo se mutuo tangentes, eadem vi centripeta describi non possunt.

Corol. 2. Si velocitas, quacum corpus exit de loco suo P, ea sit, qua lineola PR in minima aliqua temporis particula describi possit, & vis centripeta potis sit eodem tempore corpus idem movere per spatium QR: movebitur hoc corpus in Conica aliqua sectione, cujus latus rectum principale est quantitas illa $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi lineolæ PR, QR in infinitum diminuuntur. Circulum in his Corollariis refero ad Ellipsin, & casum excipio ubi corpus recta descendit ad centrum.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA VI.

Si corpora plura revolvantur circa centrum commune, & vis centripeta sit reciproce in duplicata ratione distantiæ locorum a centro; dico quod Orbium Latera recta principalia sunt in duplicata ratione arearum quas corpora, radiis ad centrum ductis, eodem tempore describunt.

Nam, per Corol. 2. Prop. XIII. Latus rectum L æquale est quantitati $\frac{QTq.}{QR}$ quæ ultimo fit ubi coeunt puncta P & Q. Sed linea minima QR, dato tempore, est ut vis centripeta generans, hoc est (per Hypothesin) reciproce ut SPq. Ergo $\frac{QTq.}{QR}$ est ut $QTq. \times SPq.$ hoc est, latus rectum L in duplicata ratione areæ $QT \times SP$. *Q.E.D.*

Corol. Hinc ellipseos area tota, eique proportionale rectangulum sub axibus, est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione temporis periodici. Namque area tota est ut area $QT \times SP$, quæ dato tempore describitur, ducta in tempus periodicum.

PROPOSITIO XV. THEOREMA VII.

Iisdem positis, dico quod Tempora periodica in Ellipsibus sunt in ratione sesquiplicata majorum axium.

Namque axis minor est medius proportionalis inter axem majorem & latus rectum, atque adeo rectangulum sub axibus est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & sesquiplicata ratione axis majoris. Sed hoc rectangulum, per Corollarium Prop. XIV. est in ratione composita ex subduplicata ratione lateris recti & ratione periodici temporis. Dematur utrobique subduplicata ratio lateris recti, & manebit sesquiplicata ratio majoris axis æqualis rationi periodici temporis. *Q. E. D.*

Corol. Sunt igitur tempora periodica in Ellipsibus eadem ac in Circulis, quorum diametri æquantur majoribus axibus Ellipseon.

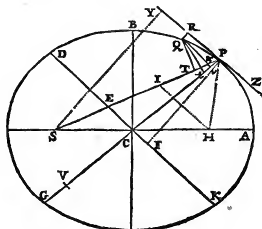
PROPOSITIO XVI. THEOREMA VIII.

Iisdem positis, & actis ad corpora lineis rectis, quæ ibidem tangant Orbitas, demissisque ab umbilico communi ad has tangentes perpendicularibus: dico quod Velocitates corporum sunt in ratione composita ex ratione perpendiculorum inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe.

Ab umbilico S ad tangentem PR demitte perpendiculum SY & velocitas corporis P erit reciproce in subduplicata ratione quantitatis $\frac{SYq.}{L}$ Nam velocitas illa est ut arcus quam minimus PQ in data temporis particula descriptus, hoc est (per Lem. VII.) ut tangens PR, id est (ob proportionales PR ad QT & SP ad SY) ut $\frac{SP \times QT}{SY}$, sive ut SY reciproce & $SP \times QT$ directe; estque

SP

$SP \times QT$ ut area dato tempore descripta, id est, per Prop. XIV. in subduplicata ratione lateris recti. *Q. E. D.*



Corol. 1. Latera recta principalia sunt in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum.

Corol. 2. Velocitates corporum in maximis & minimis ab umbilico communi distantiis, sunt in ratione composita ex ratione distantiarum inverse & subduplicata ratione laterum rectorum principalium directe. Nam perpendicula jam sunt ipsæ distantiæ.

Corol. 3. Ideoque velocitas in Conica sectione, in maxima vel minima ab umbilico distantia, est ad velocitatem in Circulo in eadem à centro distantia, in subduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam illam distantiam.

Corol. 4. Corporum in Ellipsibus gyrantium velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi sunt eædem quæ corporum gyrantium in Circulis ad easdem distantias; hoc est (per Corol. 6. Prop. IV.) reciproce in subduplicata ratione distantiarum. Nam perpendicula jam sunt semi-axes minores; & hi sunt ut mediæ proportionales inter distantias & latera recta. Componatur hæc ratio inverse cum subduplicata ratione laterum rectorum directe, & fiet ratio subduplicata distantiarum inverse.

Corol. 5. In eadem figura, vel etiam in figuris diversis, quarum latera

latera recta principalia sunt æqualia, velocitas corporis est reciproce ut perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem.

Corol. 6. In Parabola, velocitas est reciproce in subduplicata ratione distantiæ corporis ab umbilico figuræ; in Ellipsi magis variatur, in Hyperbola minus, quam in hac ratione. Nam (per Corol. 2. Lem. XIV.) perpendiculum demissum ab umbilico ad tangentem Parabolæ est in subduplicata ratione distantiæ. In Hyperbola perpendiculum minus variatur, in Ellipsi magis.

Corol. 7. In Parabola velocitas corporis ad quamvis ab umbilico distantiam, est ad velocitatem corporis revolventis in Circulo ad eandem a centro distantiam, in subduplicata ratione numeri binarii ad unitatem; in Ellipsi minor est, in Hyperbola major quam in hac ratione. Nam per hujus Corollarium secundum, velocitas in vertice Parabolæ est in hac ratione, & per Corollaria sexta hujus & Propositionis quartæ, servatur eadem proportio in omnibus distantiis. Hinc etiam in Parabola velocitas ubique æqualis est velocitati corporis revolventis in Circulo ad dimidiam distantiam, in Ellipsi minor est, in Hyperbola major.

Corol. 8. Velocitas gyrantis in Sectione quavis Conica est ad velocitatem gyrantis in Circulo in distantia dimidii lateris recti principalis Sectionis, ut distantia illa ad perpendiculum ab umbilico in tangentem Sectionis demissum. Patet per Corollarium quintum.

Corol. 9. Unde cum (per Corol. 6. Prop. IV.) velocitas gyrantis in hoc Circulo sit ad velocitatem gyrantis in Circulo quovis alio, reciproce in subduplicata ratione distantiarum; fiet ex æquo velocitas gyrantis in Conica sectione ad velocitatem gyrantis in Circulo in eadem distantia, ut media proportionalis inter distantiam illam communem & semissem principalis lateris recti sectionis, ad perpendiculum ab umbilico communi in tangentem sectionis demissum.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IX.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, & quod vis illius quantitas absoluta sit cognita; requiritur Linea quam corpus describit, de loco dato, cum data velocitate, secundum datam rectam egrediens.

Vis centripeta tendens ad punctum S ea sit qua corpus p in orbita quavis data pq gyretur, & cognoscatur hujus velocitas in loco p. De

De loco P, secundum lineam PR, exeat corpus P, cum data velocitate, & mox inde, cogente vi centripeta, deflectat illud in Conisectionem PQ. Hanc igitur recta PR tanget in P. Tangat itidem recta aliqua pr Orbitam pq in p, & si ab S ad eas tangentes demitti intelligantur perpendicula, erit (per Corol. 1. Prop. XVI.) latus rectum principale Conisectionis ad latus rectum principale Orbitæ, in ratione composita ex duplicata ratione perpendiculorum & duplicata ratione velocitatum, atque adeo datur. Sit illud L. Datur præterea Conisectionis umbilicus S. Anguli RPS complementum ad duos rectos fiat angulus RPH, & dabitur positione linea PH, in qua umbilicus alter H locatur. Demisso ad PH perpendiculo SK, erigi intelligatur semiaxis conjugatus BC, & erit $SPq. - 2KPH + PHq. = SHq. = 4CHq. = 4BHq - 4BCq. = \overline{SP + PH}: quad. - L \times \overline{SP + PH} = SPq. + 2SPH + PHq. - L \times \overline{SP + PH}$. Addantur utrobique $2KPH - SPq - PHq + L \times \overline{SP + PH}$, & fiet $L \times \overline{SP + PH} = 2SPH + 2KPH$, seu $SP + PH$, ad PH, ut $2SP + 2KP$ ad L. Unde datur PH tam longitudine quam positione. Nimirum si ea sit corporis in P velocitas, ut latus rectum L minus fuerit quam $2SP + 2KP$, jacebit PH ad eandem partem tangentis PR cum linea PS, adeoque figura erit Ellipsis, & ex datis umbilicis S, H, & axe principali $SP + PH$, dabitur: Sin tanta sit corporis velocitas ut latus rectum L æquale fuerit $2SP + 2KP$, longitudo PH infinita erit, & propterea figura erit Parabola axem habens SH parallelum lineæ PK, & inde dabitur. Quod si corpus majori adhuc cum velocitate de loco suo P exeat, capienda erit longitudo PH ad alteram partem tangentis, adeoque tangente inter umbilicos pergente, figura erit Hyperbola axem habens principalem æqualem differentiæ linearum SP & PH, & inde dabitur. *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc in omni Conisectione ex dato vertice principali D, latere recto L, & umbilico S, datur umbilicus alter H capiendo DH, ad DS ut est latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4DS$. Nam proportio $SP + PH$ ad PH ut $2SP + 2KP$ ad L,

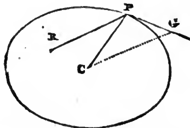
 in casu hujus Corollarii, fit $DS + DH$ ad DH ut $4\,DS$ ad L & divisim DS ad DH ut $4\,DS - L$ ad L.

Corol. 2. Unde si datur corporis velocitas in vertice principali D, invenietur Orbita expedite, capiendo scilicet latus rectum ejus, ad duplam distantiam DS, in duplicata ratione velocitatis hujus datæ ad velocitatem corporis in Circulo, ad distantiam DS, gyrantis (per Corol. 3. Prop. XVI.) dein DH ad DS ut latus rectum ad differentiam inter latus rectum & $4\,DS$.

Corol. 3. Hinc etiam si corpus moveatur in Sectione quacunque Conica, & ex Orbe suo impulsu quocunque exturbetur; cognosci potest Orbis in quo postea cursum suum peraget. Nam componendo proprium corporis motum cum motu illo quem impulsus solus generaret, habebitur motus quocum corpus de dato impulsus loco, secundum rectam positione datam, exibit.

Corol. 4. Et si corpus illud vi aliqua extrinsecus impressa continuo perturbetur, innotescet cursus quam proxime, colligendo mutationes quas vis illa in punctis quibusdam inducit, & ex seriei analogia mutationes continuas in locis intermediis æstimando.

Scholium.



Si corpus P vi centripeta ad punctum quodcunque datum R tendente moveatur in perimetro datæ cujuscunque Sectionis conicæ cujus centrum sit C, & requiratur Lex vis centripetæ: ducatur CG radio RP parallela, & Orbis tangenti PG occurrens in G; & vis illa (per Corol 1 & Schol. Prop. X, & Corol. 3. Prop. VII.) erit ut $\frac{CG\ cub.}{RP\ quad.}$

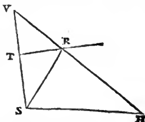
SECTIO

SECTIO IV.

De Inventione Orbium Ellipticorum, Parabolicorum & Hyperbolicorum ex umbilico dato.

LEMMA XV.

Si ab Ellipseos vel Hyperbolæ cujusvis umbilicis duobus S, H, *ad punctum quodvis tertium* V *inflectantur rectæ duæ* SV, HV, *quarum una* HV *æqualis sit axi principali figuræ, altera* SV *a perpendiculo* TR *in se demisso bisecetur in* T; *perpendiculum illud* TR *sectionem Conicam alicubi tanget: & contra, si tangit, erit* HV *æqualis axi principali figuræ.*



Secet enim perpendiculum TR rectam HV productam, si opus fuerit, in R, & jungatur SR. Ob æquales TS, TV, æquales erunt & rectæ SR, VR & anguli TRS, TRV. Unde punctum R erit ad Sectionem Conicam, & perpendiculum TR tanget eandem: & contra. *Q. E. D.*

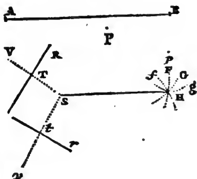
PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA X.

Datis umbilico & axibus principalibus describere Trajectorias Ellipticas & Hyperbolicas, quæ transibunt per puncta data, & rectas positione datas contingent.

Sit S communis umbilicus figurarum; AB longitudo axis principalis Trajectoriæ cujusvis; P punctum per quod Trajectoria debet transire; & TR recta quam debet tangere. Centro P intervallo $AB - SP$, si orbita sit ellipsis, vel $AB + SP$, si ea sit Hyperbola, describatur circulus HG. Ad tangentem TR demittatur perpendiculum ST, & producatur idem ad V, ut sit TV æqualis ST; centroque V & intervallo AB describatur circulus FH. Hac

 methodo

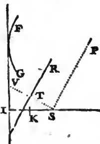
methodo sive dentur duo puncta P, p, sive duæ tangentes TR, tr, sive punctum P & tangens TR, describendi sunt circuli duo. Sit H eorum intersectio communis, & umbilicis S, H, axe illo dato describatur Trajectoria. Dico factum. Nam Trajectoria descripta (eo quod $PH + SP$ in Ellipsi, & $PH - SP$ in Hyperbola æquatur axi) transibit per punctum P, & (per Lemma superius) tanget rectam TR. Et eodem argumento vel transibit eadem per puncta duo P, p, vel tanget rectas duas TR, tr. *Q.E.F.*



PROPOSITIO XIX. PROBLEMA XI.

Circa datum umbilicum Trajectoriam Parabolicam describere, quæ transibit per puncta data, & rectas positione datas continget.

Sit S umbilicus, P punctum & TR tangens Trajectoriæ describendæ. Centro P, intervallo PS describe circulum FG. Ab umbilico ad tangentem demitte perpendicularem ST, & produc eam ad V, ut sit TV æqualis ST. Eodem modo describendus est alter circulus fg, si datur alterum punctum p; vel inveniendum alterum punctum v, si datur altera tangens tr; dein ducenda recta IF quæ tangat duos circulos FG, fg, si dantur duo puncta P, p, vel transeat per duo puncta V, v, si dantur duæ tangentes TR, tr, vel tangat circulum FG & transeat per punctum V, si datur punctum P & tangens TR. Ad FI demitte perpendicularem SI, eamque biseca in K; & axe SK, vertice principali K describatur Parabola. Dico factum. Nam Parabola, ob æquales SK & IK, SP & FP, transibit per punctum P; & (per Lemmatis XIV Corol. 3.) ob æquales ST & TV & angulum rectum STR, tanget rectam TR. *Q.E.F.*



PRO-

PROPOSITIO XX. PROBLEMA XII.

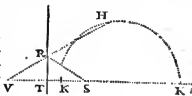
Circa datum umbilicum Trajectoriam quamvis ſpecie datam deſcribere, quæ per data puncta tranſibit & rectas tanget poſitione datas.

Caſ. 1. Dato umbilico S, deſcribenda ſit Trajectoria ABC per puncta duo B, C. Quoniam Trajectoria datur ſpecie, dabitur ratio axis principalis ad diſtantiam umbilicorum. In ea ratione cape KB ad BS, & LC ad CS. Centris B,C, intervallis BK, CL, deſcribe circulos duos. & ad rectam KL, quæ tangat eoſdem in K & L, demitte perpendiculum SG, idemque ſeca in A & a, ita ut ſit GA ad AS & Ga ad aS ut eſt KB ad BS, & axe Aa, verticibus A, a, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Sit enim H umbilicus alter Figuræ deſcriptæ, & cum ſit GA ad AS ut Ga ad aS, erit diviſim $Ga - GA$ ſeu Aa ad $aS - AS$ ſeu SH in eadem ratione, adeoque in ratione quam habet axis principalis Figuræ deſcribendæ ad diſtantiam umbilicorum ejus; & propterea Figura deſcripta eſt ejuſdem ſpeciei cum deſcribenda. Cumque ſint KB ad BS & LC ad CS in eadem ratione, tranſibit hæc Figura per puncta B, C, ut ex Conicis manifeſtum eſt.

Caſ. 2. Dato umbilico S, deſcribenda ſit Trajectoria quæ rectas duas TR, tr alicubi contingat. Ab umbilico in tangentes demitte perpendicula ST, St & produc eadem ad V, v, ut ſint TV, tv æquales TS, tS. Biſeca Vv in O, & erige perpendiculum infinitum OH, rectamque VS infinite productam ſeca in K & k ita, ut ſit VK ad KS & Vk ad kS ut eſt Trajectoriæ deſcribendæ axis principalis ad umbilicorum diſtantiam. Super diametro Kk deſcribatur circulus ſecans OH in H; & umbilicis S, H, axe principali ipſam VH æquante, deſcribatur Trajectoria. Dico factum. Nam biſeca Kk in X, & junge HX, HS, HV, Hv. Quoniam eſt VK ad KS ut Vk ad kS; & compoſite ut $VK + Vk$ ad $KS + kS$; diviſimque ut

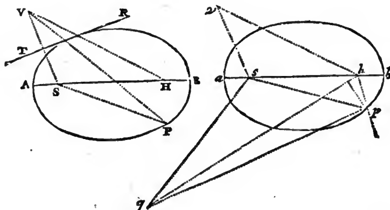
 ut $Vk - VK$ ad $kS - KS$, id est ut $2VX$ ad $2KX$ & $2KX$ ad $2SX$, adeoque ut VX ad HX & HX ad SX, similia erunt triangula VXH, HXS, & propterea VH erit ad SH ut VX ad XH, adeoque ut VK ad KS. Habet igitur Trajectoriæ descriptæ axis principalis VH eam rationem ad ipsius umbilicorum distantiam SH, quam habet Trajectoriæ describendæ axis principalis ad ipsius umbilicorum distantiam, & propterea ejusdem est speciei. Insuper cum VH, vH, æquentur axi principali, & VS, vS a rectis TR, tr perpendiculariter bisecentur, liquet, ex Lemmate XV, rectas illas Trajectoriam descriptam tangere. *Q. E. F.*

Cas. 3. Dato umbilico S describenda sit Trajectoria quæ rectam TR tanget in puncto dato R. In rectam TR demitte perpendicularem ST, & produc eandem ad V, ut sit TV æqualis ST. Junge VR, & rectam VS infinite productam seca in K & k, ita ut sit VK ad SK & Vk ad Sk ut Ellipseos describendæ axis principalis ad distantiam umbilicorum; circuloque super diametro Kk descripto, secetur producta recta VR in H, & umbilicis S, H, axe principali rectam VH æquante, describatur Trajectoria. Dico factum. Namque VH esse ad SH ut VK ad SK, atque adeo ut axis principalis Trajectoriæ describendæ ad distantiam umbilicorum ejus, patet ex demonstratis in Casu secundo, & propterea Trajectoriam descriptam ejusdem esse speciei cum describenda; rectam vero TR qua angulus VRS bisecatur, tangere Trajectoriam in puncto R, patet ex Conicis. *Q. E. F.*



Cas. 4. Circa umbilicum S describenda jam sit Trajectoria APB, quæ tangat rectam TR, transeatque per punctum quodvis P extra tangentem datum, quæque similis sit Figuræ apb, axe principali ab & umbilicis s, h descriptæ. In tangentem TR demitte perpendiculum ST, & produc idem ad V, ut sit TV æqualis ST. Angulis autem VSP, SVP fac angulos hsq, shq æquales; centroque q & intervallo quod sit ad ab ut SP ad VS describe circulum secantem Figuram apb in p. Junge sp & age SH quæ sit ad sh ut est SP ad sp, quæque angulum PSH angulo psh & angulum VSH angulo psq æquales constituat. Denique umbilicis S, H, & axe principali AB distantiam VH æquante, describatur sectio Conica. Dico factum. Nam si agatur sv quæ sit ad sp ut est sh ad

ad $s q$, quæque constituat angulum $v s p$ angulo $h s q$ & angulum $v s h$ angulo $p s q$ æquales, triangula $s v h$, $s p q$ erunt similia & propterea $v h$ erit ad $p q$ ut est $s h$ ad $s q$, id est (ob similia triangula



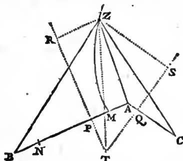
VSP, hsq) ut est VS ad SP seu ab ad pq. Æquantur ergo vh & ab. Porro ob similia triangula VSH, vsh, est VH ad SH ut vh ad sh, id est, axis Conicæ sectionis jam descriptæ ad illius umbilicorum intervallum, ut axis ab ad umbilicorum intervallum sh; & propterea Figura jam descripta similis est Figuræ apb. Transit autem hæc Figura per punctum P, eo quod triangulum PSH simile sit triangulo psh; & quia VH æquatur ipsius axi & VS bisecatur perpendiculariter a recta TR, tangit eadem rectam TR. *Q. E. F.*

LEMMA XVI.

A datis tribus punctis ad quartum non datum inflectere tres rectas quarum differentiæ vel dantur vel nullæ sunt.

Cas. 1. Sunto puncta illa data A, B, C & punctum quartum Z, quod invenire oportet; Ob datam differentiam linearum AZ, BZ, locabitur punctum Z in Hyperbola cujus umbilici sunt A & B, & principalis axis differentia illa data. Sit axis ille MN. Cape PM. ad

ad MA ut est MN ad AB, & erecta PR perpendiculari ad AB, demissaque ZR perpendiculari ad PR; erit, ex natura hujus Hyperbolæ, ZR ad AZ ut est MN ad AB. Simili discursu punctum Z locabitur in alia Hyperbola, cujus umbilici sunt A, C & principalis axis differentia inter AZ & CZ, ducique potest QS ipsi AC perpendicularis, ad quam si ab Hyperbolæ hujus puncto quovis Z demittatur normalis ZS, hæc fuerit ad AZ ut est differentia inter AZ & CZ ad AC. Dantur ergo rationes ipsarum ZR & ZS ad AZ & idcirco datur earundem ZR & ZS ratio ad invicem; ideoque si rectæ RP, SQ concurrant in T, & agatur TZ, figura $TRZS$, dabitur specie, & recta TZ in qua punctum Z alicubi locatur, dabitur positione. Eadem methodo per Hyperbolam tertiam, cujus umbilici sunt B & C & axis principalis differentia rectarum BZ, CZ, inveniri potest alia recta in qua punctum Z locatur. Habitis autem duobus Locis rectilineis, habetur punctum quæsitum Z in eorum intersectione. *Q. E. I.*



Cas. 2. Si duæ ex tribus lineis, puta AZ & BZ æquantur, punctum Z locabitur in perpendiculo bisecante distantiam AB, & locus alius rectilineus invenietur ut supra. *Q. E. I.*

Cas. 3. Si omnes tres æquantur, locabitur punctum Z in centro Circuli per puncta A, B, C transeuntis. *Q. E. I.*

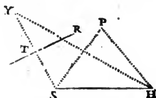
Solvitur etiam hoc Lemma problematicum per Librum Tactionum *Apollonii* a *Vieta* restitutum.

PROPOSITIO XXI. PROBLEMA XIII.

Trajectoriam circa datum umbilicum describere, quæ transibit per puncta data & rectas positione datas continget.

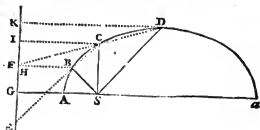
Detur umbilicus S, punctum P, & tangens TR, & inveniendus sit umbilicus alter H. Ad tangentem demitte perpendiculum ST, & produc idem ad Y, ut sit TY, æqualis ST, & erit YH æqualis axi principali. Junge SP, HP, & erit SP differentia inter HP & axem principalem. Hoc modo si dentur plures tangentes

tes TR vel plura puncta P, devenietur semper ad lineas totidem TH, vel PH, a dictis punctis T vel P ad umbilicum H ductas, quæ vel æquantur axibus, vel datis longitudinibus SP differunt ab iisdem, atque adeo quæ vel æquantur sibi invicem, vel datas habent differentias; & inde, per Lemma superius, datur umbilicus ille alter H. Habitis autem umbilicis una cum axis longitudine (quæ vel TH; vel, si Trajectoria Ellipsis est, $PH + SP$; sin Hyperbola, $PH - SP$) habetur Trajectoria. *Q. E. I.*



Scholium.

Casus ubi dantur tria puncta sic solvitur expeditius. Dentur puncta B, C, D. Junctas BC, CD produc ad E, F, ut sit EB ad EC ut SB ad SC, & FC ad FD ut SC ad SD. Ad EF ductam & productam demitte normales SG, BH, inque GS infinite producta cape GA ad AS & Ga ad aS ut est HB ad BS; & erit A vertex, & Aa axis principalis Trajectoriæ: quæ, perinde ut GA major, æqualis, vel minor fuerit quam AS, erit Ellipsis, Parabola vel Hyperbola; puncto a in primo casu cadente ad eandem partem lineæ GF cum puncto A; in secundo casu abeunte in infinitum; in tertio cadente ad contrariam partem lineæ GF. Nam si demittantur ad GF perpendicula CI, DK, erit IC ad HB ut EC ad EB, hoc est, ut SC ad SB; & vicissim IC ad SC ut HB ad SB sive ut GA ad SA. Et simili argumento probabitur esse KD ad SD in eadem ratione. Jacent ergo puncta B, C, D in Coni sectione circa umbilicum S ita descripta, ut rectæ omnes ab umbilico S ad singula Sectionis puncta ductæ, sint ad perpendicula a punctis iisdem ad rectam GF demissa in data illa ratione.



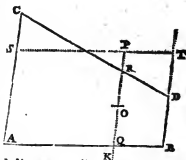
Methodo haud multum dissimili hujus problematis solutionem tradit Clarissimus Geometra *de la Hire*, Conicorum suorum Lib. VIII. Prop. XXV.

SECTIO V.

Inventio Orbium ubi umbilicus neuter datur.

LEMMA XVII.

Si a datæ Conicæ Sectionis puncto quovis P, *ad Trapezii alicujus* ABDC, *in Conica illa sectione inscripti, latera quatuor infinite producta* AB, CD, AC, DB, *totidem rectæ* PQ, PR, PS, PT *in datis angulis ducantur, singulæ ad singula: rectangulum ductarum ad opposita duo latera* PQ×PR, *erit ad rectangulum ductarum ad alia duo latera opposita* PS×PT *in data ratione.*



Cas. 1. Ponamus primo lineas ad opposita latera ductas parallelas esse alterutri reliquorum laterum, puta *PQ* & *PR* lateri *AC*, & *PS* ac *PT* lateri *AB*. Sintque insuper latera duo ex oppositis, puta *AC* & *BD*, sibi invicem parallela. Et recta quæ bisecat parallela illa latera erit una ex diametris Conicæ sectionis & bisecabit etiam *RQ*. Sit *O* punctum in quo *RQ* bisecatur, & erit *PO* ordinatim applicata ad diametrum illam. Produc *PO* ad *K* ut sit *OK* æqualis *PO*, & erit *OK* ordinatim applicata ad contrarias partes diametri. Cum igitur puncta *A*, *B*, & *K* sint ad Conicam sectionem, & *PK* secet *AB* in dato angulo, erit (per Prop. 17. & 18. Lib. III. Conicorum *Apollonii*) rectangulum *PQK* ad rectangulum *AQB* in data ratione. Sed *QK* & *PR* æquales sunt, utpote æqualium *OK*, *OP*, & *OQ*, *OR* differentiæ, & inde etiam rectangula *PQK* & *PQ*×*PR* æqualia sunt; atque adeo rectangulum *PQ*×*PR* est ad rectangulum *AQB*, hoc est ad rectangulum *PS*×*PT* in data ratione. *Q.E.D.*

Cas.

CURVARUM]LA COMPARARI POSSUNT.

Sit jam aGD vel PGD ſitq: ejus Centrum A. Axis Ka, Vertex a, Semiaxis conjugatus -rdinata rectangula BD = v. et Area ABDP vel aBDG vel aBDG = s ccurrens abſciſsæ AB in T. & compleatur parallelogrammum ABD[um] Conicarum dicatur poſterioris Abſciſsa z Ordinata x, et Area σ [p]riori an prior de poſteriori ſubduci debeat. Et in Forma ſexta ſcrib

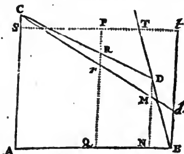
CURVARUM FORM[ARUM] AREÆ

I	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	
II	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	1. 4.
	2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	
	3	$\frac{dz^{\frac{5}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{e^2 s}{}=t$.
III	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	GDT *vel in* APDB ÷ TDB *Fig* 2. 3. 4.
		vel	$t=\frac{8de^2}{\eta^2}$ in aGDA $+\frac{f^2 v}{4e^2 x}$ *Fig* 3. 4.
	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	GDB. *Fig* 2. 3. 4.
		vel	xaGDK. *Fig* 3. 4.
	3	$\frac{d}{z^{2\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	BDPK. *Fig* 4.
	4	$\frac{d}{z^{3\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	
IV	1	$\frac{d}{z\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	AD *vel in* aGDA *Fig* 2. 3. 4.
		vel	$\frac{de}{\eta}$ in aGDA. *Fig*. 3. 4.
	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	OD *vel in* AODGa *Fig* 2. 3. 4.
		vel	DGa *Fig*. 3. 4.
	3	$\frac{d}{z^{2\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	aDGa ÷ △ aDB *Fig* 3. 4.
	4	$\frac{d}{z^{3\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	

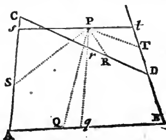
RESIDUUM TPERBOLA COMPARARI POSSUNT.

		CURVARUM FOUM	AREÆ
V	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} =$	
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} =$	
VI	1	$\frac{dz^{3\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} =$	
	2	$\frac{dz^{4\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}} =$	
VII	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz}$	$\frac{6de^2r+4dfps}{} = t$.
	2	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+g}$	3. 2.
	3	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+g}$	
	4	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+}$	t
VIII	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} =$	$\times\, aGDB \pm \triangle DBA$. Fig. 2 4
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} =$	
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} =$	
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}} =$	$\frac{deff}{dz^2g}v$ t .
IX	1	$\frac{dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}} =$	
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}} =$	$\frac{fgu}{x} = t$.
X	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{g+hz^{\eta}\sqrt{e+fz^{\eta}}} =$	3. 4.
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{g+hz^{\eta}\sqrt{e+fz^{\eta}}} =$	
XI	1	$dz^{-1}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} =$	
	2	$dz^{\eta-1}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} =$	
	3	$dz^{2\eta-1}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}} =$	

Cas. 2. Ponamus jam Trapezii latera opposita *AC* & *BD* non esse parallela. Age *Bd* parallelam *AC* & occurrentem tum rectæ *ST* in *t*, tum Conicæ sectioni in *d*. Junge *Cd* secantem *PQ* in *r*, & ipsi *PQ* parallelam age *DM* secantem *Cd* in *M* & *AB* in *N*. Jam ob similia triangula *BTt*, *DBN*; est *Bt* seu *PQ* ad *Tt* ut *DN* ad *NB*. Sic & *Rr* est ad *AQ* seu *PS* ut *DM* ad *AN*. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum *PQ* in *Rr* est ad rectangulum *PS* in *Tt*, ita rectangulum *NDM* est ad rectangulum *ANB*, & (per Cas. 1.) ita rectangulum *PQ* in *Pr* est ad rectangulum *PS* in *Pt*, ac divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum $PS \times PT$. *Q.E.D.*



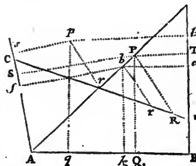
Cas. 3. Ponamus denique lineas quatuor *PQ*, *PR*, *PS*, *PT* non esse parallelas lateribus *AC*, *AB*, sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age *Pq*, *Pr* parallelas ipsi *AC*; & *Ps*, *Pt* parallelas ipsi *AB*; & propter datos angulos triangulorum *PQq*, *PRr*, *PSs*, *PTt*, dabuntur rationes *PQ* ad *Pq*, *PR* ad *Pr*, *PS* ad *Ps*, & *PT* ad *Pt*; atque adeo rationes compositæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per superius demonstrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data est: Ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q.E.D.*



LEMMA XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera Trapezii PQ×PR *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget Conicam sectionem circa Trapezium descriptam.*

Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P, puta p, concipe Conicam sectionem describi: dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, junge AP secantem hanc Conicam sectionem alibi quam in P, si fieri potest, puta in b. Ergo si ab his punctis p & b ducantur in datis angulis ad latera Trapezii rectæ pq, pr, ps, pt, & bk, br, bf, bd; erit ut $bk \times br$ ad $bf \times bd$ ita (per Lem. XVII) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per Hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem Trapeziorum $bkAf$, $PQAS$, ut bk ad bf ita PQ ad PS. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit br ad bd ut PR ad PT. Ergo Trapezia æquiangula $Drbd$, $DRPT$ similia sunt, & eorum diagonales Db, DP propterea coincidunt. Incidit itaque b in intersectionem rectarum AP, DP adeoque coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunque sumatur, incidit in assignatam Conicam sectionem. *Q. E. D.*



Corol. Hinc si rectæ tres PQ, PR, PS a puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas AB, CD, AC, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ PS *quad.* in data ratione; punctum P, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione Conica quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contra. Nam coeat linea BD cum linea AC manente positione trium AB, CD, AC; dein coeat etiam linea PT cum linea PS: & rectangulum $PS \times PT$ evadet PS *quad.* rectæque AB, CD quæ curvam in punctis A & B, C & D secabant, jam Curvam in punctis illis coeuntibus non amplius secare possunt sed tantum tangent.

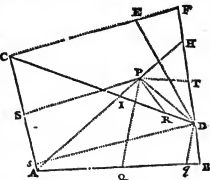
Scholium.

Nomen Conicæ sectionis in hoc Lemmate late sumitur, ita ut sectio tam Rectilinea per verticem Coni transiens, quam Circularis basi parallela includatur. Nam si punctum p incidit in rectam, qua quævis ex punctis quatuor A, B, C, D junguntur, Conica sectio verte-

vertetur in geminas Rectas, quarum una est recta illa in quam punctum p incidit, & altera est recta qua alia duo ex punctis quatuor junguntur. Si Trapezii anguli duo oppositi simul sumpti æquentur duobus rectis, & lineæ quatuor PQ, PR, PS, PT ducantur ad latera ejus vel perpendiculariter vel in angulis quibusvis æqualibus, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ æquale rectangulo sub duabus aliis $PS \times PT$, Sectio conica evadet Circulus. Idem fiet si lineæ quatuor ducantur in angulis quibusvis & rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ sit ad rectangulum sub aliis duabus $PS \times PT$ ut rectangulum sub sinubus angulorum S, T, in quibus duæ ultimæ PS, PT ducuntur, ad rectangulum sub sinubus angulorum Q, R in quibus duæ primæ PQ, PR ducuntur. Cæteris in casibus Locus puncti P erit aliqua trium figurarum quæ vulgo nominantur Sectiones Conicæ. Vice autem Trapezii $ABCD$ substitui potest Quadrilaterum cujus latera duo opposita se mutuo instar diagonalium decussant. Sed & e punctis quatuor A, B, C, D, possunt unum vel duo abire ad infinitum, eoque pacto latera figuræ quæ ad puncta illa convergunt, evadere parallela: quo in casu Sectio Conica transibit per cætera puncta, & in plagas parallelarum abibit in infinitum.

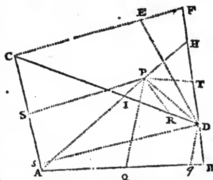
LEMMA XIX.

Invenire punctum P, *a quo si rectæ quatuor* PQ, PR, PS, PT, *ad alias totidem positione datas rectas* AB, CD, AC, BD, *singulæ ad singulas in datis angulis ducantur, rectangulum sub duabus ductis*, PQ×PR, *sit ad rectangulum sub aliis duabus* PS×PT *in data ratione.*



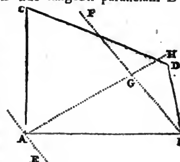
Lineæ AB, CD, ad quas rectæ duæ PQ, PR, unum rectangulorum continentes ducuntur, conveniant cum aliis duabus positione datis lineis in punctis A, B, C, D. Ab eorum aliquo A age rectam quamlibet AH, in qua velis punctum P reperiri. Secet ea lineas oppositas BD, CD, nimirum BD in H, & CD in I, & ob datos omnes angulos figuræ, dabuntur rationes PQ ad PA & PA

ad PS, adeoque ratio PQ ad PS. Auferendo hanc a data ratione $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$, dabitur ratio PR ad PT, & addendo datas rationes PI ad PR, & PT ad PH dabitur ratio PI ad PH atque adeo punctum P. *Q. E. I.*



Corol. 1. Hinc etiam ad Loci punctorum infinitorum P punctum quodvis D tangens duci potest. Nam chorda PD ubi puncta P ac D conveniunt, hoc est, ubi AH ducitur per punctum D, tangens evadit. Quo in casu ultima ratio evanescentium IP & PH invenietur. ut supra. Ipsi igitur AD duc parallelam CF, occurrentem BD in F, & in ea ultima ratione sectam in E, & DE tangens erit, propterea quod CF & evanescens IH parallelæ sunt, & in E & P similiter sectæ.

Corol. 2. Hinc etiam Locus punctorum omnium P definiri potest. Per quodvis punctorum A, B, C, D, puta A, duc Loci tangentem AE & per aliud quodvis punctum B duc tangenti parallelam BF occurrentem Loco in F. Inveniatur autem punctum F per Lem. XIX. Biseca BF in G, & acta indefinita AG erit positio diametri ad quam BG & FG ordinatim applicantur. Hæc AG occurrat Loco in H, & erit AH diameter sive latus transversum, ad quod latus rectum erit ut BGq ad AGH. Si AG nullibi occurrit Loco, linea AH existente infinita, Locus erit Parabola & latus rectum ejus ad diametrum AG



pertinens erit $\frac{BGq.}{AG}$ Sin ea alicubi occurrit, Locus Hyperbola erit ubi puncta A & H sita sunt ad easdem partes ipsius G: & Ellipsis, ubi G intermedium est, nisi forte angulus AGB rectus sit & insuper BG *quad.* æquale rectangulo AGH, quo in casu Circulus habebitur.

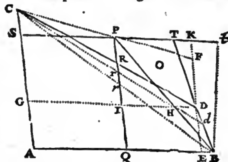
Atque ita Problematis Veterum de quatuor lineis ab *Euclide* incepti & ab *Apollonio* continuati non calculus, sed compositio Geometrica, qualem Veteres quærebant, in hoc Corollario exhibetur.

LEM-

LEMMA XX.

Si Parallelogrammum quodvis ASPQ *angulis duobus oppositis* A & P *tangit sectionem quamvis Conicam in punctis* A & P; &, *lateribus unius angulorum illorum infinite productis* AQ, AS, *occurrit eidem sectioni Conicæ in* B & C; *a punctis autem occursuum* B & C *ad quintum quodvis sectionis Conicæ punctum* D *agantur rectæ duæ* BD, CD *occurrentes alteris duobus infinite productis parallelogrammi lateribus* PS, PQ *in* T & R: *erunt semper abscissæ laterum partes* PR & PT *ad invicem in data ratione. Et contra, si partes illæ abscissæ sunt ad invicem in data ratione, punctum* D *tanget Sectionem Conicam per puncta quatuor* A, B, C, P *transeuntem.*

Cas. 1. Jungantur BP, CP & a puncto D agantur rectæ duæ DG, DE, quarum prior DG ipsi AB parallela sit & occurrat PB, PQ, CA in H, I, G; altera DE parallela sit ipsi AC & occurrat PC, PS, AB in F, K, E: & erit (per Lemma XVII.) rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$ in ratione data. Sed est PQ, ad DE (seu IQ,) ut PB ad HB, adeoque ut PT ad DH; & vicissim PQ, ad PT ut DE ad DH. Est & PR ad DF ut RC ad DC, adeoque ut (IG vel) PS ad DG, & vicissim PR ad PS ut DF ad DG; & conjunctis rationibus fit rectangulum $PQ \times PR$ ad rectangulum $PS \times PT$ ut rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, atque adeo in data ratione. Sed dantur PQ & PS & propterea ratio PR ad PT datur. *Q. E. D.*



Cas. 2. Quod si PR & PT ponatur in data ratione ad invicem, tum simili ratiocinio regrediendo, sequetur esse rectangulum $DE \times DF$ ad rectangulum $DG \times DH$, in ratione data, adeoque punctum D (per Lemma XVIII.) contingere Conicam sectionem transeuntem per puncta A, B, C, P. *Q. E. D.*

Corol.

De Motu Corporum.

Corol. 1. Hinc si agatur *BC* secans *PQ* in *r*, & in *PT* capiatur *Pt* in ratione ad *Pr*, quam habet *PT* ad *PR*: erit *Bt* tangens Conicæ sectionis ad punctum *B*. Nam concipe punctum *D* coire cum puncto *B* ita ut, chorda *BD* evanescente, *BT* tangens evadat, & *CD* ac *BT* coincident cum *CB* & *Bt*.

Corol. 2. Et vice versa si *Bt* sit tangens, & ad quodvis Conicæ sectionis punctum *D* conveniant *BD*, *CD*; erit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*. Et contra, si sit *PR* ad *PT* ut *Pr* ad *Pt*: convenient *BD*, *CD* ad Conicæ Sectionis punctum aliquod *D*.

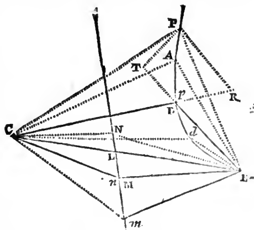
Corol. 3. Conica sectio non secat Conicam sectionem in punctis pluribus quam quatuor. Nam, si fieri potest, transeant duæ Conicæ sectiones per quinque puncta *A*, *B*, *C*, *P*, *O*; easque secet recta *BD* in punctis *D*, *d*, & ipsam *PQ* secet recta *Cd* in r. Ergo *PR* est ad *PT* ut *P* r ad *PT*; unde *PR* & *P* r sibi invicem æquantur, contra Hypothesin.

LEMMA XXI.

Si rectæ duæ mobiles & infinitæ BM, CM *per data puncta* B, C, *ceu polos ductæ, concursu suo* M *describant tertiam positione datam rectam* MN; *& aliæ duæ infinitæ rectæ* BD, CD *cum prioribus duabus ad puncta illa data* B, C *datos angulos* MBD, MCD *efficientes ducantur; dico quod hæ duæ* BD, CD *concursu suo* D *describent sectionem Conicam per puncta* B, C *transeuntem. Et vice versa, si rectæ* BD, CD *concursu suo* D *describant Sectionem Conicam per data puncta*, B, C, A *transeuntem, & sit angulus* DBM *semper æqualis angulo dato* ABC, *angulusque* DCM *semper æqualis angulo dato* ACB: *punctum* M *continget rectam positione datam.*

Nam

Nam si in recta MN detur punctum N, & ubi punctum mobile M incidit in immotum N, incidat punctum mobile D in immotum P. Junge CN, BN, CP, BP, & a puncto P age rectas PT, PR occurrentes ipsis BD, CD in T & R, & facientes angulum BPT æqualem angulo dato BNM, & angulum CPR æqualem angulo dato CNM. Cum ergo (ex Hypothesi) æquales sint anguli MBD, NBP, ut & anguli MCD, NCP; aufer communes NBD & NCD, & restabunt æquales NBM & PBT, NCM & PCR: adeoque triangula NBM, BPT similia sunt, ut & triangula NCM, PCR. Quare PT est ad NM ut PB ad NB, & PR ad NM ut PC ad NC. Sunt autem puncta B, C, N, P immobilia. Ergo PT & PR datam habent rationem ad NM, proindeque datam rationem inter se; atque adeo, per Lemma xx, punctum D (perpetuus rectarum mobilium BT & CR concursus) contingit sectionem Conicam, per puncta B, C, P transeuntem. Q. E. D.



Et contra, si punctum mobile D contingat sectionem Conicam transeuntem per data puncta B, C, A, & sit angulus DBM semper æqualis angulo dato ABC, & angulus DCM semper æqualis angulo dato ACB, & ubi punctum D incidit successive in duo quævis sectionis puncta immobilia p, P, punctum mobile M incidat successive in puncta duo immobilia n, N: per eadem n, N agatur recta nN, & hæc erit Locus perpetuus puncti illius mobilis M. Nam, si fieri potest, versetur punctum M in linea aliqua Curva. Tanget ergo punctum D sectionem Conicam per puncta quinque B, C, A, p, P, transeuntem, ubi punctum M perpetuo tangit lineam Curvam. Sed & ex jam demonstratis tanget etiam punctum D sectionem Conicam per eadem quinque puncta B, C, A, p, P transeuntem, ubi punctum

 tum M perpetuo tangit lineam Rectam. Ergo duæ sectiones Conicæ transibunt per eadem quinque puncta, contra Corol. 3. Lem. xx. Igitur punctum M versari in linea Curva absurdum est. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXII. PROBLEMA XIV.

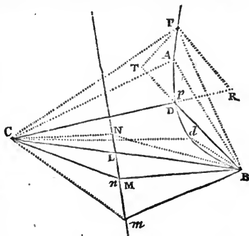
Trajectoriam per data quinque puncta describere.

Dentur puncta quinque A, B, C, P, D. Ab eorum aliquo A ad alia duo quævis B, C, quæ post poli nominentur, age rectas AB, AC, hisque parallelas TPS, PRQ per punctum quartum P. Deinde a polis duobus B, C age per punctum quintum D infinitas duas BDT, CRD, novissime ductis TPS, PRQ (priorem priori & posteriorem posteriori) occurrentes in T & R. Denique de rectis PT, PR, acta recta tr ipsi TR parallela, abscinde quasvis Pt, Pr ipsis PT, PR proportionales; & si per earum terminos t, r & polos B, C actæ Bt, Cr concurrant in d, locabitur punctum illud d in Trajectoria quæsita. Nam punctum illud d (per Lemma xx.) versatur in Conica Sectione per puncta quatuor A, B, C, P transeunte; &, lineis Rr, Tt evanescentibus, coit punctum d cum puncto D. Transit ergo sectio Conica per puncta quinque A, B, C, P, D. *Q. E. D.*

Idem

Idem aliter.

E punctis datis junge tria quævis A, B, C; &, circum duo eorum B, C ceu polos, rotando angulos magnitudine datos ABC, ACB, applicentur crura BA, CA primo ad punctum D, deinde ad punctum P, & notentur puncta M, N in quibus altera crura BL, CL casu utroque se decussant. Agatur recta infinita MN, & rotentur anguli illi mobiles circum polos suos B, C, ea lege ut crurum BL, CL vel BM, CM intersectio quæ jam sit m, incidat semper in rectam illam infinitam MN & crurum BA, CA, vel BD, CD intersectio, quæ jam sit d, Trajectoriam quæsitam $PADdB$ delineabit. Nam punctum d, per Lem. XXI, continget sectionem Conicam per puncta B, C transeuntem; & ubi punctum m accedit ad puncta L, M, N, punctum d (per constructionem) accedet ad puncta A, D, P. Describetur itaque sectio Conica transiens per puncta quinque A, B, C, P, D. *Q.E.F.*



Corol. 1. Hinc recta expedite duci potest, quæ Trajectoriam quæsitam, in puncto quovis dato B, continget. Accedat punctum d ad punctum B, & recta Bd evadet tangens quæsita.

Corol. 2. Unde etiam Trajectoriarum Centra, Diametri & Latera recta inveniri possunt, ut in Corollario secundo Lemmatis XIX.

Scholium.

Constructio prior evadet paulo simplicior jungendo BP, & in ea, si opus est, producta capiendo Bp ad BP ut est PR ad PT; & per p agendo rectam infinitam pd ipsi SPT parallelam, inque ea capiendo semper pd æqualem Pr; & agendo rectas Bd, Cr concurrentes in d. Nam cum sint Pr ad Pt, PR ad PT, pB ad PB, pd ad Pt in eadem ratione; erunt pd & Pr semper æqua-

 les.

 les. Hac methodo puncta Trajectoriæ inveniuntur expeditissime, nisi mavis Curvam, ut in constructione secunda, describere Mechanice.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA XV.

Trajectoriam describere quæ per data quatuor puncta transibit, & rectam continget positione datam.

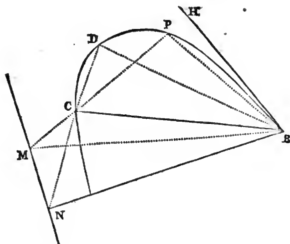
Cas. 1. Dentur tangens *HB*, punctum contactus *B*, & alia tria puncta *C*, *D*, *P*. Junge *BC*, & agendo *PS* parallelam *BH*, & *PQ* parallelam *BC*, comple parallelogrammum *BSPQ*.

Age *BD* secantem *SP* in *T*, & *CD* secantem *PQ* in *R*. Denique, agendo quamvis *tr* ipsi *TR* parallelam, de *PQ*, *PS* abscinde *Pr*, *Pt* ipsis *PR*, *PT* proportionales respective; & actarum *Cr*, *Bt* concursus *d* (per Lem. xx.) incidet semper in Trajectoriam describendam.

Idem

Idem aliter.

Revolvatur tum angulus magnitudine datus CBH circa polum B, tum radius quilibet rectilineus & utrinque productus DC circa polum C. Notentur puncta M, N in quibus anguli crus BC secat radium illum ubi crus alterum BH concurrit cum eodem radio in punctis P & D. Deinde ad actam infinitam MN concur-



rant perpetuo radius ille CP vel CD & anguli crus BC, & cruris alterius BH concursus cum radio delineabit Trajectoriam quæsitam.

Nam si in constructionibus Problematis superioris accedat punctum A ad punctum B, lineæ CA & CB coincident, & linea AB in ultimo suo situ fiet tangens BH, atque adeo constructiones ibi positæ evadent eædem cum constructionibus hic descriptis. Delineabit igitur cruris BH concursus cum radio sectionem Conicam per puncta C, D, P transeuntem, & rectam BH tangentem in puncto B. *Q.E.F.*

Cas. 2. Dentur puncta quatuor B, C, D, P extra tangentem HI sita. Junge bina lineis BD, CP concurrentibus in G, tangen-

tique occurrentibus in H & I. Secetur tangens in A, ita ut sit HA ad AI, ut est rectangulum sub media proportionali inter CG & CP & media proportionali inter BH & HD, ad rectangulum sub media proportionali inter DG & GB & media proportionali inter PI & IC; & erit A punctum contactus. Nam si rectæ PI parallela HX Trajectoriam secet in punctis quibusvis X & Y: erit (ex Conicis) punctum A ita locandum, ut fuerit HA *quad.* ad AI *quad.* in ratione composita ex ratione rectanguli XHY ad rectangulum BHD seu rectanguli CGP ad rectangulum DGB & ex ratione rectanguli BHD ad rectangulum PIC. Invento autem contactus puncto, A, describetur Trajectoria ut in casu primo. *Q. E. F.* Capi autem potest punctum A vel inter puncta H & I, vel extra; & perinde Trajectoria dupliciter describi.

PROPOSITIO XXIV. PROBLEMA XVI.

Trajectoriam describere quæ transibit per data tria puncta & rectas duas positione datas continget.

Dentur tangentes HI, KL & puncta B, C, D. Per punctorum duo quævis B, D age rectam infinitam BD tangentibus occurrentem in punctis H, K. Deinde etiam per alia duo quævis C, D age infinitam CD tangentibus occurrentem in punctis I, L. Actas ita seca in R & S, ut sit HR ad KR ut est media proportionalis inter BH & HD ad mediam proportionalem inter BK & KD; & IS ad LS ut est media proportionalis inter CI & ID ad mediam proportionalem inter CL

&

& LD. Seca autem pro lubitu vel inter puncta K & H, I & L, vel extra eadem: dein age RS ſecantem tangentes in A & P, & erunt A & P puncta contactuum. Nam ſi A & P ſupponantur eſſe puncta contactuum alicubi in tangentibus ſita; & per punctorum H, I, K, L quodvis I, in tangente alterutra HI ſitum, agatur recta IY tangenti alteri KL parallela, quæ occurrat curvæ in X & Y, & in ea ſumatur IZ media proportionalis inter IX & IY: erit ex Conicis, rectangulum XIY ſeu IZ *quad.* ad LP *quad.* ut rectangulum CID ad rectangulum CLD, id eſt (per conſtructionem) ut SI *quad.* ad SL *quad.* atque adeo IZ ad LP ut SI ad SL. Jacent ergo puncta S, P, Z in una recta. Porro tangentibus concurrentibus in G, erit (ex Conicis) rectangulum XIY ſeu IZ *quad.* ad IA *quad.* ut GP *quad.* ad GA *quad*: adeoque IZ ad IA ut GP ad GA. Jacent ergo puncta P, Z & A in una recta, adeoque puncta S, P & A ſunt in una recta. Et eodem argumento probabitur quod puncta R, P & A ſunt in una recta. Jacent igitur puncta contactuum A & P in recta RS. Hiſce autem inventis, Trajectoria deſcribetur ut in caſu primo Problematis ſuperioris. *Q.E.F.*

LEMMA XXII.

Figuras in alias ejuſdem generis figuras mutare.

Tranſmutanda ſit figura quævis HGI. Ducantur pro lubitu rectæ duæ parallelæ AO, BL tertiam quamvis poſitione datam AB ſecantes in A & B, & a figuræ puncto quovis G, ad rectam AB ducatur quævis GD, ipſi OA parallela. Deinde a puncto aliquo O, in linea OA dato, ad punctum D ducatur recta OD, ipſi BL occurrens in d, & a puncto occurſus erigatur recta dg datum quemvis angulum cum recta BL continens, atque eam habens rationem ad Od quam habet DG ad OD; & erit g punctum in figura nova hgi puncto G reſpondens. Eadem ratione puncta ſingula figuræ primæ dabunt puncta totidem figuræ novæ.

Concipe

Concipe igitur punctum G motu continuo percurrere puncta omnia figuræ primæ, & punctum g motu itidem continuo percurret puncta omnia figuræ novæ & eandem describet. Distinctionis gratia nominemus DG ordinatam primam, dg ordinatam novam; AD abscissam primam, ad abscissam novam; O polum, OD radium abscindentem, OA radium ordinatum primum, & Oa (quo parallelogrammum $OABa$ completur) radium ordinatum novum.

Dico jam quod, si punctum G tangit rectam Lineam positione datam, punctum g tanget etiam Lineam rectam positione datam. Si punctum G tangit Conicam sectionem, punctum g tanget etiam Conicam sectionem. Conicis sectionibus hic Circulum annumero. Porro si punctum G tangit Lineam tertii ordinis Analytici, punctum g tanget Lineam tertii itidem ordinis; & sic de curvis lineis superiorum ordinum. Lineæ duæ erunt ejusdem semper ordinis Analytici quas puncta G, g tangunt. Etenim ut est ad ad OA ita sunt Od ad OD, dg ad DG, & AB ad AD; ideoque AD æqualis est $\frac{OA \times AB}{ad}$, & DG æqualis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam si punctum G tangit rectam Lineam, atque adeo in æquatione quavis, qua relatio inter abscissam AD & ordinatam DG habetur, indeterminatæ illæ AD & DG ad unicam tantum dimensionem ascendunt, scribendo in hac æquatione $\frac{OA \times AB}{ad}$ pro AD, & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro DG, producetur æquatio nova, in qua abscissa nova ad & ordinata nova dg ad unicam tantum dimensionem ascendent, atque adeo quæ designat Lineam rectam. Sin AD & DG (vel earum alterutra) ascendebant ad duas dimensiones in æquatione prima, ascendent itidem ad & dg ad duas in æquatione secunda. Et sic de tribus vel pluribus dimensionibus. Indeterminatæ ab, dg in æquatione secunda & AD, DG in prima ascendent semper ad eundem dimensionum numerum & propterea Lineæ, quas puncta G, g tangunt, sunt ejusdem ordinis Analytici.

Dico

Dico præterea quod si recta aliqua tangat lineam curvam in figura prima, hæc recta eodem modo cum curva in figuram novam translata tanget lineam illam curvam in figura nova: & contra. Nam si Curvæ puncta quævis duo accedunt ad invicem & coeunt in figura prima, puncta eadem translata accedent ad invicem & coibunt in figura nova, atque adeo rectæ, quibus hæc puncta junguntur, simul evadent curvarum tangentes in figura utraque. Componi possent harum assertionum Demonstrationes more magis Geometrico. Sed brevitati consulo.

Igitur si figura rectilinea in aliam transmutanda est, sufficit rectarum a quibus conflatur intersectiones transferre, & per easdem in figura nova lineas rectas ducere. Sin curvilineam transmutare oportet, transferenda sunt puncta, tangentes & aliæ rectæ quarum ope curva linea definitur. Inservit autem hoc Lemma solutioni difficiliorum Problematum, transmutando figuras propositas in simpliciores. Nam rectæ quævis convergentes transmutantur in parallelas, adhibendo pro radio ordinato primo, lineam quamvis rectam quæ per concursum convergentium transit: id adeo quia concursus ille hoc pacto abit in infinitum, lineæ autem parallelæ sunt quæ ad punctum infinite distans tendunt. Postquam autem Problema solvitur in figura nova, si per inversas operationes transmutetur hæc figura in figuram primam, habebitur solutio quæsita.

Utile est etiam hoc Lemma in solutione Solidorum Problematum. Nam quoties duæ sectiones Conicæ obvenerint, quarum intersectione Problema solvi potest, transmutare licet earum alterutram, si Hyperbola sit vel Parabola, in Ellipsin: deinde Ellipsis facile mutatur in Circulum. Recta item & sectio Conica, in constructione Planorum Problematum, vertuntur in Rectam & Circulum.

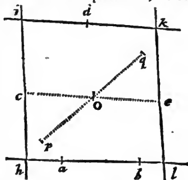
PROPOSITIO XXV. PROBLEMA XVII.

Trajectoriam describere quæ per data duo puncta transibit & rectas tres continget positione datas.

Per concursum tangentium quarumvis duarum cum se invicem, & concursum tangentis tertiæ cum recta illa, quæ per puncta duo data transit, age rectam infinitam; eaque adhibita pro radio ordinato primo, transmutetur figura, per Lemma superius, in figuram novam. In

L hac

hac figura tangentes illæ duæ evadent sibi invicem parallelæ, & tangens tertia fiet parallela recta per puncta duo data transeunti. Sunto hi, kl tangentes illæ duæ parallelæ, ik tangens tertia, & hl recta huic parallela transiens per puncta illa a, b, per quæ Conica sectio in hac figura nova transire debet; & parallelogrammum $hikl$ complens. Secentur rectæ hi, ik, kl in c, d, e, ita ut sit hc ad latus quadratum rectanguli ahb, ic ad id, & ke ad kd ut est summa rectarum hi & kl ad summam trium linearum quarum prima est recta ik, & alteræ duæ sunt latera quadrata rectangulorum ahb & alb: & erunt c, d, e puncta contactuum. Etenim, ex Conicis, sunt hc quadratum ad rectangulum ahb, & ic quadratum ad id quadratum, & ke quadratum ad kd quadratum, & el quadratum ad rectangulum alb in eadem ratione; & propterea hc ad latus quadratum ipsius ahb, ic ad id, ke ad kd, & el ad latus quadratum ipsius alb sunt in subduplicata illa ratione, & composite, in data ratione omnium antecedentium hi & kl ad omnes consequentes, quæ sunt latus quadratum rectanguli ahb & recta ik & latus quadratum rectanguli alb. Habentur igitur ex data illa ratione puncta contactuum c, d, e, in figura nova. Per inversas operationes Lemmatis novissimi transferantur hæc puncta in figuram primam & ibi, per Probl. XIV., describetur Trajectoria. *Q. E. F.* Ceterum perinde ut puncta a, b jacent vel inter puncta h, l, vel extra, debent puncta c, d, e vel inter puncta h, i, k, l capi, vel extra. Si punctorum a, b alterutrum cadit inter puncta h, l, & alterum extra, Problema impossibile est.



PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA XVIII.

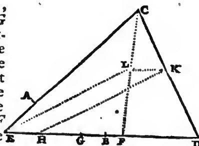
Trajectoriam describere quæ transibit per punctum datum & rectas quatuor positione datas continget.

Ab intersectione communi duarum quarumlibet tangentium ad intersectionem communem reliquarum duarum agatur recta infinita,

ta, & eadem pro radio ordinato primo adhibita, transmutetur figura (per Lem. XXII.) in figuram novam, & tangentes binæ, quæ ad radium ordinatum primum concurrebant, jam evadent parallelæ. Sunto illæ *bi* & *kl*, *ik* & *hl* continentes parallelogrammum *hikl*. Sitque *p* punctum in hac nova figura, puncto in figura prima dato respondens. Per figuræ centrum *O* agatur *pq*; & existente *Oq* æquali *Op*, erit *q* punctum alterum per quod sectio Conica in hac figura nova transire debet. Per Lemmatis XXII operationem inversam transferatur hoc punctum in figuram primam, & ibi habebuntur puncta duo per quæ Trajectoria describenda est. Per eadem vero describi potest Trajectoria illa per Probl. XVII. *Q. E. F.*

LEMMA XXIII.

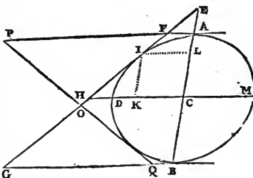
Si rectæ duæ positione datæ AC, BD, *ad data puncta* A, B, *terminentur, datamque habeant rationem ad invicem, &* *recta* CD, *qua puncta indeterminata* C, D *junguntur, secetur in ratione data in* K: *dico quod punctum* K *locabitur in recta positione data.*



Concurrant enim rectæ *AC*, *BD* in *E*, & in *BE* capiatur *BG* ad *AE* ut est *BD* ad *AC*, sitque *FD* semper æqualis datæ *EG*; & erit ex constructione *EC* ad *GD*, hoc est, ad *EF* ut *AC* ad *BD*, adeoque in ratione data, & propterea dabitur specie triangulum *EFC*. Secetur *CF* in *L* ut sit *CL* ad *CF* in ratione *CK* ad *CD*; &, ob datam illam rationem, dabitur etiam specie triangulum *EFL*; proindeque punctum *L* locabitur in recta *EL* positione data. Junge *LK*, & similia erunt triangula *CLK*, *CFD*; &, ob datam *FD* & datam rationem *LK* ad *FD*, dabitur *LK*. Huic æqualis capiatur *EH*, & erit semper *ELKH* parallelogrammum. Locatur igitur punctum *K* in parallelogrammi illius latere positione dato *HK*. *Q. E. D.*

LEMMA XXIV.

Si rectæ tres tangant quamcunque Conisectionem, quarum duæ parallelæ sint ac dentur positione; dico quod Sectionis semidiameter hisce duabus parallela, sit media proportionalis inter harum segmenta, punctis contactuum & tangenti tertiæ interjecta.



Sunto *AF*, *GB* parallelæ duæ Conisectionem *ADB* tangentes in *A* & *B*; *EF* recta tertia Conisectionem tangens in *I*, & occurrens prioribus tangentibus in *F* & *G*; sitque *CD* semidiameter Figuræ tangentibus parallela: Dico quod *AF*, *CD*, *BG* sunt continue proportionales.

Nam si diametri conjugatæ *AB*, *DM* tangenti *FG* occurrant in *E* & *H*, seque mutuo secent in *C*, & compleatur parallelogrammum *IKCL*; erit, ex natura Sectionum Conicarum, ut *EC* ad *CA* ita *CA* ad *CL*, & ita divisim *EC — CA* ad *CA — CL*, seu *EA* ad *AL*, & composite *EA* ae *EA + AL* seu *EL* ut *EC* ad *EC + CA* seu *EB*; adeoque (ob similitudinem triangulorum *EAF*, *ELI*, *ECH*, *EBG*) *AF* ad *LI* ut *CH* ad *BG*. Est itidem, ex natura Sectionum Conicarum, *LI* (seu *CK*) ad *CD* ut *CD* ad *CH*; atque, adeo ex æquo perturbate, *AF* ad *CD* ut *CD* ad *BG*. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si tangentes duæ *FG*, *PQ* tangentibus parallelis *AF*, *BG* occurrant in *F* & *G*, *P* & *Q*, seque mutuo secent in *O*; erit (ex æquo perturbate) *AF* ad *BQ* ut *AP* ad *BG*, & divisim ut *FP* ad *GQ*, atque adeo ut *FO* ad *OG*.

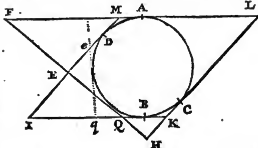
Corol. 2 Unde etiam rectæ duæ *PG*, *FQ* per puncta *P* & *G*, *F* & *Q* ductæ, concurrent ad rectam *ACB* per centrum Figuræ & puncta contactuum *A*, *B* transeuntem.

LEM-

LEMMA XXV.

Si parallelogrammi latera quatuor infinite producta tangant Sectionem quamcunque Conicam, & abscindantur ad tangentem quamvis quintam; sumantur autem laterum quorumvis duorum conterminorum abscissæ terminatæ ad angulos oppositos parallelogrammi: dico quod abscissa alterutra sit ad latus illud a quo est abscissa, ut pars lateris alterius contermini inter punctum contactus & latus tertium, est ad abscissarum alteram.

Tangant parallelogrammi *MLIK* latera quatuor *ML*, *IK*, *KL*, *MI* sectionem Conicam in *A*, *B*, *C*, *D* & secet tangens quinta *FQ* hæc latera in *F*, *Q*, *H* & *E*; sumantur autem laterum *MI*, *KI* abscissæ *ME*, *KQ*, vel laterum *KL*, *ML* abscissæ *KH*, *MF*: dico quod sit *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*, & *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. Nam per Corollarium secundum Lemmatis superioris, est *ME* ad *EI* ut (*AM* seu) *BK* ad *BQ*, & componendo *ME* ad *MI* ut *BK* ad *KQ*. *Q.E.D.* Item *KH* ad *HL* ut (*BK* seu) *AM* ad *AF*, & dividendo *KH* ad *KL* ut *AM* ad *MF*. *Q.E.D.*



Corol. 1. Hinc si datur parallelogrammum *IKLM*, circa datam Sectionem Conicam descriptum, dabitur rectangulum $KQ \times ME$, ut & huic æquale rectangulum $KH \times MF$.

Corol. 2. Et si sexta ducatur tangens *eq* tangentibus *KI*, *MI* occurrens in *q* & *e*; rectangulum $KQ \times ME$ æquabitur rectangulo $Kq \times Me$; eritque *KQ* ad *Me* ut *Kq* ad *ME*, & divisim ut *Qq* ad *Ee*.

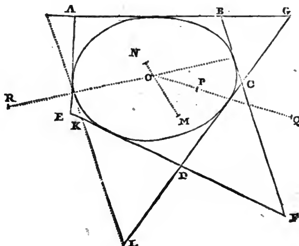
Corol. 3. Unde etiam si *Eq*, *eQ* jungantur & bisecentur, & recta per puncta bisectionum agatur, transibit hæc per centrum Sectionis Conicæ. Nam cum sit *Qq* ad *Ee* ut *KQ* ad *Me*, transibit eadem

 dem recta per medium omnium Eq, eQ, MK; (per Lem. XXIII) & medium rectæ MK est centrum Sectionis.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA XIX.

Trajectoriam describere quæ rectas quinque positione datas continget.

Dentur positione tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA. Figuræ quadrilateræ sub quatuor quibusvis contentæ $ABFE$ diagonales AF, BE biseca in M & N, & (per Corol. 3. Lem. XXV) recta MN per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Rursus Figuræ quadrilateræ $BGDF$, sub aliis quibusvis quatuor



tangentibus contentæ, diagonales (ut ita dicam) BD, GF biseca in P & Q: & recta PQ per puncta bisectionum acta transibit per centrum Trajectoriæ. Dabitur ergo centrum in concursu bisecantium. Sit illud O. Tangenti cuivis BC parallelam age KL, ad eam distantiam ut centrum O in medio inter parallelas locetur, & acta KL tanget Trajectoriam describendam. Secet hæc tangentes

gentes alias quasvis duas GCD, FDE in L & K. Per harum tangentium non parallelarum CL, FK cum parallelis CF, KL concursus C & K, F & L age CK, FL concurrentes in R, & recta OR ducta & producta secabit tangentes parallelas CF, KL in punctis contactuum. Patet hoc per Corol. 2. Lem. XXIV. Eadem methodo invenire licet alia contactuum puncta, & tum demum per Probl. XIV. Trajectoriam describere. Q.E.F.

Scholium.

Problemata, ubi dantur Trajectoriarum vel centra vel Asymptoti, includuntur in præcedentibus. Nam datis punctis & tangentibus una cum centro, dantur alia totidem puncta aliæque tangentes a centro ex altera ejus parte æqualiter distantes. Asymptotos autem pro tangente habenda est, & ejus terminus infinite distans (si ita loqui fas sit) pro puncto contactus. Concipe tangentis cujusvis punctum contactus abire in infinitum, & tangens vertetur in Asymptoton, atque constructiones Problematis XIV. & Casus primi Problematis XV. vertentur in constructiones Problematum ubi Asymptoti dantur.

Postquam Trajectoria descripta est, invenire licet axes & umbilicos ejus hac methodo. In constructione & figura Lemmatis XXI, fac ut angulorum mobilium PBN, PCN crura BP, CP, quorum concursu Trajectoria describebatur, sint sibi invicem parallela, eumque servantia situm revolvantur circa polos suos B, C in figura illa. Interea vero describant altera angulorum illorum crura CN, BN, concursu suo K vel k, Circulum $IBKGC$. Sit Circuli hujus centrum O. Ab hoc centro ad Regulam MN, ad quam altera illa crura CN, BN interea concurrebant dum

dum Trajectoria describebatur, demitte normalem *OH* Circulo occurrentem in *K* & *L*. Et ubi crura illa altera *CK*, *BK* concurrunt ad punctum illud *K* quod Regulæ propius est, crura prima *CP*, *BP* parallela erunt axi majori, & perpendicularia minori; & contrarium eveniet si crura eadem concurrunt ad punctum remotius *L*. Unde si detur Trajectoriæ centrum, dabuntur axes. Hisce autem datis, umbilici sunt in promptu.

Axium vero quadrata sunt ad invicem ut *KH* ad *LH*, & inde facile est Trajectoriam specie datam per data quatuor puncta describere. Nam si duo ex punctis datis constituantur poli *C*, *B*, tertium dabit angulos mobiles *PCK*, *PBK*; his autem datis describi potest Circulus *I B K G C*. Tum ob datam specie Trajectoriam, dabitur ratio *OH* ad *OK*, adeoque ipsa *O H*. Centro *O* & intervallo *O H* describe alium circulum, & recta quæ tangit hunc circulum, & transit per concursum crurum *CK*, *B K*, ubi crura prima *CP*, *BP* concurrunt ad quartum datum punctum, erit Regula illa *MN* cujus ope Trajectoria describetur. Unde etiam vicissim Trapezium specie datum (si casus quidam impossibiles excipiantur) in data quavis Sectione Conica inscribi potest.

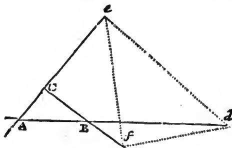
Sunt & alia Lemmata quorum ope Trajectoriæ specie datæ, datis punctis & tangentibus describi possunt. Ejus generis est, quod si recta linea per punctum quodvis positione datum ducatur, quæ datam Conisectionem in punctis duobus intersecet, & intersectionum intervallum bisecetur, punctum bisectionis tanget aliam Conisectionem ejusdem speciei cum priore, atque axes habentem prioris axibus parallelos. Sed propero ad magis utilia.

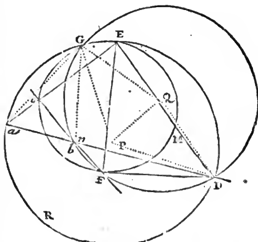
LEMMA

LEMMA XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF* describe tria circulorum segmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales respective. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum *DE DF*, *EF* ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in *G*, sintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* describe circulum, qui secet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* secans circulum secundum *DFG* in *b*, tum *aE* secans circulum





De Motu Corporum culum tertium *EMF* in *c*. Et compleatur Figura *ABCdef* similis & æqualis Figuræ *abcDEF*. Dico factum.

Agatur enim *Fc* ipsi *aD* occurrens in *n*, & jungantur *aG*, *bG*, *QG*, *QD*, *PD*. Ex constructione est angulus *EaD* æqualis angulo *CAB*, & angulus *acF* æqualis angulo *ACB*, adeoque triangulum *anc* triangulo *ABC* æquiangulum. Ergo angulus *anc* seu *FnD* angulo *ABC*, adeoque angulo *FbD* æqualis est; & propterea punctum *n* incidit in punctum *b*. Porro angulus *GPQ*, qui dimidius est anguli ad centrum *GPD* æqualis est angulo ad circumferentiam *GaD*; & angulus *GQP*, qui dimidius est anguli ad centrum *GQD*, æqualis est complemento ad duos rectos anguli ad circumferentiam *GbD*, adeoque æqualis angulo *Gba*; suntque ideo triangula *GPQ*, *Gab* similia; & *Ga* est ad *ab* ut *GP* ad *PQ*; id est (ex constructione) ut *Ga* ad *AB*. Æquantur itaque *ab* & *AB*; & propterea triangula *abc*, *ABC*, quæ modo similia esse probavimus, sunt etiam æqualia. Unde, cum tangant insuper trianguli *DEF* anguli *D*, *E*, *F* trianguli *abc* latera *ab*, *ac*, *bc* respective compleri potest Figura *ABCdef* Figuræ *abcDEF* similis & æqualis, atque eam complendo solvetur Problema. *Q.E.F.*

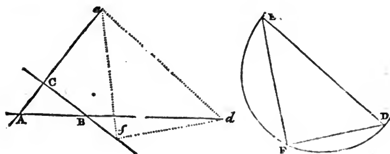
Corol.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes longitudine datæ rectis tribus positione datis interjacebunt. Concipe triangulum DEF, puncto D ad latus EF accedente, & lateribus DE, DF in directum positis, mutari in lineam rectam, cujus pars data DE rectis positione datis AB, AC, & pars data DF rectis positione datis AB, BC interponi debet; & applicando constructionem præcedentem ad hunc casum solvetur Problema.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA XX

Trajectoriam specie & magnitudine datam describere, cujus partes datæ rectis tribus positione datis interjacebunt.

Describenda sit Trajectoria quæ sit similis & æqualis Lineæ curvæ DEF, quæque a rectis tribus AB, AC, BC positione datis,



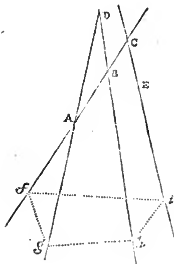
in partes datis hujus partibus DE & EF similes & æquales secabitur.

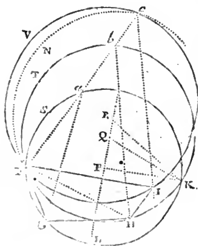
Age rectas DE, EF, DF, & trianguli hujus DEF pone angulos D, E, F ad rectas illas positione datas (per Lem. XXVI.) Dein circa triangulum describe Trajectoriam Curvæ DEF similem & æqualem. *Q.E.F.*

LEMMA XXVII.

Trapezium ſpecie datum deſcribere cujus anguli ad rectas quatuor poſitione datas, quæ neque omnes parallelæ ſunt, neque ad commune punctum convergunt, ſinguli ad ſingulas conſiſtent.

Dentur poſitione rectæ quatuor *ABC*, *AD*, *BD*, *CE*, quarum prima ſecet ſecundam in *A*, tertiam in *B*, & quartam in *C*: & deſcribendum ſit Trapezium *f g h i* quod ſit Trapezio *FGHI*





ſimile, & cujus angulus *f*. angulo dato *F* æqualis, tangat rectam *ABC*, cæterique anguli *g*, *h*, *i*. cæteris angulis datis *G*, *H*, *I* æquales, tangant cæteras lineas *AD*, *BD*, *CE* reſpective. Jungatur *FH* & ſuper *FG*, *FH*, *FI* deſcribantur totidem circulorum ſegmenta *FSG*, *FTH*, *FVI*, quorum primum *FSG* capiat angulum

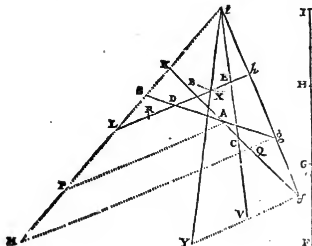
lum æqualem angulo BAD, secundum FTH capiat angulum æqualem angulo CBD, ac tertium FVI capiat angulum æqualem angulo ACE. Describi autem debent segmenta ad eas partes linearum FG, FH, FI, ut literarum $FSGF$ idem sit ordo circularis qui literarum $BADB$, utque literæ $FTHF$ eodem ordine cum literis $CBDC$, & literæ $FVIF$ eodem cum literis $ACEA$ in orbem redeant. Compleantur segmenta in circulos integros, sitque P centrum circuli primi FSG, & Q centrum secundi FTH. Jungatur & utrinque producatur PQ, & in ea capiatur QR in ea ratione ad PQ quam habet BC ad AB. Capiatur autem QR ad eas partes puncti Q ut literarum P, Q, R idem sit ordo atque literarum A, B, C: centroque R & intervallo RF describatur circulus quartus FNc secans circulum tertium FVI in c. Jungatur Fc secans circulum primum in a & secundum in b. Agantur aG, bH, cI, & Figuræ $abcFGHI$ similis constituatur Figura $ABCfghi$: Eritque Trapezium $fghi$ illud ipsum quod constituere oportebat.

Secent enim circuli duo primi FSG, FTH se mutuo in K. Jungantur PK, QK, RK, aK, bK, cK, & producatur QP ad L. Anguli ad circumferentias FaK, FbK, FcK sunt semisses angulorum FPK, FQK, FRK ad centra, adeoque angulorum illorum dimidiis LPK, LQK, LRK æquales. Est ergo Figura $PQRK$ Figuræ $abcK$ æquiangula & similis, & propterea ab est ad bc ut PQ ad QR; id est, ut AB ad BC. Angulis insuper FaG, FbH, FcI æquantur fAg, fBh, fCi per constructionem. Ergo Figuræ $abcFGHI$ Figura similis $ABCfghi$ compleri potest. Quo facto Trapezium $fghi$ constituetur simile Trapezio $FGHI$ & angulis suis f, g, h, i tanget rectas ABC, AD, BD, CE. Q. E. F.

Corol. Hinc recta duci potest cujus partes, rectis quatuor positione datis dato ordine interjectæ, datam habebunt proportionem ad invicem. Augeantur anguli FGH, GHI usque eo, ut rectæ FG, GH, HI in directum jaceant; & in hoc casu construendo Problema, ducetur recta $fghi$ cujus partes fg, gh, hi, rectis quatuor positione datis AB & AD, AD & BD, BD & CE interjectæ, erunt ad invicem ut lineæ FG, GH, HI, eundemque servabunt ordinem inter se. Idem vero sic fit expeditius.

Producantur AB ad K, & $B\mathcal{D}$ ad L, ut sit BK ad AB ut HI ad GH; & $\mathcal{D}L$ ad $B\mathcal{D}$ ut GI ad FG; & jungatur KL occurrens rectæ CE in i. Producatur iL ad M, ut sit LM ad iL ut GH ad HI, & agatur tum $M\mathcal{Q}$ ipsi LB parallela rectæque $A\mathcal{D}$ occurrens in g, tum gi secans AB, $B\mathcal{D}$ in f, h. Dico factum.

Secet enim Mg rectam AB in $\mathcal{Q}$, & $A\mathcal{D}$ rectam KL in S, & agatur $A\mathcal{P}$ quæ sit ipsi $B\mathcal{D}$ parallela & occurrat iL in $\mathcal{P}$, & erunt gM ad Lh (gi ad hi, Mi ad Li, GI ad HI, AK ad BK) & $A\mathcal{P}$ ad BL in eadem ratione. Secetur $\mathcal{D}L$ in R



ut sit $\mathcal{D}L$ ad RL in eadem illa ratione, & ob proportionales gS ad gM, AS ad $A\mathcal{P}$, & $\mathcal{D}S$ ad $\mathcal{D}L$; erit, ex æquo, ut gS ad Lh ita AS ad BL & $\mathcal{D}S$ ad RL; & mixtim, $BL - RL$ ad $Lh - BL$ ut $AS - \mathcal{D}S$ ad $gS - AS$. Id est BR ad Bh ut $A\mathcal{D}$ ad Ag, adeoque ut $B\mathcal{D}$ ad $g\mathcal{Q}$. Et vicissim BR ad $B\mathcal{D}$ ut Bh ad $g\mathcal{Q}$, seu fh ad fg. Sed ex constructione linea BL eadem ratione secta fuit in $\mathcal{D}$ & R atque linea FI in G & H: ideoque est BR ad $B\mathcal{D}$ ut FH ad FG. Ergo fh est ad fg ut FH ad FG. Cum igitur sit etiam gi ad hi ut Mi ad Li, id est, ut GI ad HI, patet lineas FI, fi in g & h, G & H similiter sectas esse. $\mathcal{Q}.E.F.$

Ir

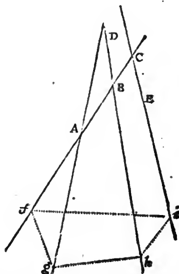
In constructione Corollarii hujus postquam ducitur LK secans CE in i, producere licet iE ad V, ut sit EV ad Ei ut FH ad HI, & agere Vf parallelam ipsi BD. Eodem recidit si centro i, intervallo IH, describatur circulus secans BD in X, & producatur iX ad Y, ut sit iY æqualis IF, & agatur Yf ipsi BD parallela.

Problematis hujus solutiones alias *Wrennus* & *Wallisius* olim excogitarunt.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA XXI.

Trajectoriam specie datam describere, quæ a rectis quatuor positione datis in partes secabitur, ordine, specie & proportione datas.



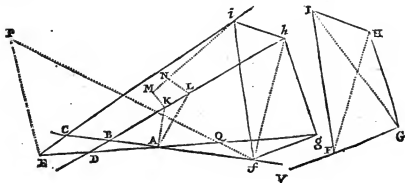


Describenda sit Trajectoria $fghi$, quæ similis sit Lineæ curvæ $FGHI$, & cujus partes fg, gh, hi illius partibus FG, GH, HI similes & proportionales, rectis AB & AD, AD & BD, BD & CE positione datis, prima primis, secunda secundis, tertia tertiis interjaceant. Actis rectis FG, GH, HI, FI, describatur (per Lem. XXVII.) Trapezium $fghi$ quod sit Trapezio $FGHI$ simile & cujus anguli f, g, h, i tangant rectas illas positione datas AB, AD, BD, CE, singuli singulas dicto ordine. Deinde circa hoc Trapezium describatur Trajectoria curvæ Lineæ $FGHI$ consimilis.

Scholium

Scholium.

Construi etiam potest hoc Problema ut sequitur. Junctis FG, GH, HI, FI produc GF ad V, jungeque FH, IG, & angulis FGH, VFH fac angulos CAK, DAL æquales. Concurrant AK, AL cum recta BD in K & L, & inde agantur KM, LN, quarum KM constituat angulum AKM æqualem angulo GHI, sitque ad AK ut est HI ad GH; & LN constituat angulum ALN æqualem angulo FHI, sitque ad AL ut HI ad FH. Ducantur autem AK, KM, AL, LN ad eas partes linearum AD, AK, AL, ut literæ $CAKMC$, $ALKA$, $DALND$ eodem ordine cum literis $FGHIF$ in orbem fedeant; & acta MN occurrat rectæ CE in i. Fac angulum iEP æqua-



lem angulo IGF, sitque PE ad Ei ut FG ad GI; & per P agatur PQf, quæ cum recta ADE contineat angulum PQE æqualem angulo FIG, rectæque AB occurrat in f, & jungatur fi. Agantur autem PE & PQ ad eas partes linearum CE, PE, ut literarum $PEiP$ & $PEQP$ idem sit ordo circularis qui literarum $FGHIF$, & si super linea fi eodem quoque literarum ordine constituatur Trapezium $fghi$ Trapezio $FGHI$ simile, & circumscribatur Trajectoria specie data solvetur Problema.

Hactenus de Orbibus inveniendis. Superest ut Motus corporum in Orbibus inventis determinemus.

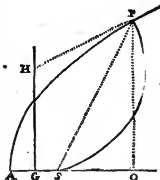
SECTIO

SECTIO VI.

De Inventione Motuum in Orbibus datis.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XXII.

Corporis in data Trajectoria Parabolica moti invenire locum ad tempus assignatum.



Sit S umbilicus & A vertex principalis Parabolæ, sitque $4\,AS \times M$ æquale areæ Parabolicæ abscindendæ APS, quæ radio SP, vel post excessum corporis de vertice descripta fuit, vel ante appulsum ejus ad verticem describenda est. Innotescit quantitas areæ illius abscindendæ ex tempore ipsi proportionali. Biseca AS in G, erigeque perpendiculum GH æquale 3 M, & Circulus centro H, intervallo HS descriptus secabit Parabolam in loco quæsito P. Nam, demissa ad axem perpendiculari PO & ducta PH, est $AGq + GHq \,(= HPq = \overline{AO - AG}:quad. + \overline{PO - GH}:quad.) = AOq + POq - 2GAO - 2GH \times PO + AGq + GHq$. Unde $2\,GH \times PO \,(= AOq + POq - 2\,GAO) = AOq + \frac{3}{4}POq$. Pro AOq scribe $AO \times \frac{POq}{4\,AS}$; &, applicatis terminis omnibus ad $3\,PO$ ductisque in $2\,AS$ fiet $\frac{4}{3}GH \times AS \,(= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3\,AS}{6} \times PO = \frac{4\,AO - 3\,SO}{6} \times PO =$ areæ $\overline{APO - SPO})$ $=$ areæ APS. Sed GH erat 3 M, & inde $\frac{4}{3}GH \times AS$ est $4\,AS \times$ M. Ergo area abscissa APS æqualis est abscindendæ $4\,AS \times$ M. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc GH est ad AS, ut tempus quo corpus descripsit arcum AP ad tempus quo corpus descripsit arcum inter verticem A & perpendiculum ad axem ab umbilico S erectum.

Corol. 2. Et Circulo HSP per corpus motum P perpetuo transeunte, velocitas puncti H est ad velocitatem quam corpus habuit in

in vertice A, ut 3 ad 8; adeoque in ea etiam ratione est linea GH ad lineam rectam quam corpus tempore motus sui ab A ad P, ea cum velocitate quam habuit in vertice A, describere posset.

Corol. 3. Hinc etiam vice versa inveniri potest tempus quo corpus descripsit arcum quemvis assignatum AP. Junge AP & ad medium ejus punctum erige perpendiculum rectæ GH occurrens in H.

LEMMA XXVIII.

Nulla extat Figura Ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per æquationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri.

Intra Ovalem detur punctum quodvis, circa quod ceu polum revolvatur perpetuo linea recta, uniformi cum motu, & interea in recta illa exeat punctum mobile de polo, pergatque semper ea cum velocitate, quæ sit ut rectæ illius intra Ovalem quadratum. Hoc motu punctum illud describet Spiralem gyris infinitis. Jam si areæ Ovalis a recta illa abscissæ incrementum per finitam æquationem inveniri potest, invenietur etiam per eandem æquationem distantia puncti a polo, quæ huic areæ proportionalis est, adeoque omnia Spiralis puncta per æquationem finitam inveniri possunt: & propterea rectæ cujusvis positione datæ intersectio cum Spirali inveniri etiam potest per æquationem finitam. Atqui recta omnis infinite producta Spiralem secat in punctis numero infinitis, & æquatio, qua intersectio aliqua duarum linearum invenitur, exhibet earum intersectiones omnes radicibus totidem, adeoque ascendit ad tot dimensiones quot sunt intersectiones. Quoniam Circuli duo se mutuo secant in punctis duobus, intersectio una non invenietur nisi per æquationem duarum dimensionum, qua intersectio altera etiam inveniatur. Quoniam duarum sectionum Conicarum quatuor esse possunt intersectiones, non potest aliqua earum generaliter inveniri nisi per æquationem quatuor dimensionum, qua omnes simul inveniantur. Nam si intersectiones illæ seorsim quærantur, quoniam eadem est omnium lex & conditio, idem erit calculus in casu unoquoque & propterea eadem semper conclusio, quæ igitur debet omnes intersectiones simul complecti & indifferenter exhibere. Unde

Unde etiam intersectiones Sectionum Conicarum & Curvarum tertiæ potestatis, eo quod sex esse possunt, simul prodeunt per æquationes sex dimensionum, & intersectiones duarum Curvarum tertiæ potestatis, quia novem esse possunt, simul prodeunt per æquationes dimensionum novem. Id nisi necessario fieret, reducere liceret Problemata omnia Solida ad Plana, & plusquam Solida ad Solida. Loquor hic de Curvis potestate irreducibilibus. Nam si æquatio per quam Curva definitur, ad inferiorem potestatem reduci possit, Curva non erit unica, sed ex duabus vel pluribus composita, quarum intersectiones per calculos diversos seorsim inveniri possunt. Ad eundem modum intersectiones binæ rectarum & sectionum Conicarum prodeunt semper per æquationes duarum dimensionum; ternæ rectarum & Curvarum irreducibilium tertiæ potestatis per æquationes trium, quaternæ rectarum & Curvarum irreducibilium quartæ potestatis per æquationes dimensionum quatuor, & sic in infinitum. Ergo rectæ & Spiralis intersectiones numero infinitæ, cum Curva hæc sit simplex & in Curvas plures irreducibilis, requirunt æquationes numero dimensionum & radicum infinitas, quibus intersectiones omnes possunt simul exhiberi. Est enim eadem omnium lex & idem calculus. Nam si a polo in rectam illam secantem demittatur perpendiculum, & perpendiculum illud una cum secante revolvatur circa polum, intersectiones Spiralis transibunt in se mutuo, quæque prima erat seu proxima, post unam revolutionem secunda erit, post duas tertia, & sic deinceps: nec interea mutabitur æquatio nisi pro mutata magnitudine quantitatum per quas positio secantis determinatur. Unde cum quantitates illæ post singulas revolutiones redeunt ad magnitudines primas, æquatio redibit ad formam primam, adeoque una eademque exhibebit intersectiones omnes, & propterea radices habebit numero infinitas, quibus omnes exhiberi possunt. Nequit ergo intersectio rectæ & Spiralis per æquationem finitam generaliter inveniri, & idcirco nulla extat Ovalis cujus area, rectis imperatis abscissa, possit per talem æquationem generaliter exhiberi.

Eodem argumento, si intervallum poli & puncti, quo Spiralis describitur, capiatur Ovalis perimetro abscissæ proportionale, probari potest quod longitudo perimetri nequit per finitam æquationem generaliter exhiberi. De Ovalibus autem hic loquor quæ non tanguntur a figuris conjugatis in infinitum pergentibus.

De Motu Corporum.

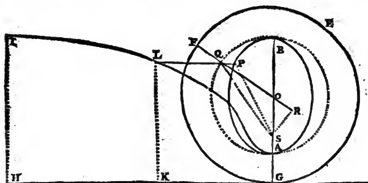
Corollarium.

Hinc area Ellipseos, quæ radio ab umbilico ad corpus mobile ducto describitur, non prodit ex dato tempore, per æquationem finitam; & propterea per descriptionem Curvarum Geometrice rationalium determinari nequit. Curvas Geometrice rationales appello quarum puncta omnia per longitudines æquationibus definitas, id est, per longitudinum rationes complicatas, determinari possunt; cæterasque (ut Spirales, Quadratrices, Trochoides) Geometrice irrationales. Nam longitudines quæ sunt vel non sunt ut numerus ad numerum (quemadmodum in decimo Elementorum) sunt Arithmetice rationales vel irrationales. Aream igitur Ellipseos tempori proportionalem abscindo per Curvam Geometrice irrationalem ut sequitur.

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XXIII.

Corporis in data Trajectoria Elliptica moti invenire locum ad tempus assignatum.

Ellipseos *A P B* sit *A* vertex principalis, *S* umbilicus, & *O* centrum, sitque *P* corporis locus inveniendus. Produc *O A* ad *G*, ut sit *O G* ad *O A* ut *O A* ad *O S*. Erige perpendiculum *G H*, cen-



troque *O* & intervallo *O G* describe circulum *E F G*, & super regula *G H*, ceu fundo, progrediatur Rota *G E F* revolvendo circa axem suum, & interea puncto suo *A* describendo Trochoidem *A L I*. Quo-

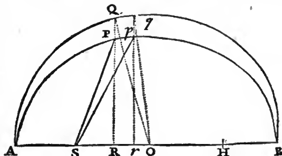
Quo facto, cape $G K$ in ratione ad Rotæ perimetrum $G E F G$, ut est tempus quo corpus progrediendo ab A descripsit arcum $A P$, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Erigatur perpendiculum $K L$ occurrens Trochoidi in L, & acta $L P$ ipsi $K G$ parallela occurret Ellipsi in corporis loco quæsito P.

Nam centro O, intervallo $O A$ describatur semicirculus $A Q B$, & arcui $A Q$ occurrat $L P$ producta in Q, junganturque $S Q$, $O Q$. Arcui $E F G$ occurrat $O Q$ in F, & in eandem $O Q$ demittatur perpendiculum $S R$. Area $A P S$ est ut area $A Q S$, id est, ut differentia inter sectorem $O Q A$ & triangulum $O Q S$, sive ut differentia rectangulorum $\frac{1}{2} O Q \times A Q$ & $\frac{1}{2} O Q \times S R$, hoc est, ob datam $\frac{1}{2} O Q$, ut differentia inter arcum $A Q$ & rectam $S R$, adeoque (ob æqualitatem datarum rationum $S R$ ad sinum arcus $A Q$, $O S$ ad $O A$, $O A$ ad $O G$, $A Q$ ad $G F$, & divisim $A Q - S R$ ad $G F -$ sin. arc. $A Q$.) ut $G K$ differentia inter arcum $G F$ & sinum arcus $A Q$. Q. E. D.

Scholium.

Cæterum, cum difficilis sit hujus Curvæ descriptio, præstat solutionem vero proximam adhibere. Inveniatur tum angulus quidam B, qui sit ad angulum graduum 57,29578, quem arcus radio æqualis subtendit, ut est umbilicorum distantia $S H$ ad Ellipseos diametrum $A B$; tum etiam longitudo quædam L, quæ sit ad radium in eadem ratione inverse. Quibus semel inventis, Problema deinceps confit per sequentem Analysin. Per constructionem quamvis (vel utcunque conjecturam faciendo) cognoscatur corporis locus P proximus vero ejus loco p. Demissaque ad axem Ellipseos ordinatim applicata $P R$, ex proportione diametrorum Ellipseos, dabitur Circuli circumscripti $A Q B$ ordinatim applicata $R Q$, quæ sinus est anguli $A O Q$ existente $A O$ radio. Sufficit angulum illum rudi calculo in numeris proximis invenire. Cognoscatur etiam angulus tempori proportionalis,

 tionalis, id est, qui sit ad quatuor rectos, ut est tempus quo corpus descripsit arcum Ap, ad tempus revolutionis unius in Ellipsi. Sit angulus iste N. Tum capiatur & angulus D ad angulum B, ut est sinus iste anguli AOQ ad radium, & angulus E ad angulum $N - AOQ + D$, ut est longitudo L ad longitudinem eandem L cosinu anguli AOQ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Postea capiatur tum angulus F ad angulum B, ut est sinus anguli $AOQ + E$ ad radium, tum angulus G ad angulum $N - AOQ - E + F$ ut est longitudo L ad longitudinem eandem cosinu anguli $AOQ + E$ diminutam ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Tertia vice capiatur angulus H ad angulum B, ut est sinus anguli $AOQ + E + G$ ad radium; & angulus I ad angulum $N - AOQ - E - G + H$, ut est longitudo L ad eandem longitudinem cosinu anguli $AOQ + E + G$ diminutam, ubi angulus iste recto minor est, auctam ubi major. Et sic pergere licet in infinitum. Denique capiatur angulus AOq æqualis angulo $AOQ + E + G + I +$ &c. & ex cosinu ejus Or & ordinata pr, quæ est ad sinum ejus



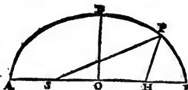
qr ut Ellipseos axis minor ad axem majorem, habebitur corporis locus correctus p. Si quando angulus $N - AOQ + D$ negativus est, debet signum $+$ ipsius E ubique mutari in $-$, & signum $-$ in $+$. Idem intelligendum est de signis ipsorum G & I, ubi anguli $N - AOQ - E + F$, & $N - AOQ - E - G + H$ negativi prodeunt. Convergit autem series infinita $AOQ + E + G + I$ &c. quam celerrime, adeo ut vix unquam opus fuerit ultra progredi quam ad terminum secundum E. Et fundatur calculus in hoc Theoremate, quod area APS sit differentia inter arcum AQ & rectam ab umbilico S in Radium OQ perpendiculariter demissam.

Non dissimili calculo conficitur Problema in Hyperbola. Sit ejus Centrum O, Vertex A, Umbilicus S & Asymptotos OK. Cognoscatur

noscatur quantitas areæ abscindendæ tempori proportionalis. Sit ea A, & fiat conjectura de positione rectæ SP, quæ aream APS abscindat veræ proximam. Jungatur OP, & ab A & P ad Asymptoton agantur AI, PK Asymptoto alteri parallelæ, & per Tabulam Logarithmorum dabitur Area $AIKP$, eique æqualis area OPA, quæ subducta de triangulo OPS relinquet aream abscissam APS. Applicando areæ abscindendæ A & abscissæ APS differentiam duplam $2\,APS - 2$ A vel $2\,A - 2\,APS$ ad lineam SN, quæ ab umbilico S in tangentem PT perpendicularis est, orietur longitudo chordæ PQ. Inscribatur autem chorda illa PQ inter A & P, si area abscissa APS major sit area abscindenda A, secus ad puncti P contrarias partes: & punctum Q erit locus corporis accuratior. Et computatione repetita invenietur idem accuratior in perpetuum.

Atque his calculis Problema generaliter confit Analytice. Verum usibus Astronomicis accommodatior est calculus particularis qui sequitur. Existentibus AO, OB, OD semiaxibus Ellipseos, & L ipsius latere recto, ac D differentia inter semiaxem minorem OD & lateris recti semissem $\frac{1}{2}$ L; quære tum angulum Y, cujus sinus sit ad Radium ut est rectangulum sub differentia illa D, & semisumma axium $AO + OD$ ad quadratum axis majoris AB; tum angulum Z, cujus sinus sit ad Radium ut est duplum rectangulum sub umbilicorum distantia SH & differentia illa D ad triplum quadratum semiaxis majoris AO. His angulis semel inventis; locus corporis sic deinceps determinabitur. Sume angulum T proportionalem tempori quo arcus BP descriptus est, seu motui medio (ut loquuntur) æqualem; & angulum V (primam medii motus æquationem) ad angulum Y (æquationem maximam primam) ut est sinus dupli anguli T ad Radium: atque

atque angulum X (æquationem secundam) ad angulum Z (æquationem maximam secundam) ut est cubus sinus anguli T ad cubum Radii. Angulorum T, V, X vel summæ T + X + V, si angulus T recto minor est, vel differentiæ T + X — V, si is recto major est rectisque duobus minor, æqualem cape angulum *BHP* (motum medium æquatum) &, si *HP* occurrat Ellipsi in *P*, acta *SP* abscindet aream *BSP* tempori proportionalem quamproxime. Hæc Praxis satis expedita videtur, propterea quod angulorum perexiguorum V & X (in minutis secundis, si placet, positorum) figuras duas tresve primas invenire sufficit. Sed & satis accurata est ad Theoriam Planetarum. Nam in Orbe vel Martis ipsius, cujus Æquatio centri maxima est graduum decem, error vix superabit minutum unum secundum. Invento autem angulo motus medii æquati *BHP*, angulus veri motus *BSP* & distantia *SP* in promptu sunt per *Wardi* methodum notissimam.



Hactenus de motu corporum in lineis Curvis. Fieri autem potest ut mobile recta descendat vel recta ascendat, & quæ ad istiusmodi Motus spectant, pergo jam exponere.

SECTIO

SECTIO VII.

De Corporum Ascensu & Descensu Rectilineo.

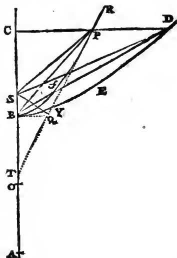
PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XXIV.

Posito quod vis centripeta sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a centro, Spatia definire quæ corpus recta cadendo datis temporibus describit.

Cas. 1. Si corpus non cadit perpendiculariter describet id, per Corol. 1. Prop. XIII, Sectionem aliquam Conicam cujus umbilicus congruit cum centro virium. Sit Sectio illa Conica *ARPB* & umbilicus ejus *S*. Et primo si Figura Ellipsis est, super hujus axe majore *AB* describatur Semicirculus *ADB*, & per corpus decidens transeat recta *DPC* perpendicularis ad axem; actisque *DS*, *PS* erit area *ASD* areæ *ASP* atque adeo etiam tempori proportionalis. Manente axe *AB* minuatur perpetuo latitudo Ellipseos; & semper manebit area *ASD* tempori proportionalis. Minuatur latitudo illa in infinitum, &, Orbe *APB* jam coincidente cum axe *AB* & umbilico *S* cum axis termino *B*, descendet corpus in recta *AC*, & area *ABD* evadet tempori proportionalis. Dabitur itaque Spatium *AC*, quod corpus de loco *A* perpendiculariter cadendo tempore dato describit, si modo tempori proportionalis capiatur area *ABD*, & a puncto *D* ad rectam *AB* demittatur perpendicularis *DC*. *Q. E. I.*

DE MOTU CORPORUM

Cas. 2. Si Figura illa RPB Hyperbola est, describatur ad eandem diametrum principalem AB Hyperbola rectangula BED: & quoniam areæ CSP, $CBfP$, $SPfB$ sunt ad areas CSD, $CBED$, $SDEB$, singulæ ad singulas, in data ratione altitudinum CP, CD; & area $SPfB$ proportionalis est tempori quo corpus P movebitur per arcum PfB; erit etiam area $SDEB$ eidem tempori proportionalis. Minuatur latus rectum Hyperbolæ RPB in infinitum manente latere transverso, & coibit arcus PB cum recta CB & umbilicus S cum vertice B & recta SD cum recta BD. Proinde area $BDEB$ proportionalis erit tempori quo corpus C recto descensu describit lineam CB. *Q. E. I.*



Cas. 3. Et simili argumento si Figura RPB Parabola est, & eodem vertice principali B describatur alia Parabola BED, quæ semper maneat data interea dum Parabola prior in cujus perimetro corpus P movetur, diminuto & in nihilum redacto ejus latere recto, conveniat cum linea CB; fiet segmentum Parabolicum $BDEB$ proportionale tempori quo corpus illud P vel C descendet ad centrum S vel B. *Q.E.I.*

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA IX.

Positis jam inventis, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis C *est ad velocitatem corporis centro* B *intervallo* BC *Circulum describentis, in subduplicata ratione quam* AC, *distantia corporis a Circuli vel Hyperbolæ rectangulæ vertice ulteriore* A, *habet ad Figuræ semidiametrum principalem* $\frac{1}{2}$ AB.

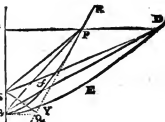
Bisecetur AB, communis utriusque Figuræ RPB, DEB diameter, in O; & agatur recta PT quæ tangat Figuram RPB in P, atque etiam

etiam secet communem illam diametrum AB (si opus est productam) in T, sitque ST ad hanc rectam, & BQ ad hanc diametrum perpendicularis, atque Figuræ RPB latus rectum ponatur L. Constat per Cor. 9. Prop. XVI, quod corporis in linea RPB circa centrum S moventis velocitas in loco quovis P sit ad velocitatem corporis intervallo SP circa idem centrum Circulum describentis in subduplicata ratione rectanguli $\frac{1}{2}$ L$\times SP$ ad ST quadratum. Est autem ex Conicis ACB ad CPq ut $2AO$ ad L, adeoque $\frac{2CPq \times AO}{ACB}$ æquale L. Ergo velocitates illæ sunt ad invicem in subduplicata ratione $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ ad ST *quad.* Porro ex Conicis est CO ad BO ut BO ad TO, & composite vel divisim ut CB ad BT. Unde vel dividendo vel componendo fit $BO -$ vel $+ CO$ ad BO ut CT ad BT, id est AC ad AO ut CP ad BQ; indeque $\frac{CPq \times AO \times SP}{ACB}$ æquale est $\frac{BQq \times AC \times SP.}{AO \times BC}$ Minuatur jam in infinitum Figuræ RPB latitudo CP, sic ut punctum P coeat cum puncto C, punctumque S cum puncto B, & linea SP cum linea BC, lineaque ST cum linea BQ; & corporis jam recta descendentis in linea CB velocitas fiet ad velocitatem corporis centro B intervallo BC Circulum describentis, in subduplicata ratione ipsius $\frac{BQq \times AC \times SP}{AO \times BC}$ ad STq, hoc est (neglectis æqualitatis rationibus SP ad BC & BQq ad STq.) in subduplicata ratione AC ad AO sive $\frac{1}{2}AB$. *Q.E.D.*

Corol. 1. Punctis B & S coeuntibus, fit TC ad TS ut AC ad AO.

Corol. 2. Corpus ad datam a centro distantiam in Circulo quovis revolvens, motu suo sursum verso ascendet ad duplam suam a centro distantiam.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA X.



Si Figura BED *Parabola est, dico quod corporis cadentis Velocitas in loco quovis* C *æqualis est velocitati qua corpus centro* B *dimidio intervalli sui* BC *Circulum uniformiter describere potest.*

Nam corporis Parabolam RPB circa centrum S describentis velocitas in loco quovis P (per Corol. 7. Prop. xvi) æqualis est velocitati corporis dimidio intervalli SP Circulum circa idem centrum S uniformiter describentis. Minuatur Parabolæ latitudo CP in infinitum eo, ut arcus Parabolicus PfB cum recta CB, centrum S cum vertice B, & intervallum SP cum intervallo BC coincidat, & constabit Propositio. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXXV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod area Figuræ DES, *radio indefinito* SD *descripta, æqualis sit areæ quam corpus, radio dimidium lateris recti Figuræ* DES *æquante, circa centrum* S *uniformiter gyrando, eodem tempore describere potest.*

Nam concipe corpus C quam minima temporis particula lineolam Cc cadendo describere, & interea corpus aliud K uniformiter in Circulo OKk circa centrum S gyrando, arcum Kk describere. Erigantur perpendicula CD, cd occurrentia Figuræ DES in D, d. Jungantur SD, Sd, SK, Sk & ducatur Dd axi AS occurrens in T, & ad eam demittatur perpendiculum SY.

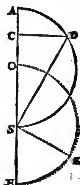
Cas.

Cas. 1. Jam si Figura DES Circulus est vel Hyperbola, bisecetur ejus transversa diameter AS in O, & erit SO dimidium lateris recti. Et quoniam est TC ad TD ut Cc ad Dd, & TD ad TS ut CD ad ST, erit ex æquo TC ad TS ut $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$. Sed per Corol. 1 Prop. XXXIII, est TC ad TS ut AC ad AO, puta si in coitu punctorum D, d, capiantur linearum rationes ultimæ. Ergo AC est ad (AO seu) SK ut $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$. Porro corporis descendentis velocitas in C est ad velocitatem corporis Circulum intervallo SC circa centrum S describentis in subduplicata ratione AC ad (AO vel) SK (per Prop. XXXIII.) Et hæc velocitas ad velocitatem corporis describentis Circulum OKk in subduplicata ratione SK ad SC per Cor. 6. Prop. IV, & ex æquo velocitas prima ad ultimam, hoc est lineola Cc ad arcum Kk in subduplicata ratione AC ad SC, id est in ratione AC ad CD. Quare est $CD \times Cc$ æquale $AC \times Kk$, & propterea AC ad SK ut $AC \times Kk$ ad $ST \times Dd$, indeque $SK \times Kk$ æquale $ST \times Dd$, & $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{2} ST \times Dd$, id est area KSk æqualis areæ SDd. Singulis igitur temporis particulis generantur arearum duarum particulæ KSk & SDd, quæ, si magnitudo earum minuatur & numerus augeatur in infinitum, rationem obtinent æqualitatis, & propterea (per Corollarium Lemmatis IV) areæ totæ simul genitæ sunt semper æquales. *Q. E. D.*

Cas. 2. Quod si Figura DES Parabola sit, invenietur esse ut supra $CD \times Cc$ ad $ST \times Dd$ ut TC ad TS, hoc est ut 2 ad 1, adeoque $\frac{1}{4} CD \times Cc$ æquale esse $\frac{1}{2} ST \times Dd$. Sed corporis cadentis velocitas in C æqualis est velocitati qua Circulus intervallo $\frac{1}{2} SC$ uniformiter describi possit (per Prop. XXXIV.) Et hæc velocitas ad velocitatem qua Circulus radio SK describi possit, hoc est, lineola Cc ad arcum Kk (per Corol. 6. Prop. IV) est in subduplicata ratione SK ad $\frac{1}{2} SC$, id est, in ratione SK ad $\frac{1}{2} CD$. Quare est $\frac{1}{2} SK \times Kk$ æquale $\frac{1}{4} CD \times Cc$, adeoque æquale $\frac{1}{2} ST \times Dd$, hoc est, area KSk æqualis areæ SDd, ut supra. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XXV.

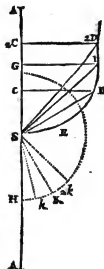
Corporis de loco dato A *cadentis determinare Tempora descensus.*



Super diametro AS (distantia corporis a centro sub initio) describe Semicirculum ADS, ut & huic æqualem Semicirculum OKH circa centrum S. De corporis loco quovis C erige ordinatim applicatam CD. Junge SD, & areæ ASD æqualem constitue sectorem OSK. Patet per Prop xxxv, quod corpus cadendo describet spatium AC eodem Tempore quo corpus aliud uniformiter circa centrum S gyrando, describere potest arcum OK. *Q.E.F.*

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XXVI.

Corporis de loco dato sursum vel deorsum projecti definire Tempora ascensus vel descensus.



Exeat corpus de loco dato G secundum lineam ASG cum velocitate quacunque. In duplicata ratione hujus velocitatis ad uniformem in Circulo velocitatem, qua corpus ad intervallum datum SG circa centrum S revolvi posset, cape GA ad $\frac{1}{2} AS$. Si ratio illa est numeri binarii ad unitatem, punctum A infinite distat, quo casu parabola vertice S, axe SC, latere quovis recto describenda est. Patet hoc per Prop. xxxiv. Sin ratio illa minor vel major est quam 2 ad 1, priore casu Circulus, posteriore Hyperbola rectangula super diametro SA describi debet. Patet per Prop xxxiii. Tum centro S, intervallo æquante dimidium lateris recti, describatur Circulus HKk, & ad corporis ascendentis vel descendentis loca duo quævis G, C, erigantur perpendicula GI, CD occurrentia Conicæ Sectioni vel Circulo in I ac D.

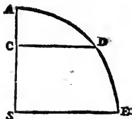
Dein

Dein junctis SI, SD, fiant segmentis $SEIS$, $SEDS$, sectores HSK, HSk æquales, & per Prop. xxxv. corpus G describet spatium GC eodem Tempore quo corpus K describere potest arcum Kk. *Q. E. F.*

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XII.

Posito quod Vis centripeta proportionalis sit altitudini seu distantiæ locorum a centro, dico quod cadentium Tempora, Velocitates & Spatia descripta sunt arcubus, arcuumque sinibus rectis & sinibus versis respective proportionalia.

Cadat corpus de loco quovis A secundum rectam AS; & centro virium S, intervallo AS, describatur Circuli quadrans AE, sitque CD sinus rectus arcus cujusvis AD; & corpus A, Tempore AD, cadendo describet Spatium AC, inque loco C acquiret Velocitatem CD.



Demonstratur eodem modo ex Propositione x, quo Propositio xxxii, ex Propositione xi demonstrata fuit.

Corol. 1. Hinc æqualia sunt Tempora quibus corpus unum de loco A cadendo pervenit ad centrum S, & corpus aliud revolvendo describit arcum quadrantalem ADE.

Corol. 2. Proinde æqualia sunt Tempora omnia quibus corpora de locis quibusvis ad usque centrum cadunt. Nam revolventium tempora omnia periodica (per Corol. 3. Prop. iv.) æquantur.

PROPO-

De Motu Corporum

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XXVII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta, & concessis figurarum curvilinearum quadraturis, requiritur corporis recta ascendentis vel descendentis tum Velocitas in locis singulis, tum Tempus quo corpus ad locum quemvis perveniet: Et contra.

De loco quovis A in recta $ADEC$ cadat corpus E, deque loco ejus E erigatur semper perpendicularis EG, vi centripetæ in loco illo ad centrum C tendenti proportionalis: Sitque BFG linea curva quam punctum G perpetuo tangit. Coincidat autem EG ipso motus initio cum perpendiculari AB, & erit corporis Velocitas in loco quovis E ut areæ curvilineæ $ABGE$ latus quadratum. *Q. E. I.*

In EG capiatur EM lateri quadrato areæ $ABGE$ reciproce proportionalis, & sit ALM linea curva quam punctum M perpetuo tangit, & erit Tempus quo corpus cadendo describit lineam AE ut area curvilinea $ALME$. *Q. E. I.*

Etenim in recta AE capiatur linea quam minima DE datæ longitudinis, sitque DLF locus lineæ EMG ubi corpus versabatur in D; & si ea sit vis centripeta, ut areæ $ABGE$ latus quadratum sit ut descendentis velocitas, erit area ipsa in duplicata ratione velocitatis, id est, si pro velocitatibus in D & E scribantur V & V+I erit area $ABFD$ ut VV, & area $ABGE$ ut VV+2VI+II, & divisim area $DFGE$ ut 2VI+II, adeoque $\frac{DFGE}{DE}$ ut $\frac{2VI+II}{DE}$, id est, si primæ quantitatum nascentium rationes sumantur, longitudo DF ut quantitas $\frac{2VI}{DE}$, adeoque etiam ut quantitatis hujus dimidium $\frac{I \times V}{DE}$. Est autem tempus quo corpus

corpus cadendo describit lineolam DE, ut lineola illa directe & velocitas V inverse, estque vis ut velocitatis incrementum I directe & tempus inverse, adeoque si primæ nascentium rationes sumantur, ut $\frac{I \times V}{DE}$, hoc est, ut longitudo DF. Ergo vis ipsi DF vel EG proportionalis facit ut corpus ea cum Velocitate descendat, quæ sit ut areæ $ABGE$ latus quadratum. *Q.E.D.*

Porro cum tempus, quo quælibet longitudinis datæ lineola DE describitur, sit ut velocitas inverse adeoque ut areæ $ABFD$ latus quadratum inverse; sitque DL, atque adeo area nascens $DLME$, ut idem latus quadratum inverse: erit tempus ut area $DLME$, & summa omnium temporum ut summa omnium arearum, hoc est (per Corol. Lem. IV.) Tempus totum quo linea AE describitur ut area tota AME. *Q.E.D.*

Corol. 1. Si P sit locus de quo corpus cadere debet, ut, urgente aliqua uniformi vi centripeta nota (qualis vulgo supponitur Gravitas) velocitatem acquirat in loco D æqualem velocitati quam corpus aliud vi quacunque cadens acquisivit eodem loco D, & in perpendiculari DF capiatur DR, quæ sit ad DF ut vis illa uniformis ad vim alteram in loco D, & compleatur rectangulum $PDRQ$, eique æqualis abscindatur area $ABFD$; erit A locus de quo corpus alterum cecidit. Namque completo rectangulo $DRSE$, cum sit area $ABFD$ ad aream $DFGE$ ut VV ad 2 VI, adeoque ut ½ V ad I, id est, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis vi inæquabili cadentis; & similiter area $PQRD$ ad aream $DRSE$, ut semissis velocitatis totius ad incrementum velocitatis corporis uniformi vi cadentis; sintque incrementa illa (ob æqualitatem temporum nascentium) ut vires generatrices, id est, ut ordinatim applicatæ DF, DR, adeoque ut areæ nascentes $DFGE$, $DRSE$; erunt (ex æquo) areæ totæ $ABFD$, $PQRD$ ad invicem ut semisses totarum velocitatum, & propterea (ob æqualitatem velocitatum) æquantur.

Corol. 2. Unde si corpus quodlibet de loco quocunque D data cum velocitate vel sursum vel deorsum projiciatur, & detur lex vis centripetæ, invenietur velocitas ejus in alio quovis loco e, erigendo ordinatam eg, & capiendo velocitatem illam ad velocitatem in loco D ut est latus quadratum rectanguli $PQRD$ area curvilinea $DFge$ vel aucti, si locus e est loco D inferior, vel diminuti, si iis superior est, ad latus quadratum rectanguli solius $PQRD$, id est, ut $\sqrt{PQRD + \text{vel} - DFge}$ ad $\sqrt{PQRD}$.

P Corol.

Corol. 3. Tempus quoque innotescet erigendo ordinatam *em* reciproce proportionalem lateri quadrato ex $PQRD+$ vel $-DFge$, & capiendo tempus quo corpus descripsit lineam De ad tempus quo corpus alterum vi uniformi cecidit a P & cadendo pervenit ad D, ut area curvilinea $DLme$ ad rectangulum $2PD \times DL$. Namque tempus quo corpus vi uniformi descendens descripsit lineam PD est ad tempus quo corpus idem descripsit lineam PE in subduplicata ratione PD ad PE, id est (lineola DE jamjam nascente) in ratione PD ad $PD+\frac{1}{2}DE$ seu $2PD$ ad $2PD+DE$ & divisim, ad tempus quo corpus idem descripsit lineolam DE ut $2PD$ ad DE, adeoque ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLME$; estque tempus quo corpus utrumque descripsit lineolam DE ad tempus quo corpus alterum inæquabili motu descripsit lineam De ut area $DLME$ ad aream $DLme$, & ex æquo tempus primum ad tempus ultimum ut rectangulum $2PD \times DL$ ad aream $DLme$.

SECTIO VIII.

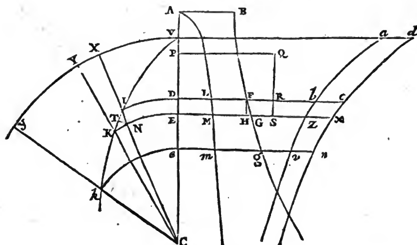
De inventione Orbium in quibus corpora Viribus quibuscunque centripetis agitata revolvuntur

PROPOSITIO XL. THEOREMA XIII.

Si corpus, cogente Vi quacunque centripeta, moveatur utcunque, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque eorum Velocitates in aliquo æqualium altitudinum casu æquales, Velocitates eorum in omnibus æqualibus altitudinibus erunt æquales.

Descendat corpus aliquod ab A per D, E, ad centrum C, & moveatur corpus aliud a V in linea curva $VIKk$, Centro C intervallis quibusvis describantur circuli concentrici DI, EK rectæ AC in D & E, curvæque VIK in I & K occurrentes. Jungatur IC occurrens ipsi KE in N; & in IK demittatur perpendiculum NT; sitque circumferentiarum circulorum intervallum DE vel IN quam minimum, & habeant corpora in D & I velocitates

tes æquales. Quoniam distantiæ CD, CI æquantur, erunt vires centripetæ in D & I æquales. Exponantur hæ vires per æquales lineolas DE, IN; & si vis una IN (per Legum Corol. 2.) resolvatur in duas NT & IT, vis NT, agendo secundum lineam NT corporis cursui ITK perpendicularem, nil mutabit velocitatem corporis in cursu illo, sed retrahet solummodo corpus a cursu rectilineo, facietque ipsum de Orbis tangente perpetuo deflectere, inque via curvilinea $ITKk$ progredi. In hoc effectu producendo vis illa tota consumetur: vis autem altera IT, secundum corporis cursum agendo, tota accelerabit illud, ac dato tempore quam minimo accelerationem generabit sibi ipsi proportionalem. Proinde corporum in D & I accelerationes æqualibus temporibus factæ (si sumantur linearum nascentium DE, IN, IK, IT, NT rationes primæ) sunt ut lineæ DE, IT: temporibus autem inæqualibus ut lineæ illæ & tempora conjunctim. Tempora autem quibus DE & IK describuntur, ob æqualitatem velocita-



tum sunt ut viæ descriptæ DE & IK, adeoque accelerationes, in cursu corporum per lineas DE & IK, sunt ut DE & IT, DE & IK conjunctim, id est ut DE *quad.* & $IT \times IK$ *rectangulum.* Sed *rectangulum* $IT \times IK$ æquale est IN *quadrato*, hoc est, æquale DE *quadrato*; & propterea accelerationes in transitu corporum a D & I ad E & K æquales generantur. Æquales igitur sunt cor-

 porum

porum velocitates in *E* & *K* & eodem argumento semper reperientur æquales in subsequentibus æqualibus distantiis. *Q.E.D.*

Sed & eodem argumento corpora æquivelocia & æqualiter a centro distantia, in ascensu ad æquales distantias æqualiter retardabuntur. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc si corpus vel funipendulum oscilletur, vel impedimento quovis politissimo & perfecte lubrico cogatur in linea curva moveri, & corpus aliud recta ascendat vel descendat, sintque velocitates eorum in eadem quacunque altitudine æquales: erunt velocitates eorum in aliis quibuscunque æqualibus altitudinibus æquales. Namque impedimento vasis absolute lubric idem præstatur quod vi transversa *NT*. Corpus eo non retardatur, non acceleratur, sed tantum cogitur de cursu rectilineo discedere.

Corol. 2. Hinc etiam si quantitas P sit maxima a centro distantia, ad quam corpus vel oscillans vel in Trajectoria quacunque revolvens, deque quovis Trajectoriæ puncto, ea quam ibi habet velocitate sursum projectum ascendere possit; sitque quantitas A distantia corporis a centro in alio quovis Orbitæ puncto, & vis centripeta semper sit ut ipsius A dignitas qualibet A^{n-1}, cujus Index $n-1$ est numerus quilibet n unitate diminutus; velocitas corporis in omni altitudine A erit ut $\sqrt{P^n - A^n}$, atque adeo datur. Namque velocitas recta ascendentis ac descendentis (per Prop. XXXIX.) est in hac ipsa ratione.

PROPO-

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXVIII.

Posita cujuscunque generis Vi centripeta & concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, requiruntur tum Trajectoriæ in quibus corpora movebuntur, tum Tempora motuum in Trajectoriis inventis.

Tendat vis quælibet ad centrum C & invenienda sit Trajectoria $VITKk$. Detur Circulus VXY centro C intervallo quovis CV descriptus, centroque eodem describantur alii quivis circuli ID, KE Trajectoriam secantes in I & K rectamque CV in D & E. Age tum rectam $CNIX$ secantem circulos KE, VY in N & X, tum rectam CKY occurrentem circulo VXY in Y. Sint autem puncta I & K sibi invicem vicinissima, & pergat corpus ab V per I, T & K ad k; sitque punctum A locus ille de quo corpus aliud cadere debet ut in loco D velocitatem acquirat æqualem velocitati corporis prioris in I; & stantibus quæ in Propositione XXXIX, lineola IK, dato tempore quam minimo descripta, erit ut velocitas atque adeo ut latus quadratum areæ $ABFD$, & triangulum ICK tempori proportionale dabitur, adeoque KN erit reciproce ut altitudo IC, id est, si detur quantitas aliqua Q, & altitudo IC nominetur A, ut $\frac{Q}{A}$. Hanc quantitatem $\frac{Q}{A}$ nominemus Z, & ponamus eam esse magnitudinem ipsius Q, ut sit in aliquo casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut est IK ad KN, & erit in omni casu $\sqrt{ABFD}$ ad Z ut IK ad KN, & $ABFD$ ad ZZ ut IKq. ad KNq. & divisim $ABFD - ZZ$ ad ZZ ut IN *quad.* ad KN *quad*; adeoque $\sqrt{ABFD - ZZ}$ ad (Z seu) $\frac{Q}{A}$ ut IN ad KN, & propterea $A \times KN$ æquale $\frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Unde cum $YX \times XC$ sit ad $A \times KN$ ut CXq ad AA, erit rectangulum $YX \times XC$ æquale $\frac{Q \times IN \times CX\ quad.}{AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$. Igitur si in perpendiculo DF capiantur semper Db, Dc ipsis $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - ZZ}}$ & $\frac{Q \times CX\ quad.}{2AA\sqrt{ABFD - ZZ}}$ æquales respective, & describantur curvæ lineæ ab, cd, quas puncta

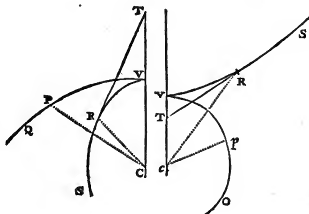
puncta b, c perpetuo tangunt; deque puncto V ad lineam AC, erigatur perpendiculum Vad abscindens areas curvilineas $VDba$, $VDcd$, & erigantur etiam ordinatæ Ez, Ex: quoniam rectangulum $Db \times IN$ seu $DbzE$ æquale est dimidio rectanguli $A \times KN$, seu triangulo ICK; & rectangulum $Dc \times IN$ seu $DcxE$ æquale est dimidio rectanguli $TX \times XC$, seu triangulo XCT; hoc est, quoniam arearum $VDba$, VIC æquales semper sunt nascentes particulæ $DbzE$, ICK, & arearum $VDcd$, VCX æquales semper sunt nascentes particulæ $DcxE$, XCT, erit area genita $VDba$ æqualis areæ genitæ VIC, adeoque tempori proportionalis, & area genita $VDcd$ æqualis Sectori genito VCX. Dato igitur tempore quovis ex quo corpus discessit de loco V, dabitur area ipsi proportionalis $VDba$, & inde dabitur corporis altitudo CD vel CI; & area $VDcd$, eique æqualis Sector VCX una cum ejus angulo VCI. Datis autem angulo VCI & altitudine CI datur locus I, in quo corpus completo illo tempore reperietur. *Q.E.I.*

Corol. 1. Hinc maximæ minimæque corporum altitudines, id est Apsides Trajectoriarum expedite inveniri possunt. Sunt enim Apsides puncta illa in quibus recta IC per centrum ducta incidit perpendiculariter in Trajectoriam VIK: id quod fit ubi rectæ IK & NK æquantur, adeoque ubi area $ABFD$ æqualis est ZZ.

Corol. 2. Sed & angulus KIN, in quo Trajectoria alibi secat lineam illam IC, ex data corporis altitudine IC expedite invenitur; nimirum capiendo sinum ejus ad radium ut KN ad IK, id est, ut Z ad latus quadratum areæ $ABFD$.

Corol. 3. Si centro C & vertice principali V describatur Sectio quælibet Conica VRS, & a quovis ejus puncto R agatur Tangens RT occurrens axi infinite producto CV in puncto T; dein juncta CR ducatur recta CP, quæ æqualis sit abscissæ CT, angulumque VCP Sectori VCR proportionalem constituat; tendat autem ad centrum C Vis centripeta Cubo distantiæ locorum a centro reciproce proportionalis, & exeat corpus de loco V justa cum Velocitate secundum lineam rectæ CV perpendicularem: progredietur corpus illud in Trajectoria quam punctum P perpetuo tangit; adeoque si Conica sectio $CVRS$ Hyperbola sit, descendet idem ad centrum: Sin ea Ellipsis sit, ascendet illud perpetuo & abibit in infinitum. Et contra, si corpus quacunque cum Velocitate exeat de loco V, & perinde ut incœperit vel oblique descendere ad centrum, vel ab eo oblique

lique ascendere, Figura *CVRS* vel Hyperbola sit vel Ellipsis, inveniri potest Trajectoria augendo vel minuendo angulum *VCP* in data aliqua ratione. Sed &, Vi centripeta in centrifugam versa,



ascendet corpus oblique in Trajectoria *VPQ*, quæ invenitur capiendo angulum *VCP* Sectori Elliptico *CVRC* proportionalem, & longitudinem *CP* longitudini *CT* æqualem ut supra. Consequuntur hæc omnia ex Propositione præcedente, per Curvæ cujusdam quadraturam, cujus inventionem, ut satis facilem, brevitatis gratia missam facio.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXIX.

Data lege Vis centripetæ, requiritur motus corporis de loco dato cum Velocitate secundum datam rectam egressi.

Stantibus quæ in tribus Propositionibus præcedentibus: exeat corpus de loco *I* secundum lineolam *IT*, ea cum Velocitate quam corpus aliud, vi aliqua uniformi centripeta, de loco *P* cadendo acquirere posset in *D*: sitque hæc vis uniformis ad vim qua corpus primum

De Motu Corporum

primum urgetur in I, ut DR ad DF. Pergat autem corpus versus k; centroque C & intervallo Ck describatur circulus ke occurrens rectæ PD in e, & erigantur curvarum $ALMm$, $BFGg$, $abzv$, $dcxw$, ordinatim applicatæ em, eg, ev, ew. Ex dato rectangulo $PDRQ$, dataque lege vis centripetæ qua corpus primum agitatur, dantur curvæ lineæ $BFGg$, $ALMm$, per constructionem Problematis XXVII, & ejus Corol. 1. Deinde ex dato angulo CIT datur proportio nascentium IK, KN, & inde, per constructionem Prob. XXVIII, datur quantitas Q, una cum curvis lineis $abzv$, $dcxw$: adeoque completo tempore quovis $Dbve$, datur tum corporis altitudo Ce vel Ck, tum area $Dcwe$, eique æqualis Sector XCy, angulusque ICk & locus k in quo corpus tunc versabatur. *Q.E.I.*

Supponimus autem in his Propositionibus Vim centripetam in recessu quidem a centro variari secundum legem quamcunque quam quis imaginari potest, in æqualibus autem a centro distantiis esse undeque eandem. Atque hactenus Motum corporum in Orbibus immobilibus consideravimus. Superest ut de Motu eorum in Orbibus qui circa centrum virium revolvuntur adjiciamus pauca.

SECTIO

SECTIO IX.

De Motu corporum in Orbibus mobilibus, deque motu Apsidum.

PROPOSITIO XLIII. PROBLEMA XXX.

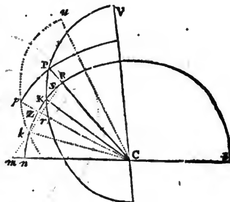
Efficiendum est ut corpus in Trajectoria quacunque circa centrum Virium revolvente perinde moveri possit, atque corpus aliud in eadem Trajectoria quiescente.

In Orbe VPK positione dato revolvatur corpus P pergendo a V versus K. A centro C agatur semper Cp, quæ sit ipsi CP æqualis, angulumque VCp angulo VCP proportionalem constituat; & area quam linea Cp describit erit ad aream VCP quam linea CP simul describit, ut velocitas lineæ describentis CP ad velocitatem lineæ describentis CP; hoc est, ut angulus VCp ad angulum VCP, adeoque in data ratione, & propterea tempori proportionalis. Cum area tempori proportionalis sit quam linea Cp in plano immobili describit; manifestum est quod corpus, cogente justæ quantitatis Vi centripeta, revolvi possit una cum puncto p in Curva illa linea quam punctum idem p ratione jam exposita describit in plano immobili. Fiat angulus VCu angulo PCp, & linea Cu lineæ CV, atque Figura uCp Figuræ VCP æqualis, & corpus in p semper existens movebitur in

perimetro Figuræ revolventis uCp, eodemque tempore describet arcum ejus up quo corpus aliud P arcum ipsi similem & æqualem VP in Figura quiescente VPK describere potest. Quæratur igitur, per Corollarium quintum propositionis VI, Vis centripeta qua corpus revolvi possit in Curva illa linea quam punctum p describit in plano immobili, & solvetur Problema. *Q.E.F.*

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XIV.

Differentia Virium, quibus corpus in Orbe quiescente, & corpus aliud in eodem Orbe revolvente æqualiter moveri possunt, est in triplicata ratione communis altitudinis inverse.



Partibus Orbis quiescentis VP, PK sunto similes & æquales Orbis revolventis partes up, pk; & punctorum P, K distantia intelligatur esse quam minima. A puncto k in rectam pC demitte perpendiculum kr, idemque produc ad m, ut sit mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP. Quoniam corporum altitudines PC & pC, KC & kC semper æquantur, manifestum est quod linearum PC & pC incrementa vel decrementa semper sint æqualia, ideoque si corporum in locis P & p existentium distinguantur motus singuli (per Legum Corol. 2.) in binos, quorum hi versus centrum, sive secundum lineas PC, pC determinentur, & alteri prioribus transversi sint, & secundum lineas ipsis PC, pC, perpendiculares directionem habeant; motus versus centrum erunt æquales, & motus transversus corporis p erit ad motum transversum corporis P, ut motus angularis lineæ pC, ad motum angularem lineæ PC, id est, ut

ut angulus VCp ad angulum VCP. Igitur eodem tempore quo corpus P motu suo utroque pervenit ad punctum K, corpus p æquali in centrum motu æqualiter movebitur a p versus C, adeoque completo illo tempore reperietur alicubi in linea mkr, quæ per punctum k in lineam pC perpendicularis est; & motu transverso acquiret distantiam a linea pC, quæ sit ad distantiam quam corpus alterum P acquirit a linea PC, ut est motus transversus corporis p ad motum transversum corporis alterius P. Quare cum kr æqualis sit distantiæ quam corpus P acquirit a linea PC, sitque mr ad kr ut angulus VCp ad angulum VCP, hoc est, ut motus transversus corporis p ad motum transversum corporis P, manifestum est quod corpus p completo illo tempore reperietur in loco m. Hæc ita se habebunt ubi corpora p & P æqualiter secundum lineas pC & PC moventur, adeoque æqualibus Viribus secundum lineas illas urgentur. Capiatur autem angulus pCn ad angulum pCk ut est angulus VCp ad angulum VCP, sitque nC æqualis kC, & corpus p completo illo tempore revera reperietur in n; adeoque Vi majore urgetur quam corpus P, si modo angulus mCp angulo kCp major est, id est si Orbis upk vel movetur in consequentia, vel movetur in antecedentia majore celeritate quam sit dupla ejus qua linea CP in consequentia fertur; & Vi minore si Orbis tardius movetur in antecedentia. Estque Virium differentia ut locorum intervallum mn, per quod corpus illud p ipsius actione, dato illo temporis spatio, transferri debet. Centro C intervallo Cn vel Ck describi intelligatur Circulus secans lineas mr, mn productas in s & t, & erit rectangulum $mn \times mt$ æquale rectangulo $mk \times ms$, adeoque mn æquale $\frac{mk \times ms}{mt}$. Cum autem triangula pCk, pCn dentur magnitudine, sunt kr & mr, earumque differentia mk & summa ms reciproce ut altitudo pC, adeoque rectangulum $mk \times ms$ est reciproce ut quadratum altitudinis pC. Est & mt directe ut $\frac{1}{2} mt$, id est, ut altitudo pC. Hæ sunt primæ rationes linearum nascentium; & hinc fit $\frac{mk \times ms}{mt}$, id est lineola nascens mn, eique proportionalis Virium differentia reciproce ut cubus altitudinis pC. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc differentia virium in locis P & p vel K & k, est ad vim qua corpus motu Circulari revolvi possit ab R ad K eodem tempore quo corpus P in Orbe immobili describit arcum PK, ut lineola nascens mn ad sinum versum arcus nascentis RK, id est

ut $\frac{mk \times ms}{mt}$ ad $\frac{rkq}{2kC}$, vel ut $mk \times ms$ ad rk quadratum; hoc est, si capiantur datæ quantitates F, G in ea ratione ad invicem quam habet angulus VCP ad angulum VCp, ut $GG-FF$ ad FF. Et propterea, si centro C intervallo quovis CP vel Cp describatur Sector circularis æqualis areæ toti VPC, quam corpus P tempore quovis in Orbe immobili revolvens radio ad centrum ducto descripsit: differentia virium, quibus corpus P in Orbe immobili & corpus p in Orbe mobili revolvuntur, erit ad vim centripetam qua corpus aliquod radio ad centrum ducto Sectorem illum, eodem tempore quo descripta sit area VPC uniformiter describere potuisset, ut $GG-FF$ ad FF. Namque Sector ille & area pCk sunt ad invicem ut tempora quibus describuntur.

Corol. 2. Si Orbis VPK Ellipsis sit umbilicum habens C & Apsidem summam V; eique similis & æqualis ponatur Ellipsis upk, ita ut sit semper pC æqualis PC, & angulus VCp sit ad angulum VCP in data ratione G ad F; pro altitudine autem PC vel pC scribatur A, & pro Ellipseos latere recto ponatur 2 R: erit vis qua corpus in Ellipsi mobili revolvi potest, ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ & contra. Exponatur enim vis qua corpus revolvatur in immota Ellipsi per quantitatem $\frac{FF}{AA}$, & vis in V erit $\frac{FF}{CV\,quad.}$. Vis autem qua corpus in Circulo ad distantiam CV ea cum velocitate revolvi posset quam corpus in Ellipsi revolvens habet in V, est ad vim qua corpus in Ellipsi revolvens urgetur in Apside V, ut dimidium lateris recti Ellipseos ad Circuli semidiametrum CV, adeoque valet $\frac{RFF}{CV\,cub.}$: & vis quæ sit ad hanc ut $GG-FF$ ad FF, valet $\frac{RGG-RFF}{CV\,cub.}$: estque hæc vis (per hujus Corol. 1.) differentia virium in V quibus corpus P in Ellipsi immota VPK, & corpus p in Ellipsi mobili upk revolvuntur. Unde cum (per hanc Prop.) differentia illa in alia quavis altitudine A sit ad seipsam in altitudine CV ut $\frac{1}{A\,cub.}$ ad $\frac{1}{CV\,cub.}$, eadem differentia in omni altitudine A valebit $\frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$. Igitur ad vim $\frac{FF}{AA}$ qua corpus revolvi potest in Ellipsi immobili VPK, addatur excessus $\frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$ & componetur vis tota $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG-RFF}{A\,cub.}$

qua

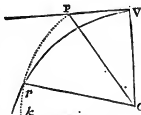
qua corpus in Ellipsi mobili *upk* iisdem temporibus revolvi possit.

Corol. 3. Ad eundem modum colligetur quod, si Orbis immobilis *VPK* Ellipsis sit centrum habens in virium centro *C*; eique similis, æqualis & concentrica ponatur Ellipsis mobilis *upk*; sitque 2 R Ellipseos hujus latus rectum principale, & 2 T latus transversum sive axis major, atque angulus *VCp* semper sit ad angulum *VCP* ut G ad F; vires quibus corpora in Ellipsi immobili & mobili temporibus æqualibus revolvi possunt, erunt ut $\frac{FFA}{T\,cub.}$ & $\frac{FFA}{T\,cub.} + \frac{RGG - RFF}{A\,cub.}$ respective.

Corol. 4. Et universaliter, si corporis altitudo maxima *CV* nominetur T, & radius curvaturæ quam Orbis *VPK* habet in *V*, id est radius Circuli æqualiter curvi, nominetur R, & vis centripeta qua corpus in Trajectoria quacunque immobili *VPK* revolvi potest, in loco *V* dicatur $\frac{VFF}{TT}$ atque aliis in locis *P* indefinite dicatur X, altitudine *CP* nominata A, & capiatur G ad F in data ratione anguli *VCp* ad angulum *VCP*: erit vis centripeta qua corpus idem eosdem motus in eadem Trajectoria *upk* circulariter mota temporibus iisdem peragere potest, ut summa virium $X + \frac{VRGG - VRFF}{A\,cub.}$.

Corol. 5. Dato igitur motu corporis in Orbe quocunque immobili, augeri vel minui potest ejus motus angularis circa centrum virium in ratione data, & inde inveniri novi Orbes immobiles in quibus corpora novis viribus centripetis gyrentur.

Corol. 6. Igitur si ad rectam *CV* positione datam erigatur perpendiculum *VP* longitudinis indeterminatæ, jungaturque *CP*, & ipsi æqualis agatur *Cp*, constituens angulum *VCp*, qui sit ad angulum *VCP* in data ratione; vis qua corpus gyrari potest in Curva illa *Vpk* quam punctum *p* perpetuo tangit, erit reciproce ut cubus altitudinis *Cp*. Nam corpus *P*, per vim inertiæ, nulla alia vi urgente, uniformiter progredi potest in recta *VP*. Addatur vis in centrum *C*, cubo altitudinis *CP* vel *Cp* reciproce proportionalis, & (per jam demonstrata) detorquebitur motus ille rectilineus in lineam



 curvam

curvam Vpk. Est autem hæc Curva Vpk eadem cum Curva illa VPQ in Corol. 3. Prop. XLI inventa, in qua ibi diximus corpora hujusmodi viribus attracta oblique ascendere.

PROPOSITIO XLV. PROBLEMA XXXI.

Orbium qui sunt Circulis maxime finitimi requiruntur motus Apsidum.

Problema solvitur Arithmetice faciendo ut Orbis, quem corpus in Ellipsi mobili (ut in Propositionis superioris Corol. 2. vel 3.) revolvens describit in plano immobili, accedat ad formam Orbis cujus Apsides requiruntur, & quærendo Apsides Orbis quem corpus illud in plano immobili describit. Orbes autem eandem acquirent formam, si vires centripetæ quibus describuntur, inter se collatæ, in æqualibus altitudinibus reddantur proportionales. Sit punctum V Apsis summa, & scribantur T pro altitudine maxima CV, A pro altitudine quavis alia CP vel Cp, & X pro altitudinum differentia $CV - CP$; & vis qua corpus in Ellipsi circa umbilicum suum C (ut in Corollario 2.) revolvente movetur, quæque in Corollario 2. erat ut $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A\ cub.}$, id est ut $\frac{FFA + RGG - RFF}{A\ cub.}$, substituendo $T - X$ pro A, erit ut $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A\ cub.}$. Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit A *cub.*, & numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi. Res Exemplis patebit.

Exempl. 1. Ponamus vim centripetam uniformem esse, adeoque ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$, sive (scribendo $T - X$ pro A in Numeratore) ut $\frac{T\ cub. - 3TTX + 3TXX - X\ cub.}{A\ cub.}$; & collatis Numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis & non datis cum non datis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ad $T\ cub.$ ut $-FFX$ ad $-3TTX + 3TXX - X\ cub.$ sive ut $-FF$ ad $-3TT + 3TX - XX$. Jam cum Orbis ponatur Circulo quam maxime finitimus, coeat Orbis cum Circulo; & ob factas R, T æquales, atque X in infinitum

infinitum diminutam, rationes ultimæ erunt RGG ad T *cub.* ut — FF ad — 3 TT, seu GG ad TT ut FF ad 3 TT & vicissim GG ad FF ut TT ad 3 TT id est, ut 1 ad 3; adeoque G ad F, hoc est angulus VCp ad angulum $VC\mathcal{P}$, ut 1 ad $\surd 3$. Ergo cum corpus in Ellipsi immobili, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiat angulum $VC\mathcal{P}$ (ut ita dicam) graduum 180; corpus aliud in Ellipsi mobili, atque adeo in Orbe immobili de quo agimus, ab Apside summa ad Apsidem imam descendendo conficiet angulum VCp graduum $\frac{180}{\surd 3}$: id adeo ob similitudinem Orbis hujus, quem corpus agente uniformi vi centripeta describit, & Orbis illius quem corpus in Ellipsi revolvente gyros peragens describit in plano quiescente. Per superiorem terminorum collationem similes redduntur hi Orbes, non universaliter, sed tunc cum ad formam circularem quam maxime appropinquant. Corpus igitur uniformi cum vi centripeta in Orbe propemodum circulari revolvens, inter Apsidem summam & Apsidem imam conficiet semper angulum $\frac{180}{\surd 3}$ graduum, seu 103 *gr.* 55 *m.* 23. *sec.* ad centrum; perveniens ab Apside summa ad Apsidem imam ubi semel confecit hunc angulum, & inde ad Apsidem summam rediens ubi iterum confecit eundem angulum; & sic deinceps in infinitum.

Exempl. 2. Ponamus vim centripetam esse ut altitudinis A dignitas quælibet A^{n-3} seu $\frac{A^n}{A^3}$: ubi $n-3$ & n significant dignitatum indices quoscunque integros vel fractos, rationales vel irrationales, affirmativos vel negativos. Numerator ille A^n seu $\overline{T-X}^n$ in seriem indeterminatam per Methodum nostram Serierum convergentium reducta, evadit $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XXT^{n-2}$ &c. Et collatis hujus terminis cum terminis Numeratoris alterius $RGG - RFF + TFF - FFX$, fit $RGG - RFF + TFF$ ad T^n, ut $-FF$ ad $-nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2}XT^{n-2}$ &c. Et sumendo rationes ultimas ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit RGG ad T^n ut $-FF$ ad $-nT^{n-1}$, seu GG ad T^{n-1} ut FF ad nT^{n-1} & vicissim GG ad FF ut T^{n-1} ad nT^{n-1}, id est ut 1 ad n; adeoque G ad F, id est angulus VCp ad angulum $VC\mathcal{P}$; ut

De Motu Corporum

ut 1 ad $\sqrt{n}$. Quare cum angulus VCP, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam, in Ellipsi confectus, sit graduum 180; conficietur angulus VCp, in descensu corporis ab Apside summa ad Apsidem imam, in Orbe propemodum Circulari quem corpus quodvis vi centripeta dignitati A^{n-3} proportionali describit, æqualis angulo graduum $\frac{180}{\sqrt{n}}$; & hoc angulo repetito corpus redibit ab Apside ima ad Apsidem summam, & sic deinceps in infinitum. Ut si vis centripeta sit ut distantia corporis a centro, id est, ut A seu $\frac{A^4}{A^3}$, erit n æqualis 4 & $\sqrt{n}$ æqualis 2; adeoque angulus inter Apsidem summam & Apsidem imam æqualis $\frac{180}{2}$ *gr.* seu 90. *gr.* Completa igitur quarta parte revolutionis unius, corpus perveniet ad Apsidem imam, & completa alia quarta parte ad Apsidem summam, & sic deinceps per vices in infinitum. Id quod etiam ex Propositione x. manifestum est. Nam corpus urgente hac vi centripeta revolvetur in Ellipsi immobili, cujus centrum est in centro virium. Quod si vis centripeta sit reciproce ut distantia, id est directe ut $\frac{1}{A}$ seu $\frac{A^2}{A^3}$, erit n æqualis 2. adeoque inter Apsidem summam & imam angulus erit graduum $\frac{180}{\sqrt{2}}$ seu 127 *gr.* 16. *m.* 45. *sec.* & propterea corpus tali vi revolvens, perpetua anguli hujus repetitione, vicibus alternis ab Apside summa ad imam & ab ima ad summam perveniet in æternum. Porro si vis centripeta sit reciproce ut latus quadrato-quadratum undecimæ dignitatis altitudinis, id est reciproce ut $A^{\frac{11}{4}}$, adeoque directe ut $\frac{1}{A^{\frac{11}{4}}}$ seu ut $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, erit n æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{180}{\sqrt{n}}$ *gr.* æqualis 360 *gr.* & propterea corpus de Apside summa discedens & subinde perpetuo descendens, perveniet ad Apsidem imam ubi complevit revolutionem integram, dein perpetuo ascensu complendo aliam revolutionem integram redibit ad Apsidem summam: & sic per vices in æternum.

Exempl. 3. Assumentes m & n pro quibusvis indicibus dignitatum Altitudinis, & b, c pro numeris quibusvis datis, ponamus vim centripetam esse ut $\frac{bA^m + cA^n}{A \text{ cub.}}$, id est, ut $\frac{b \text{ in } \overline{T-X}^m + c \text{ in } \overline{T-X}^n}{A \text{ cub.}}$ seu (per eandem Methodum nostram Serierum convergentium) ut

$$\frac{bT^m + cT^n - mbXT^{m-1} - ncXT^{n-1} + \frac{mm-m}{2} bXXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2} cXXT^{n-2} \text{ \&c.}}{A \text{ cub.}}$$

&

& collatis numeratorum terminis, fiet $RGG - RFF + TFF$ ab $bT^m + cT^n$, ut $-FF$ ad $-mbT^{m-1} - ncT^{n-1}$ $+\frac{mm-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$, &c. Et sumendo rationes ultimas quæ prodeunt ubi Orbes ad formam circularem accedunt, fit GG ad $bT^{m-1} + cT^{n-1}$, ut FF ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$, & vicissim GG ad FF ut $bT^{m-1} + cT^{n-1}$ ad $mbT^{m-1} + ncT^{n-1}$. Quæ proportio, exponendo altitudinem maximam CV seu T arithmetice per Unitatem, fit GG ad FF ut $b+c$ ad $mb+nc$, adeoque ut 1 ad $\frac{mb+nc}{b+c}$. Unde est G ad F, id est angulus VCp ad angulum VCP, ut 1 ad $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. Et propterea cum Angulus VCP inter Apsidem summam & Apsidem imam in Ellipsi immobili sit 180. *gr.* erit angulus VCp inter easdem Apsides, in Orbe quem corpus vi centripeta quantitati $\frac{bA^m + cA^n}{A\ cub.}$ proportionali describit, æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Et eodem argumento si vis centripeta sit ut $\frac{bA^m - cA^n}{A\ cub.}$, angulus inter Apsides invenietur graduum $180\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$. Nec secus resolvetur Problema in casibus difficilioribus. Quantitas cui vis centripeta proportionalis est, resolvi semper debet in Series convergentes denominatorem habentes A *cub.* Dein pars data numeratoris qui ex illa operatione provenit, ad ipsius partem alteram non datam, & pars data numeratoris hujus $RGG - RFF + TFF - FFX$ ad ipsius partem alteram non datam in eadem ratione ponendæ sunt: Et quantitates superfluas delendo, scribendoque Unitatem pro T, obtinebitur proportio G ad F.

Corol. 1. Hinc si vis centripeta sit ut aliqua altitudinis dignitas, inveniri potest dignitas illa ex motu Apsidum; & contra. Nimirum si motus totus angularis, quo corpus redit ad Apsidem eandem, sit ad motum angularem revolutionis unius, seu graduum 360, ut numerus aliquis m ad numerum alium n, & altitudo nominetur A: erit vis ut altitudinis dignitas illa $A^{\frac{nn}{mm}-3}$, cujus In-

dex eſt $\frac{nn}{mm} - 3$. Id quod per exempla ſecunda manifeſtum eſt. Unde liquet vim illam in majore quam triplicata altitudinis ratione, in receſſu a centro, decreſcere non poſſe: Corpus tali vi revolvens deque Apſide diſcedens, ſi cœperit deſcendere nunquam perveniet ad Apſidem imam ſeu altitudinem minimam, ſed deſcendet uſque ad centrum, deſcribens Curvam illam lineam de qua egimus in Cor. 3. Prop. XLI. Sin cœperit illud, de Apſide diſcedens, vel minimum aſcendere, aſcendet in infinitum, neque unquam perveniet ad Apſidem ſummam. Deſcribet enim Curvam illam lineam de qua actum eſt in eodem Corol. & in Corol. 6. Prop. XLIV. Sic & ubi vis, in receſſu a centro, decreſcit in majore quam triplicata ratione altitudinis, corpus de Apſide diſcedens, perinde ut cœperit deſcendere vel aſcendere, vel deſcendet ad centrum uſque vel aſcendet in infinitum. At ſi vis, in receſſu a centro, vel decreſcat in minore quam triplicata ratione altitudinis, vel creſcat in altitudinis ratione quacunque; corpus nunquam deſcendet ad centrum uſque, ſed ad Apſidem imam aliquando perveniet: & contra, ſi corpus de Apſide ad Apſidem alternis vicibus deſcendens & aſcendens nunquam appellat ad centrum; vis in receſſu a centro aut augebitur, aut in minore quam triplicata altitudinis ratione decreſcet: & quo citius corpus de Apſide ad Apſidem redierit, eo longius ratio virium recedet a ratione illa triplicata. Ut ſi corpus revolutionibus 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ de Apſide ſumma ad Apſidem ſummam alterno deſcenſu & aſcenſu redierit; hoc eſt, ſi fuerit m ad n ut 8 vel 4 vel 2 vel $1\frac{1}{2}$ ad 1, adeoque $\frac{nn}{mm} - 3$ valeat $\frac{1}{64} - 3$ vel $\frac{1}{16} - 3$ vel $\frac{1}{4} - 3$ vel $\frac{4}{9} - 3$: erit vis ut $A^{\frac{1}{64} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{16} - 3}$ vel $A^{\frac{1}{4} - 3}$ vel $A^{\frac{4}{9} - 3}$, id eſt, reciproce ut $A^{3 - \frac{1}{64}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{16}}$ vel $A^{3 - \frac{1}{4}}$ vel $A^{3 - \frac{4}{9}}$. Si corpus ſingulis revolutionibus redierit ad Apſidem eandem immotam; erit m ad n ut 1 ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis A^{-2} ſeu $\frac{1}{AA}$, & propterea decrementum virium in ratione duplicata altitudinis, ut in præcedentibus demonſtratum eſt. Si corpus partibus revolutionis unius vel tribus quartis, vel duabus tertiis, vel una tertia, vel una quarta, ad Apſidem eandem redierit; erit m ad n ut $\frac{3}{4}$ vel $\frac{2}{3}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ ad 1, adeoque $A^{\frac{nn}{mm} - 3}$ æqualis $A^{\frac{16}{9} - 3}$ vel $A^{\frac{9}{4} - 3}$ vel A^{9-3} vel A^{16-3}; & propterea vis aut reciproce ut

$A^{\frac{11}{9}}$

$A^{\frac{11}{9}}$ vel $A^{\frac{3}{4}}$, aut directe ut A^{6} vel A^{13}. Denique si corpus pergendo ab Apside summa ad Apsidem summam confecerit revolutionem integram, & præterea gradus tres, adeoque Apsis illa singulis corporis revolutionibus confecerit in consequentia gradus tres; erit m ad n ut 363 *gr.* ad 360 *gr.* sive ut 121 ad 120, adeoque $A^{\frac{nn}{mm}-3}$ erit æquale $A^{-\frac{29523}{14641}}$; & propterea vis centripeta reciproce ut $A^{\frac{29523}{14641}}$ seu reciproce ut $A^{2\frac{4}{243}}$ proxime. Decrescit igitur vis centripeta in ratione paulo majore quam duplicata, sed quæ vicibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit.

Corol. 2. Hinc etiam si corpus vi centripeta, quæ sit reciproce ut quadratum altitudinis, revolvatur in Ellipsi umbilicum habente in centro virium, & huic vi centripetæ addatur vel auferatur vis alia quævis extranea; cognosci potest (per Exempla tertia) motus Apsidum qui ex vi illa extranea orietur, & contra. Ut si vis qua corpus revolvitur in Ellipsi sit ut $\frac{1}{AA}$, & vis extranea ablata ut cA, adeoque vis reliqua ut $\frac{A - cA^{4}}{A\ cub.}$; erit (in Exemplis tertiis) b æqualis 1, m æqualis 1, n æqualis 4, adeoque angulus revolutionis inter Apsides æqualis angulo graduum $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$. Ponatur vim illam extraneam esse 357, 45 partibus minorem quam vis altera qua corpus revolvitur in Ellipsi, id est c esse $\frac{100}{35745}$, existente A vel T æquali 1; & $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ evadet $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$ seu 180, 7623, id est, 180 *gr.* 45. *m.* 44. *s.* Igitur corpus de Apside summa descedens, motu angulari 180 *gr.* 45. *m.* 44. *s.* perveniet ad Apsidem imam, & hoc motu duplicato ad Apsidem summam redibit: adeoque Apsis summa singulis revolutionibus progrediendo conficiet 1 *gr.* 31 *m.* 28 *sec.*

Hactenus de Motu Corporum in Orbibus quorum plana per centrum Virium transeunt. Superest ut Motus etiam determinemus in planis excentricis. Nam Scriptores qui Motum gravium tractant, considerare solent ascensus & descensus ponderum, tam obliquos in planis quibuscunque datis, quam perpendiculares: & pari jure Motus corporum Viribus quibuscunque cen-

De Motu Corporum. tra petentium, & planis excentricis innitentium hic confiderandus venit. Plana autem fupponimus effe politiffima & abfolute lubrica ne corpora retardent. Quinimo, in his demonftrationibus, vice planorum quibus corpora incumbunt quæque tangunt incumbendo, ufurpamus plana his parallela, in quibus centra corporum moventur & Orbitas movendo defcribunt. Et eadem lege Motus corporum in fuperficiebus Curvis peractos fubinde determinamus.

SECTIO X.

De Motu Corporum in Superficiebus datis, deque Funipendulorum Motu reciproco.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA XXXII.

Pofita cujufcunque generis Vi centripeta, datoque tum Virium centro tum Plano quocunque in quo corpus revolvitur, & conceffis Figurarum curvilinearum quadraturis: requiritur Motus corporis de loco dato, data cum Velocitate, fecundum rectam in Plano illo datam egreffi.

Sit S centrum Virium, SC diftantia minima centri hujus a Plano dato, P corpus de loco P, fecundum rectam PZ egrediens, Q corpus idem in Trajectoria fua revolvens, & PQR Trajectoria illa, in Plano dato defcripta, quam invenire oportet. Jungantur CQ, QS, & fi in QS capiatur SV proportionalis vi centripetæ qua corpus trahitur verfus centrum S, & agatur VT quæ fit parallela CQ & occurrat SC in T: Vis SV refolvetur (per Legum Corol. 2.) in vires ST, TV; quarum ST trahendo corpus fecundum lineam plano perpendicularem, nil mutat motum ejus in hoc plano. Vis autem altera TV, agendo fecundum pofitionem plani, trahit corpus directe verfus punctum C in plano datum, adeoque facit illud in hoc plano perinde moveri ac fi vis ST tolleretur, & corpus vi fola TV revolveretur circa centrum C in fpatio libero. Data autem vi

vi centripeta TV qua corpus Q in spatio libero circa centrum datum C revolvitur, datur per Prop. XLII, tum Trajectoria PQR quam corpus describit, tum locus Q in quo corpus ad datum quodvis tempus versabitur, tum denique velocitas corporis in loco illo Q; & contra. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XLVII. THEOREMA XV.

Posito quod Vis centripeta proportionalis sit distantiæ corporis a centro; corpora omnia in planis quibuscunque revolventia describent Ellipses, & revolutiones Temporibus æqualibus peragent; quæque moventur in lineis rectis, ultro citroque discurrendo, singulas eundi & redeundi periodos iisdem Temporibus absolvent.

Nam, stantibus quæ in superiori Propositione, vis SV qua corpus Q in plano quovis PQR revolvens trahitur versus centrum S est ut distantia SQ; atque adeo ob proportionales SV & SQ, TV & CQ, vis TV qua corpus trahitur versus punctum C in Orbis plano datum, est ut distantia CQ. Vires igitur, quibus corpora in plano PQR versantia trahuntur versus punctum C, sunt pro ratione distantiarum æquales viribus quibus corpora undiquaque trahuntur versus centrum S; & propterea corpora movebuntur iisdem temporibus, in iisdem Figuris, in plano quovis PQR circa punctum C, atque in spatiis liberis circa centrum S; adeoque (per Corol. 2. Prop. X, & Corol 2. Prop. XXXVIII) Temporibus semper æqua-

 æqualibus, vel describent Ellipses in plano illo circa centrum *C*, vel periodos movendi ultro citroque in lineis rectis per centrum *C* in plano illo ductis, complebunt. *Q. E. D.*

Scholium.

His affines sunt ascensus ac descensus corporum in superficiebus curvis. Concipe lineas curvas in plano describi, dein circa axes quosvis datos per centrum Virium transeuntes revolvi, & ea revolutione superficies curvas describere; tum corpora ita moveri ut eorum centra in his superficiebus perpetuo reperiantur. Si corpora illa oblique ascendendo & descendendo currant ultro citroque peragentur eorum motus in planis per axem transeuntibus, atque adeo in lineis curvis quarum revolutione curvæ illæ superficies genitæ sunt. Istis igitur in casibus sufficit motum in his lineis curvis considerare.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XVI.

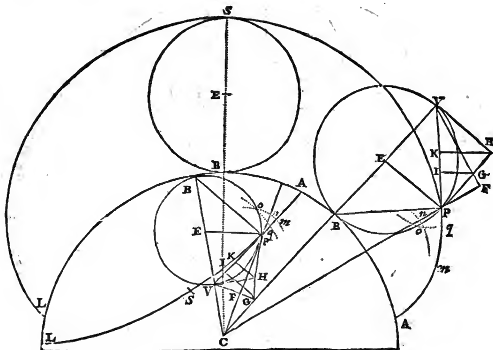
Si Rota Globo extrinsecus ad angulos rectos insistat, & more rotarum revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei, quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, (quodque Cycloidem vel Epicycloidem nominare licet) erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui Globum ex eo tempore inter eundum tetigit, ut summa diametrorum Globi & Rotæ ad semidiametrum Globi.

PROPOSITIO XLIX. THEOREMA XVII.

Si Rota Globo concavo ad rectos angulos intrinsecus insistat & revolvendo progrediatur in circulo maximo; longitudo Itineris curvilinei quod punctum quodvis in Rotæ perimetro datum, ex quo Globum tetigit, confecit, erit ad duplicatum sinum versum arcus dimidii qui Globum toto hoc tempore inter eundum tetigit, ut differentia diametrorum Globi & Rotæ ad semidiametrum Globi.

Sit

Sit ABL Globus, C centrum ejus, BPV Rota ei insistens, E centrum Rotæ, B punctum contactus, & P punctum datum in perimetro Rotæ. Concipe hanc Rotam pergere in circulo maximo ABL ab A per B versus L, & inter eundum ita revolvi ut arcus AB, PB sibi invicem semper æquentur, atque punctum illud P in perimetro Rotæ datum interea describere Viam curvilineam AP. Sit autem AP Via tota curvilinea descripta ex quo Rota Globum tetigit in A, & erit Viæ hujus longitudo AP ad duplum



sinum versum arcus $\frac{1}{2} PB$, ut $2\,CE$ ad CB. Nam recta CE (si opus est producta) occurrat Rotæ in V, junganturque CP, BP, EP, VP, & in CP productam demittatur normalis VF. Tangant PH, VH Circulum in P & V concurrentes in H, secetque PH ipsam VF in G, & ad VP demittantur normales GI, HK.

Centro

 Centro item C & intervallo quovis deſcribatur circulus onm, ſecans rectam CP in n, Rotæ perimetrum BP in o, & Viam curvilineam AP in m; centroque V & intervallo Vo deſcribatur circulus ſecans VP productam in q.

Quoniam Rota eundo ſemper revolvitur circa punctum contactus B, manifeſtum eſt quod recta BP perpendicularis eſt ad lineam

illam curvam AP quam Rotæ punctum P deſcribit, atque adeo quod recta VP tanget hanc curvam in puncto P. Circuli onm radius ſenſim auctus vel diminutus æquetur tandem diſtantiæ CP; &, ob ſimilitudinem Figuræ evaneſcentis $Pnomq$ & Figuræ $PFGVI$, ratio ultima lineolarum evaneſcentium Pm, Pn, Po, Pq, id

id est ratio mutationum momentanearum curvæ AP, rectæ CP, arcus circularis BP, ac rectæ VP, eadem erit quæ linearum PV, PF, PG, PI, respective. Cum autem VF ad CF & VH ad CV perpendiculares sunt, angulique HVG, VCF propterea æquales; & angulus VHG (ob angulos quadrilateri $HVEP$ ad V & P rectos) angulo CEP æqualis est, similia erunt triangula VHG, CEP; & inde fiet ut EP ad CE ita HG ad HV seu HP & ita KI ad KP, & composite vel divisim ut CB ad CE ita PI ad PK, & duplicatis consequentibus ut CB ad $2\,CE$ ita PI ad PV, atque ideo ut Pq ad Pm. Est igitur decrementum lineæ VP, id est, incrementum lineæ $BV-VP$ ad incrementum lineæ curvæ AP in data ratione CB ad $2\,CE$; & propterea (per Corol. Lem. IV.) longitudines $BV-VP$ & AP, incrementis illis genitæ, sunt in eadem ratione. Sed, existente BV radio, est VP co-sinus anguli BVP seu $\frac{1}{2}\,BEP$, adeoque $BV-VP$ sinus versus ejusdem anguli; & propterea in hac Rota, cujus radius est $\frac{1}{2}\,BV$, erit $BV-VP$ duplus sinus versus arcus $\frac{1}{2}\,BP$. Ergo AP est ad duplum sinum versum arcus $\frac{1}{2}\,BP$ ut $2\,CE$ ad CB. *Q. E. D.*

Lineam autem AP in Propositione priore Cycloidem extra Globum, alteram in posteriore Cycloidem intra Globum distinctionis gratia nominabimus.

Corol. 1. Hinc si describatur Cyclois integra ASL & bisecetur ea in S, erit longitudo partis PS ad longitudinem VP (quæ duplus est sinus anguli VBP, existente EB radio) ut $2\,CE$ ad CB, atque adeo in ratione data.

Corol. 2. Et longitudo semiperimetri Cycloidis AS æquabitur lineæ rectæ quæ est ad Rotæ diametrum BV, ut $2\,CE$ ad CB.

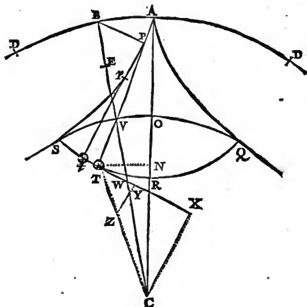
PROPOSITIO L. PROBLEMA XXXIII.

Facere ut Corpus pendulum oscilletur in Cycloide data.

Intra Globum QVS, centro C descriptum, detur Cyclois QRS bisecta in R & punctis suis extremis Q & S superficiei Globi hinc inde occurrens. Agatur CR bisecans arcum QS in O, & producatur ea ad A, ut sit CA ad CO ut CO ad CR. Centro C in-

S tervallo

tervallo CA describatur Globus exterior $AB\mathcal{D}$, & intra hunc Globum a Rota, cujus diameter sit AO, describantur duæ Semicycloides $A\mathcal{Q}$, AS, quæ Globum interiorem tangant in $\mathcal{Q}$ & S & Globo exteriori occurrant in A. A puncto illo A, Filo $A\mathcal{P}T$ longitudinem AR æquante, pendeat corpus T, & ita intra Semicycloides $A\mathcal{Q}$, AS oscilletur, ut quoties pendulum digreditur a



perpendiculo AR, Filum parte sui superiore $A\mathcal{P}$ applicetur ad Semicycloidem illam $A\mathcal{P}S$ versus quam peragitur motus, & circum eam ceu obstaculum flectatur, parteque reliqua $\mathcal{P}T$ cui Semicyclois nondum objicitur, protendatur in lineam rectam; & pondus T oscillabitur in Cycloide data $\mathcal{Q}RS$. *Q. E. F.*

Occurrat enim Filum $\mathcal{P}T$ tum Cycloidi $\mathcal{Q}RS$ in T, tum circulo $\mathcal{Q}OS$ in V, agaturque CV; & ad Fili partem rectam $\mathcal{P}T$, e punctis extremis $\mathcal{P}$ ac T, erigantur perpendicula $\mathcal{P}B$, TW, occurrentia rectæ CV in B & W. Patet, ex constructione & genesi similium Figurarum AS, SR, perpendicula illa $\mathcal{P}B$, TW abscindere de CV longitudines VB, VW Rotarum diametris OA, OR æquales. Est igitur $T\mathcal{P}$ ad $V\mathcal{P}$ (duplum sinum anguli $VB\mathcal{P}$ existente $\frac{1}{2}BV$ radio)

dio) ut BW ad BV, seu $AO+OR$ ad AO, id est (cum sint CA ad CO, CO ad CR & divisim AO ad OR proportionales,) ut $CA+CO$ ad CA, vel, si bisecetur BV in E, ut $2CE$ ad CB. Proinde, (per Corol. 1. Prop. XLIX.) longitudo partis rectæ Fili PT æquatur semper Cycloidis arcui PS, & Filum totum APT æquatur semper Cycloidis arcui dimidio APS, hoc est (per Corol. 2. Prop. XLIX.) longitudini AR. Et propterea vicissim, si Filum manet semper æquale longitudini AR, movebitur punctum T in Cycloide data QRS. *Q. E. D.*

Corol. Filum AR æquatur Semicycloidi AS, adeoque ad semidiametrum AC eandem habet rationem quam similis illi Semicyclois SR habet ad semidiametrum CO.

PROPOSITIO LI. THEOREMA XVIII.

Si vis centripeta tendens undique ad Globi centrum C *sit in locis singulis ut distantia loci cujusque a centro, & hac sola Vi agente corpus* T *oscilletur (modo jam descripto) in perimetro Cycloidis* QRS*: dico quod oscillationum utcunque inæqualium æqualia erunt Tempora.*

Nam in Cycloidis tangentem TW infinite productam cadat perpendiculum CX & jungatur CT. Quoniam vis centripeta qua corpus T impellitur versus C est ut distantia CT, atque hæc (per Legum Corol. 2.) resolvitur in partes CX, TX; quarum CX impellendo corpus directe a P distendit filum PT & per ejus resistentiam tota cessat, nullum alium edens effectum; pars autem altera TX, urgendo corpus transversim seu versus X, directe accelerat motum ejus in Cycloide; manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionalis, sit singulis momentis ut longitudo TX, id est, (ob datas CV, WV iisque proportionales VX, TW,) ut longitudo TW, hoc est (per Corol. 1. Prop. XLIX.) ut longitudo arcus Cycloidis TR. Pendulis igitur duobus APT, Apt de perpendiculo AR inæqualiter deductis & simul dimissis, accelerationes eorum semper erunt ut arcus describendi TR, tR. Sunt autem partes sub initio descriptæ ut accelerationes, hoc est, ut totæ sub initio describendæ, & propterea partes quæ manent describendæ

dæ & accelerationes subsequentes, his partibus proportionales, sunt etiam ut totæ; & sic deinceps. Sunt igitur accelerationes atque adeo velocitates genitæ & partes his velocitatibus descriptæ partesque describendæ, semper ut totæ; & propterea partes describendæ datam servantes rationem ad invicem simul evanescent, id est, corpora duo oscillantia simul pervenient ad perpendiculum *AR*. Cumque vicissim ascensus perpendiculorum de loco infimo *R*, per eosdem arcus Cycloidales motu retrogrado facti, retardentur in locis singulis a viribus iisdem a quibus descensus accelerabantur, patet velocitates ascensuum ac descensuum per eosdem arcus factorum æquales esse, atque adeo temporibus æqualibus fieri; & propterea, cum Cycloidis partes duæ *RS* & *RQ* ad utrumque perpendiculi latus jacentes sint similes & æquales, pendula duo oscillationes suas tam totas quam dimidias iisdem temporibus semper peragent. *Q. E. D.*

Corol. Vis qua corpus *T* in loco quovis *T* acceleratur vel retardatur in Cycloide, est ad totum corporis ejusdem Pondus in loco altissimo *S* vel *Q*, ut Cycloidis arcus *TR* ad ejusdem arcum *SR* vel *QR*.

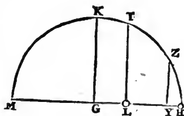
PROPOSITIO LII. PROBLEMA XXXIV.

Definire & Velocitates Pendulorum in locis singulis, & Tempora quibus tum oscillationes totæ, tum singulæ oscillationum partes peraguntur.

Centro quovis *G*, intervallo *GH* Cycloidis arcum *RS* æquante, describe semicirculum *HKMG* semidiametro *GK* bisectum. Et si vis centripeta, distantiis locorum a centro proportionalis, tendat ad centrum *G*, sitque ea in perimetro *HIK* æqualis vi centripetæ in perimetro Globi *QOS* (*Vide Fig. Prop.* L.) ad ipsius centrum tendenti; & eodem tempore quo pendulum *T* dimittitur e loco supremo *S*, cadat corpus aliquod *L* ab *H* ad *G*: quoniam vires quibus corpora urgentur sunt æquales sub initio & spatiis describendis *TR*, *LG* semper proportionales, atque adeo, si æquantur *TR* & *LG*, æquales in locis *T* & *L*; patet corpora illa describere spatia *ST*, *HL* æqualia sub initio, adeoque subinde pergere æqualiter urgeri, & æqualia spatia describere. Quare, per Prop. XXXVIII, tempus quo corpus describit arcum *ST* est ad tempus oscil-

oscillationis unius, ut arcus HI (tempus quo corpus H perveniet ad L) ad semiperipheriam HKM (tempus quo corpus H perveniet ad M.) Et velocitas corporis penduli in loco T est ad velocitatem ipsius in loco infimo R, (hoc est, velocitas corporis H in loco L ad velocitatem ejus in loco G, seu incrementum momentaneum lineæ HL ad incrementum momentaneum lineæ HG, arcubus HI, HK æquabili fluxu crescentibus) ut ordinatim applicata LI ad radium GK, sive ut $\sqrt{SRq - TRq}$. ad SR. Unde cum, in oscillationibus inæqualibus, describantur æqualibus temporibus arcus totis oscillationum arcubus proportionales; habentur, ex datis temporibus, & velocitates & arcus descripti in oscillationibus universis. Quæ erant primo invenienda.

Oscillentur jam Funipendula corpora in Cycloidibus diversis intra Globos diversos, quorum diversæ sunt etiam Vires absolutæ, descriptis: &, si Vis absoluta Globi cujusvis QOS dicatur V, Vis acceleratrix qua Pendulum urgetur in circumferentia hujus Globi, ubi incipit directe versus centrum ejus moveri, erit ut distantia Corporis



penduli a centro illo & Vis absoluta Globi conjunctim, hoc est, ut $CO \times V$. Itaque lineola HY, quæ sit ut hæc Vis acceleratrix $CO \times V$, describetur dato tempore; &, si erigatur normalis YZ circumferentiæ occurrens in Z, arcus nascens HZ denotabit datum illud tempus. Est autem arcus hic nascens HZ in subduplicata ratione rectanguli GHY, adeoque ut $\sqrt{GH \times CO \times V}$. Unde Tempus oscillationis integræ in Cycloide QRS (cum sit ut semiperipheria HKM, quæ oscillationem illam integram denotat, directe, utque arcus HZ, qui datum tempus similiter denotat, inverse) fiet ut GH directe & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverse, hoc est, ob æquales GH & SR, ut $\frac{SR}{\sqrt{CO \times V}}$, sive (per Corol. Prop. L) ut $\frac{AR}{\sqrt{AC \times V}}$. Itaque Oscillationes in Globis & Cycloidibus omnibus, quibuscunque cum Viribus absolutis factæ, sunt in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione longitudinis Fili directe, & subduplicata ratione distantiæ inter punctum suspensionis & centrum

 Globi.

 Globi inverse, & subduplicata ratione Vis absolutæ Globi etiam inverse. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc etiam Oscillantium, Cadentium & Revolventium corporum tempora possunt inter se conferri. Nam si Rotæ, qua Cyclois intra globum describitur, diameter constituatur æqualis semidiametro globi, Cyclois evadet Linea recta per centrum globi transiens, & Oscillatio jam erit descensus & subsequens ascensus in hac recta. Unde datur tum tempus descensus de loco quovis ad centrum, tum tempus huic æquale quo corpus uniformiter circa centrum globi ad distantiam quamvis revolvendo arcum quadrantalem describit. Est enim hoc tempus (per Casum secundum) ad tempus semioscillationis in Cycloide quavis QRS ut 1 ad $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Corol. 2. Hinc etiam consectantur quæ *Wrennus* & *Hugenius* de Cycloide vulgari adinvenerunt. Nam si Globi diameter augeatur in infinitum: mutabitur ejus superficies sphærica in planum, Visque centripeta aget uniformiter secundum lineas huic plano perpendiculares, & Cyclois nostra abibit in Cycloidem vulgi. Isto autem in casu longitudo arcus Cycloidis, inter planum illud & punctum describens, æqualis evadet quadruplicato sinui verso dimidii arcus Rotæ inter idem planum & punctum describens; ut invenit *Wrennus*: Et Pendulum inter duas ejusmodi Cycloides in simili & æquali Cycloide temporibus æqualibus oscillabitur, ut demonstravit *Hugenius*. Sed & Descensus gravium, tempore Oscillationis unius, is erit quem *Hugenius* indicavit.

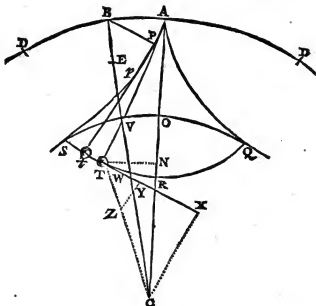
Aptantur autem Propositiones a nobis demonstratæ ad veram constitutionem Terræ, quatenus Rotæ eundo in ejus circulis maximis describunt motu Clavorum, perimetris suis infixorum, Cycloides extra globum; & Pendula inferius in fodinis & cavernis Terræ suspensa, in Cycloidibus intra globos oscillari debent, ut Oscillationes omnes evadant Isochronæ. Nam Gravitas (ut in Libro tertio docebitur) decrescit in progressu a superficie Terræ, sursum quidem in duplicata ratione distantiarum a centro ejus, deorsum vero in ratione simplici.

PROPO-

PROPOSITIO LIII. PROBLEMA XXXV.

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Vires quibus corpora in datis curvis lineis Oscillationes semper Isochronas peragent.

Oscilletur Corpus T in curva quavis linea $STRQ$, cujus axis sit OR transiens per virium centrum C. Agatur TX quæ curvam illam in corporis loco quovis T contingat, inque hac tan-



gente TX capiatur TY æqualis arcui TR. Nam longitudo arcus illius ex Figurarum quadraturis (per Methodos vulgares) innotescit. De puncto Y educatur recta YZ tangenti perpendicularis. Agatur CT perpendiculari illi occurrens in Z, & erit Vis centripeta proportionalis rectæ TZ. *Q. E. I.*

Nam

Nam si vis, qua corpus trahitur de T versus C, exponatur per rectam TZ captam ipsi proportionalem, resolvetur hæc in vires TY, YZ; quarum YZ trahendo corpus secundum longitudinem Fili PT, motum ejus nil mutat, vis autem altera TY motum ejus in curva $STRQ$ directe accelerat, vel directe retardat. Proinde cum hæc sit ut via describenda TR, accelerationes corporis vel retardationes in Oscillationum duarum (majoris & minoris) partibus proportionalibus describendis, erunt semper ut partes illæ, & propterea facient ut partes illæ simul describantur. Corpora autem quæ partes totis semper proportionales simul describunt, simul describent totas. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpus T Filo rectilineo AT a centro A pendens, describat arcum circularem $STRQ$, & interea urgeatur secundum lineas parallelas deorsum a vi aliqua, quæ sit ad vim uniformem Gravitatis, ut arcus TR ad ejus sinum TN: æqualia erunt Oscillationum singularum tempora. Etenim ob parallelas TZ, AR, similia erunt triangula ATN, ZTY; & propterea TZ erit ad AT ut TY ad TN; hoc est, (si Gravitatis vis uniformis exponatur per longitudinem datam AT) vis TZ, qua Oscillationes evadent Isochronæ, erit ad vim Gravitatis AT, ut arcus TR ipsi TY æqualis ad arcus illius sinum TN.

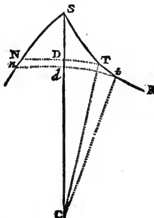
Corol. 2. Igitur in Horologiis, si vires a Machina in Pendulum ad motum conservandum impressæ ita cum vi Gravitatis componi possint, ut vis tota deorsum semper sit ut linea quæ oritur applicando rectangulum sub arcu TR & radio AR ad sinum TN, Oscillationes omnes erunt Isochronæ.

PROPOSITIO LIV. PROBLEMA XXXVI.

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, invenire Tempora quibus corpora vi qualibet centripeta in lineis quibuscunque curvis, in plano per centrum Virium transeunte descriptis, descendent & ascendent.

Descendat corpus de loco quovis S per lineam quamvis curvam $STtR$, in plano per virium centrum C transeunte datam. Jungatur CS & dividatur eadem in partes innumeras æquales, sitque Dd partium

partium illarum aliqua. Centro *C*, intervallis *CD*, *Cd* describantur circuli *DT*, *dt*, lineæ curvæ *STtR* occurrentes in *T* & *t*. Et ex data tum lege vis centripetæ tum altitudine *CS* de qua corpus cecidit, dabitur velocitas corporis in alia quavis altitudine *CT*, per Prop. XXXIX. Tempus autem, quo corpus describit lineolam *Tt*, est ut lineolæ hujus longitudo (id est ut secans anguli *tTC*) directe, & velocitas inverse. Tempori huic proportionalis sit ordinatim applicata *DN* ad rectam *CS* per punctum *D* perpendicularis, & ob datam *Dd* erit rectangulum *Dd* × *DN*, hoc est area *DNnd*, eidem tempori proportionale. Ergo si *SNn* sit curva illa linea quam punctum *N* perpetuo tangit, erit area *SNDS* proportionalis tempori quo corpus descendendo descripsit lineam *ST*; proindeque ex inventa illa area dabitur Tempus. *Q. E. I.*



PROPOSITIO LV. THEOREMA XIX.

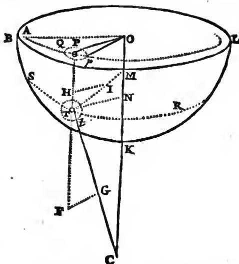
Si corpus movetur in superficie quacunque curva, cujus axis per centrum Virium transit, & a corpore in axem demittatur perpendicularis, eique parallela & æqualis ab axis puncto quovis dato ducatur: dico quod parallela illa aream tempori proportionalem describet.

Sit *BSKL* superficies curva, *T* corpus in ea revolvens, *STtR* Trajectoria quam corpus in eadem describit, *S* initium Trajectoriæ, *OMNK* axis superficiei curvæ, *TN* recta a corpore in axem perpendicularis, *OP* huic parallela & æqualis a puncto *O* quod in axe datur educta, *AP* vestigium Trajectoriæ a puncto *P* in lineæ volubilis *OP* plano *AOP* descriptum, *A* vestigii initium puncto *S* respondens, *TC* recta a corpore ad centrum ducta; *TG* pars ejus vi centripetæ qua corpus urgetur in centrum *C* proportionalis; *TM* recta ad superficiem curvam perpendicularis, *TI* pars ejus vi pressionis, qua corpus urget superficiem vicissimque urgetur versus *M*

T a

De Motu Corporum

a superficie, proportionalis; *PHTF* recta axi parallela per corpus transiens, & *GF*, *IH* rectæ a punctis *G* & *I* in parallelam illam *PHTF* perpendiculariter demissæ. Dico jam quod area *AOP*, radio *OP* ab initio motus descripta, sit tempori proportionalis. Nam vis *TG* (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires *TF*, *FG*; & vis *TI* in vires *TH*, *HI*: Vires autem *TF*, *TH* agendo secundum lineam *PF* plano *AOP* perpendicularem mutant solummodo motum corporis quatenus huic plano perpendicularem. Ideoque motus ejus quatenus secundum positionem plani factus, hoc est, motus puncti *P* quo Trajectoriæ vestigium *AP* in hoc plano describitur, idem est ac si vires *TF*, *TH* tollerentur, & corpus solis viribus *FG*, *HI* agitaretur; hoc est, idem ac si corpus in plano *AOP*, vi centripeta ad centrum *O* tendente & summam virium *FG* & *HI* æquante, describeret curvam *AP*. Sed vi tali describitur area *AOP* (per Prop. 1.) tempori proportionalis. *Q. E. D.*



Corol. Eodem argumento si corpus a viribus agitatum ad centra duo vel plura in eadem quavis recta *CO* data tendentibus, describeret in spatio libero lineam quamcunque curvam *ST*; foret area *AOP* tempori semper proportionalis.

PROPOSITIO LVI. PROBLEMA XXXVII.

Concessis Figurarum curvilinearum quadraturis, datisque tum lege Vis centripetæ ad centrum datum tendentis, tum superficie curva cujus axis per centrum illud transit; invenienda est Trajectoria quam corpus in eadem superficie describet, de loco dato, data cum Velocitate, versus plagam in superficie illa datam egressum.

Stan-

Stantibus quæ in superiore Propositione constructa sunt, exeat corpus de loco S in Trajectoriam inveniendam $STtR$; &, ex data ejus velocitate in altitudine SC, dabitur ejus velocitas in alia quavis altitudine TC. Ea cum velocitate, dato tempore quam minimo, describat corpus Trajectoriæ suæ particulam Tt, sitque Pp vestigium ejus in plano AOP descriptum. Jungatur Op, & Circelli centro T intervallo Tt in superficie curva descripti sit PpQ vestigium Ellipticum in eodem plano $OAPp$ descriptum. Et ob datum magnitudine & positione Circellum, dabitur Ellipsis illa PpQ. Cumque area POp sit tempori proportionalis, atque adeo ex dato tempore detur, dabitur Op positione, & inde dabitur communis ejus & Ellipseos intersectio p, una cum angulo OPp, in quo Trajectoriæ vestigium APp secat lineam OP. Inde autem invenietur Trajectoriæ vestigium illud APp, eadem methodo qua curva linea $VIKk$ in Propositione XLI, ex similibus datis inventa fuit. Tum ex singulis vestigii punctis P erigendo ad planum AOP perpendicula PT superficiei curvæ occurrentia in T, dabuntur singula Trajectoriæ puncta T. *Q. E. I.*

SECTIO XI.

De Motu Corporum Viribus centripetis se mutuo petentium.

Hactenus exposui Motus corporum attractorum ad centrum immobile, quale tamen vix extat in rerum natura. Attractiones enim fieri solent ad corpora; & corporum trahentium & attractorum actiones semper mutuæ sunt æquales, per Legem tertiam: adeo ut neque attrahens possit quiescere neque attractum, si duo sint corpora, sed ambo (per Legum Corollarium quartum) quasi attractione mutua, circum gravitatis centrum commune revolvantur; & si plura sint corpora (quæ vel ab unico attrahantur vel omnia se mutuo attrahant) hæc ita inter se moveri debeant, ut gravitatis centrum commune vel quiescat vel uniformiter moveatur in directum. Qua de causa jam pergo Motum exponere corporum se mutuo trahentium, considerando Vires centripetas tanquam Attractiones, quamvis fortasse, si physice loquamur, verius dicantur Impulsus. In Mathematicis enim jam versamur, & propterea missis disputationibus Physicis, familiari utimur sermone, quo possimus a Lectoribus Mathematicis facilius intelligi.

PROPOSITIO LVII. THEOREMA XX.

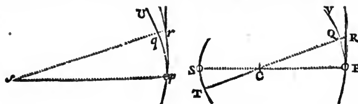
Corpora duo se invicem trahentia describunt, & circum commune centrum gravitatis, & circum se mutuo, Figuras similes.

Sunt enim distantiæ a communi gravitatis centro reciproce proportionales corporibus, atque adeo in data ratione ad invicem, & componendo in data ratione ad distantiam totam inter corpora. Feruntur autem hæ distantiæ circum terminos suos communi motu angulari, propterea quod in directum semper jacentes non mutant inclinationem ad se mutuo. Lineæ autem rectæ, quæ sunt in data ratione ad invicem, & æquali motu angulari circum terminos suos feruntur, Figuras circum eosdem terminos (in planis quæ una cum his terminis vel quiescunt vel motu quovis non angulari moventur) describunt omnino similes. Proinde similes sunt Figuræ quæ his distantiis circumactis describuntur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LVIII. THEOREMA XXI.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahunt, & interea volvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Figuris, quas corpora sic mota describunt circum se mutuo, potest Figura similis & æqualis, circum corpus alterutrum immotum, Viribus iisdem describi.

Revolvantur corpora *S*, *P* circa commune gravitatis centrum *C*, pergendo de *S* ad *T* deque *P* ad *Q*. A dato puncto *s* ipsis



SP, *TQ* æquales & parallelæ ducantur semper *sp*, *sq*; & Curva *pqv* quam punctum *p*, revolvendo circum punctum immotum *s*, describit,

describit, erit similis & æqualis Curvis quas corpora S, P describunt circum se mutuo: proindeque (per Theor. xx.) similis Curvis ST & PQV, quas eadem corpora describunt circum commune gravitatis centrum C: id adeo quia proportiones linearum SC, CP & SP vel sp ad invicem dantur.

Cas. 1. Commune illud Gravitatis centrum C, per Legum Corollarium quartum, vel quiescit vel movetur uniformiter in directum. Ponamus primo quod id quiescit, inque s & p locentur corpora duo, immobile in s, mobile in p, corporibus S & P similia & æqualia. Dein tangant rectæ PR & pr Curvas PQ & pq in P & p, & producantur CQ & sq ad R & r. Et, ob similitudinem Figurarum $CPRQ$, $sprq$, erit RQ ad rq ut CP ad sp, adeoque in data ratione. Proinde si vis qua corpus P versus corpus S, atque adeo versus centrum intermedium C attrahitur, esset ad vim qua corpus p versus centrum s attrahitur in eadem illa ratione data; hæ vires æqualibus temporibus attraherent semper corpora de tangentibus PR, pr ad arcus PQ, pq, per intervalla ipsis proportionalia RQ, rq; adeoque vis posterior efficeret ut corpus p gyraretur in Curva pqv, quæ similis esset Curvæ PQV, in qua vis prior efficit ut corpus P gyretur, & revolutiones iisdem temporibus complerentur. At quoniam vires illæ non sunt ad invicem in ratione CP ad sp, sed (ob similitudinem & æqualitatem corporum S & s, P & p, & æqualitatem distantiarum SP, sp) sibi mutuo æquales; corpora æqualibus temporibus æqualiter trahentur de tangentibus: & propterea, ut corpus posterius p trahatur per intervallum majus rq, requiritur tempus majus, idque in subduplicata ratione intervallorum; propterea quod (per Lemma decimum) spatia, ipso motus initio descripta, sunt in duplicata ratione temporum. Ponatur igitur velocitas corporis p esse ad velocitatem corporis P in subduplicata ratione distantiæ sp ad distantiam CP, eo ut temporibus, quæ sint in eadem subduplicata ratione, describantur arcus pq, PQ, qui sunt in ratione integra: Et corpora P, p viribus æqualibus semper attracta describent circum centra quiescentia C & s Figuras similes PQV, pqv, quarum posterior pqv similis est & æqualis Figuræ quam corpus P circum corpus mobile S describit. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam quod commune gravitatis centrum, una cum spatio in quo corpora moventur inter se, progreditur uniformiter in directum; &, per Legum Corollarium sextum, motus omnes in hoc spatio peragentur ut prius, adeoque corpora descri-

bent circum se mutuo Figuras easdem ac prius, & propterea Figuræ *pqv* similes & æquales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc corpora duo Viribus distantiæ suæ proportionalibus se mutuo trahentia, describunt (per Prop. x,) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Ellipses concentricas: & vice versa, si tales Figuræ describuntur, sunt Vires distantiæ proportionales.

Corol. 2. Et corpora duo Viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus describunt (per Prop. xi, xii, xiii.) & circum commune gravitatis centrum, & circum se mutuo, Sectiones conicas umbilicum habentes in centro circum quod Figuræ describuntur. Et vice versa, si tales Figuræ describuntur, Vires centripetæ sunt quadrato distantiæ reciproce proportionales.

Corol. 3. Corpora duo quævis circum gravitatis centrum commune gyrantia, radiis & ad centrum illud & ad se mutuo ductis, describunt areas temporibus proportionales.

PROPOSITIO LIX. THEOREMA XXII.

Corporum duorum S *&* P *circa commune gravitatis centrum* C *revolventium Tempus periodicum esse ad Tempus periodicum corporis alterutrius* P, *circa alterum immotum* S *gyrantis & Figuris quæ corpora circum se mutuo describunt Figuram similem & æqualem describentis, in subduplicata ratione corporis alterius* S, *ad summam corporum* S + P.

Namque, ex demonstratione superioris Propositionis, tempora quibus arcus quivis similes *PQ* & *pq* describuntur, sunt in subduplicata ratione distantiarum *CP* & *SP* vel *sp*, hoc est, in subduplicata ratione corporis *S* ad summam corporum *S + P*. Et componendo, summæ temporum quibus arcus omnes similes *PQ* & *pq* describuntur, hoc est, tempora tota quibus Figuræ totæ similes describuntur, sunt in eadem subduplicata ratione. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO LX. THEOREMA XXIII.

Si corpora duo S *&* P, *Viribus quadrato distantiæ suæ reciproce proportionalibus se mutuo trahentia, revolvuntur circa gravitatis centrum commune: dico quod Ellipseos, quam corpus alterutrum* P *hoc motu circa alterum* S *describit, Axis principalis erit ad Axem principalem Ellipseos, quam corpus idem* P *circa alterum quiescens* S *eodem tempore periodico describere posset, ut summa corporum duorum* S + P *ad primam duarum medie proportionalium inter hanc summam & corpus illud alterum* S.

Nam si descriptæ Ellipses essent sibi invicem æquales, tempora periodica (per Theorema superius) forent in subduplicata ratione corporis S ad summam corporum $S+P$. Minuatur in hac ratione tempus periodicum in Ellipsi posteriore, & tempora periodica evadent æqualia; Ellipseos autem axis principalis (per Prop. xv.) minuetur in ratione cujus hæc est sesquiplicata, id est in ratione, cujus ratio S ad $S+P$ est triplicata; adeoque erit ad axem principalem Ellipseos alterius, ut prima duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S ad $S+P$. Et inverse, axis principalis Ellipseos circa corpus mobile descriptæ erit ad axem principalem descriptæ circa immobile, ut $S+P$ ad primam duarum medie proportionalium inter $S+P$ & S. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXI. THEOREMA XXIV.

Si corpora duo Viribus quibusvis se mutuo trahentia, neque alias agitata vel impedita, quomodocunque moveantur; motus eorum perinde se habebunt ac si non traherent se mutuo, sed utrumque a corpore tertio in communi gravitatis centro constituto Viribus iisdem traheretur: Et Virium trahentium eadem erit Lex respectu distantiæ corporum a centro illo communi atque respectu distantiæ totius inter corpora.

Nam vires illæ, quibus corpora se mutuo trahunt, tendendo ad corpora, tendunt ad commune gravitatis centrum intermedium,

dium, adeoque eædem ſunt ac ſi a corpore intermedio manarent. *Q. E. D.*

Et quoniam data eſt ratio diſtantiæ corporis utriuſvis a centro illo communi ad diſtantiam corporis ejuſdem a corpore altero, dabitur ratio cujuſvis poteſtatis diſtantiæ unius ad eandem poteſtatem diſtantiæ alterius; ut & ratio quantitatis cujuſvis, quæ ex una diſtantia & quantitatibus datis utcunque derivatur, ad quantitatem aliam, quæ ex altera diſtantia & quantitatibus totidem datis datamque illam diſtantiarum rationem ad priores habentibus ſimiliter derivatur. Proinde ſi vis, qua corpus unum ab altero trahitur, ſit directe vel inverſe ut diſtantia corporum ad invicem; vel ut quælibet hujus diſtantiæ poteſtas; vel denique ut quantitas quævis ex hac diſtantia & quantitatibus datis quomodocunque derivata: erit eadem vis, qua corpus idem ad commune gravitatis centrum trahitur, directe itidem vel inverſe ut corporis attracti diſtantia a centro illo communi, vel ut eadem diſtantiæ hujus poteſtas, vel denique ut quantitas ex hac diſtantia & analogis quantitatibus datis ſimiliter derivata. Hoc eſt, Vis trahentis eadem erit Lex reſpectu diſtantiæ utriuſque. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXII. PROBLEMA XXXVIII.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, ac de locis datis demittuntur, determinare Motus.

Corpora (per Theorema noviſſimum) perinde movebuntur ac ſi a corpore tertio, in communi gravitatis centro conſtituto, traherentur; & centrum illud ipſo motus initio quieſcet per Hypotheſin; & propterea (per Legum Corol. 4.) ſemper quieſcet. Determinandi ſunt igitur motus corporum (per Prob. xxv,) perinde ac ſi a viribus ad centrum illud tendentibus urgerentur, & habebuntur motus corporum ſe mutuo trahentium. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIII. PROBLEMA XXXIX.

Corporum duorum quæ Viribus quadrato diſtantiæ ſuæ reciproce proportionalibus ſe mutuo trahunt, deque locis datis, ſecundum datas rectas, datis cum Velocitatibus exeunt, determinare Motus.

Ex

Ex datis corporum motibus ſub initio, datur uniformis motus centri communis gravitatis, ut & motus ſpatii quod una cum hoc centro movetur uniformiter in directum, nec non corporum motus initiales reſpectu hujus ſpatii. Motus autem ſubſequentes (per Legum Corollarium quintum, & Theorema noviſſimum) perinde fiunt in hoc ſpatio, ac ſi ſpatium ipſum una cum communi illo gravitatis centro quieſceret, & corpora non traherent ſe mutuo, ſed a corpore tertio ſito in centro illo traherentur. Corporis igitur alterutrius in hoc ſpatio mobili, de loco dato ſecundum datam rectam, data cum velocitate exeuntis, & vi centripeta ad centrum illud tendente correpti, determinandus eſt motus per Problema nonum & viceſimum ſextum: & habebitur ſimul motus corporis alterius e regione. Cum hoc motu componendus eſt uniformis ille Syſtematis ſpatii & corporum in eo gyrantium motus progreſſivus ſupra inventus, & habebitur motus abſolutus corporum in ſpatio immobili. *Q. E. I.*

PROPOSITIO LXIV. PROBLEMA XL.

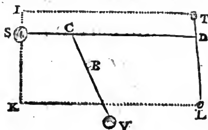
Viribus quibus Corpora ſe mutuo trahunt creſcentibus in ſimplici ratione diſtantiarum a centris: requiruntur Motus plurium Corporum inter ſe.

Ponantur primo corpora duo T & L commune habentia gravitatis centrum D. Deſcribent hæc (per Corollarium primum Theorematis XXI) Ellipſes centra habentes in D, quarum magnitudo, ex Problemate V, innoteſcit.

Trahat jam corpus tertium S priora duo T & L viribus acceleratricibus ST, SL, & ab ipſis viciſſim trahatur. Vis ST (per Legum Cor. 2.) reſolvitur in vires SD, DT; & vis SL in vires SD, DL. Vires autem DT, DL, quæ ſunt ut ipſarum ſumma TL, atque adeo ut vires acceleratrices quibus corpora T & L ſe mutuo trahunt, additæ his viribus corporum T & L, prior priori & poſterior poſteriori, componunt vires diſtantiis DT ac DL proportionales, ut prius, ſed

De Motu Corporum.

viribus prioribus majores; adeoque (per Corol. 1. Prop. x. & Corol. 1 & 8. Prop. iv) efficiunt ut corpora illa describant Ellipses ut prius, sed motu celeriore. Vires reliquæ acceleratrices SD & SD, actionibus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, quæ sunt ut corpora, trahendo corpora illa æqualiter & secundum lineas TI, LK, ipsi DS parallelas, nil mutant situs eorum ad invicem, sed faciunt ut ipsa æqualiter accedant ad lineam IK; quam ductam concipe per medium corporis S, & lineæ DS perpendicularem. Impedietur autem ille ad lineam IK accessus faciendo ut Systema corporum T & L ex una parte, & corpus S ex altera, justis cum velocitatibus, gyrentur circa commune gravitatis centrum C. Tali motu corpus S (eo quod summa virium motricium $SD \times T$ & $SD \times L$, distantiæ CS proportionalium, tendit versus centrum C) describit Ellipsin circa idem C; & punctum D, ob proportionales CS, CD, describet Ellipsin consimilem e regione. Corpora autem T & L viribus motricibus $SD \times T$ & $SD \times L$, (prius priore, posterius posteriore) æqualiter & secundum lineas parallelas TI & LK (ut dictum est) attracta, pergent (per Legum Corollarium quintum & sextum) circa centrum mobile D Ellipses suas describere, ut prius. Q. E. I.



Addatur jam corpus quartum V, & simili argumento concludetur hoc & punctum C Ellipses circa omnium commune centrum gravitatis B describere; manentibus motibus priorum corporum T, L & S circa centra D & C, sed paulo acceleratis. Et eadem methodo corpora plura adjungere licebit. Q. E. I.

Hæc ita se habent ubi corpora T & L trahunt se mutuo viribus acceleratricibus majoribus vel minoribus quam quibus trahunt corpora reliqua pro ratione distantiarum. Sunto mutuæ omnium attractiones acceleratrices ad invicem ut distantiæ ductæ in corpora trahentia, & ex præcedentibus facile deducetur quod corpora omnia æqualibus temporibus periodicis Ellipses varias, circa omnium commune gravitatis centrum B, in plano immobili describunt. Q. E. I.

PROPO-

PROPOSITIO LXV. THEOREMA XXV.

Corpora plura, quorum Vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum ab eorundem centris, moveri posse inter se in Ellipsibus; & radiis ad umbilicos ductis areas describere temporibus proportionales quam proxime.

In Propositione superiore demonstratus est casus ubi motus plures peraguntur in Ellipsibus accurate. Quo magis recedit Lex virium a Lege ibi posita, eo magis corpora perturbabunt mutuos motus; neque fieri potest ut corpora, secundum Legem hic positam se mutuo trahentia, moveantur in Ellipsibus accurate, nisi servando certam proportionem distantiarum ab invicem. In sequentibus autem casibus non multum ab Ellipsibus errabitur.

Cas. 1. Pone corpora plura minora circa maximum aliquod ad varias ab eo distantias revolvi, tendantque ad singula vires absolutæ proportionales iisdem corporibus. Et quoniam omnium commune gravitatis centrum (per Legum Corol. quartum) vel quiescit vel movetur uniformiter in directum, fingamus corpora minora tam parva esse, ut corpus maximum nunquam distet sensibiliter ab hoc centro: & maximum illud vel quiescet vel movebitur uniformiter in directum, absque errore sensibili; minora autem revolventur circa hoc maximum in Ellipsibus, atque radiis ad idem ductis describent areas temporibus proportionales; nisi quatenus errores inducuntur, vel per errorem maximi a communi illo gravitatis centro; vel per actiones minorum corporum in se mutuo. Diminui autem possunt corpora minora usque donec error iste & actiones mutuæ sint datis quibusvis minores, atque adeo donec Orbes cum Ellipsibus quadrent, & areæ respondeant temporibus absque errore qui non sit minor quovis dato. *Q. E. O.*

Cas. 2. Fingamus jam Systema corporum minorum modo jam descripto circa maximum revolventium, aliudve quodvis duorum circum se mutuo revolventium corporum Systema progredi uniformiter in directum, & interea vi corporis alterius longe maximi & ad magnam distantiam siti urgeri ad latus. Et quoniam æquales vires acceleratrices, quibus corpora secundum lineas parallelas urgentur, non mutant situs corporum ad invicem, sed ut Systema totum, servatis partium motibus inter se, simul transferatur efficiunt: manifestum est quod, ex attractionibus in corpus maximum,

De Motu Corporum nulla prorsus orietur mutatio motus attractorum inter se, nisi vel ex attractionum acceleratricum inæqualitate, vel ex inclinatione linearum ad invicem, secundum quas attractiones fiunt. Pone ergo attractiones omnes acceleratrices in corpus maximum esse inter se reciproce ut quadrata distantiarum; &, augendo corporis maximi distantiam, donec rectarum ab hoc ad reliqua ductarum differentiæ, respectu earum longitudinis, & inclinationes ad invicem minores sint quam datæ quævis, perseverabunt motus partium Systematis inter se absque erroribus qui non sint quibusvis datis minores. Et quoniam, ob exiguam partium illarum ab invicem distantiam, Systema totum ad modum corporis unius attrahitur; movebitur idem hac attractione ad modum corporis unius; hoc est, centro suo gravitatis describet circa corpus maximum Sectionem aliquam Conicam (*viz.* Hyperbolam vel Parabolam attractione languida, Ellipsin fortiore,) & Radio ad maximum ducto describet areas temporibus proportionales, absque aliis erroribus, nisi quas partium distantiæ (perexiguæ sane & pro lubitu minuendæ) valeant efficere. *Q. E. O.*

Simili argumento pergere licet ad casus magis compositos in infinitum.

Corol. 1. In casu secundo; quo propius accedit corpus omnium maximum ad Systema duorum vel plurium, eo magis turbabuntur motus partium Systematis inter se; propterea quod linearum a corpore maximo ad has ductarum jam major est inclinatio ad invicem, majorque proportionis inæqualitas.

Corol. 2. Maxime autem turbabuntur, ponendo quod attractiones acceleratrices partium Systematis versus corpus omnium maximum, non sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum a corpore illo maximo; præsertim si proportionis hujus inæqualitas major sit quam inæqualitas proportionis distantiarum a corpore maximo: Nam si vis acceleratrix, æqualiter & secundum lineas parallelas agendo, nil perturbat motus inter se, necesse est ut ex actionis inæqualitate perturbatio oriatur, majorque sit vel minor pro majore vel minore inæqualitate. Excessus impulsuum majorum, agendo in aliqua corpora & non agendo in alia, necessario mutabunt situm eorum inter se. Et hæc perturbatio, addita perturbationi quæ ex linearum inclinatione & inæqualitate oritur, majorem reddet perturbationem totam.

Corol. 3. Unde si Systematis hujus partes in Ellipsibus vel Circulis sine perturbatione insigni moveantur; manifestum est, quod cædem

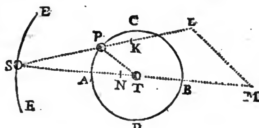
eædem a viribus acceleratricibus ad alia corpora tendentibus, aut non urgentur nisi levissime, aut urgentur æqualiter secundum lineas parallelas quamproxime.

PROPOSITIO LXVI. THEOREMA XXVI.

Si corpora tria, quorum Vires decrescunt in duplicata ratione distantiarum, se mutuo trahant, & attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint inter se reciproce ut quadrata distantiarum; minora autem circa maximum revolvantur: Dico quod interius circa intimum & maximum, radiis ad ipsum ductis, describet areas temporibus magis proportionales, & Figuram ad formam Ellipseos umbilicum in concursu radiorum habentis magis accedentem, si corpus maximum his attractionibus agitetur, quam si maximum illud vel a minoribus non attractum quiescat, vel multo minus vel multo magis attractum aut multo minus aut multo magis agitetur.

Liquet fere ex demonstratione Corollarii secundi Propositionis præcedentis; sed argumento magis distincto & latius cogente sic evincitur.

Cas. 1. Revolvantur corpora minora P & S in eodem plano circa maximum T, quorum P describat Orbem interiorem PAB, & S exteriorem SE. Sit SK mediocris distantia corporum P & S; & corporis P versus S attractio acceleratrix in mediocri illâ distantia exponatur per eandem.



In duplicata ratione SK ad SP capiatur SL ad SK, & erit SL attractio acceleratrix corporis P versus S in distantia quavis SP. Junge PT, eique parallelam age LM occurrentem ST in M, & attractio SL resolvetur (per Legum Corol. 2.) in attractiones SM, LM. Et sic urgebitur corpus P vi acceleratrice triplici: una

una tendente ad T & oriunda a mutua attractione corporum T & P. Hac vi sola corpus P circum corpus T, sive immotum sive hac attractione agitatum, describere deberet & areas, radio PT, temporibus proportionales, & Ellipsin cui umbilicus est in centro corporis T. Patet hoc per Prop. XI. & Corollaria 2 & 3 Theor. XXI. Vis altera est attractionis LM, quæ quoniam tendit a P ad T, superaddita vi priori coincidet cum ipsa, & sic faciet ut areæ etiamnum temporibus proportionales describantur per Corol. 3. Theor. XXI. At quoniam non est quadrato distantiæ PT reciproce proportionalis, componet ea cum vi priore vim ab hac proportione aberrantem, idque eo magis quo major est proportio hujus vis ad vim priorem, cæteris paribus. Proinde cum (per Prop. XI. & per Corol. 2. Theor. XXI.) vis qua Ellipsis circa umbilicum T describitur tendere debeat ad umbilicum illum, & esse quadrato distantiæ PT reciproce proportionalis; vis illa composita, aberrando ab hac proportione, faciet ut Orbis PAB aberret a forma Ellipseos umbilicum habentis in S; idque eo magis quo major est aberratio ab hac proportione; atque adeo etiam quo major est proportio vis secundæ LM ad vim primam, cæteris paribus. Jam vero vis tertia SM, trahendo corpus P secundum lineam ipsi ST parallelam, componet cum viribus prioribus vim quæ non amplius dirigitur a P in T, quæque ab hac determinatione tanto magis aberrat, quanto major est proportio hujus tertiæ vis ad vires priores, cæteris paribus; atque adeo quæ faciet ut corpus P, radio TP, areas non amplius temporibus proportionales describat, atque aberratio ab hac proportionalitate ut tanto major sit, quanto major est proportio vis hujus tertiæ ad vires cæteras. Orbis vero PAB aberrationem a forma Elliptica præfata hæc vis tertia duplici de causa adaugebit, tum quod non dirigatur a P ad T, tum etiam quod non sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ PT. Quibus intellectis, manifestum est quod areæ temporibus tum maxime fiunt proportionales, ubi vis tertia, manentibus viribus cæteris, fit minima; & quod Orbis PAB tum maxime accedit ad præfatam formam Ellipticam, ubi vis tam secunda quam tertia, sed præcipue vis tertia, fit minima, vi prima manente.

Expo-

Exponatur corporis *T* attractio acceleratrix versus *S* per lineam *SN*; & si attractiones acceleratrices *SM*, *SN* æquales essent; hæ, trahendo corpora *T* & *P* æqualiter & secundum lineas parallelas, nil mutarent situm eorum ad invicem. Iidem jam forent corporum illorum motus inter se (per Legum Corol. 6.) ac si hæ attractiones tollerentur. Et pari ratione si attractio *SN* minor esset attractione *SM*, tolleret ipsa attractionis *SM* partem *SN*, & maneret pars sola *MN*, qua temporum & arearum proportionalitas & Orbitæ forma illa Elliptica perturbaretur. Et similiter si attractio *SN* major esset attractione *SM*, oriretur ex differentia sola *MN* perturbatio proportionalitatis & Orbitæ. Sic per attractionem *SN* reducitur semper attractio tertia superior *SM* ad attractionem *MN*, attractione prima & secunda manentibus prorsus immutatis: & propterea areæ ac tempora ad proportionalitatem, & Orbita *PAB* ad formam præfatam Ellipticam tum maxime accedunt, ubi attractio *MN* vel nulla est, vel quam fieri possit minima; hoc est, ubi corporum *P* & *T* attractiones acceleratrices, factæ versus corpus *S*, accedunt quantum fieri potest ad æqualitatem; id est, ubi attractio *SN* non est nulla, neque minor minima attractionum omnium *SM*, sed inter attractionum omnium *SM* maximam & minimam quasi mediocris, hoc est, non multo major neque multo minor attractione *SK*. *Q. E. D.*

Cas. 2. Revolvantur jam corpora minora *P*, *S* circa maximum *T* in planis diversis; & vis *LM*, agendo secundum lineam *PT* in plano Orbitæ *PAB* sitam, eundem habebit effectum ac prius, neque corpus *P* de plano Orbitæ suæ deturbabit. At vis altera *NM*, agendo secundum lineam quæ ipsi *ST* parallela est, (atque adeo, quando corpus *S* versatur extra lineam Nodorum, inclinatur ad planum Orbitæ *PAB*;) præter perturbationem motus in Longitudinem jam ante expositam, inducet perturbationem motus in Latitudinem, trahendo corpus *P* de plano suæ Orbitæ. Et hæc perturbatio, in dato quovis corporum *P* & *T* ad invicem situ, erit ut vis illa generans *MN*, adeoque minima evadet ubi *MN* est minima, hoc est (uti jam exposui) ubi attractio *SN* non est multo major, neque multo minor attractione *SK*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ex his facile colligitur quod, si corpora plura minora *P*, *S*, *R*, &c. revolvantur circa maximum *T*, motus corporis intimi *P* minime perturbabitur attractionibus exteriorum, ubi corpus maximum *T* pariter a cæteris, pro ratione virium acceleratricum, attrahitur & agitatur atque cætera a se mutuo.

Corol.

Corol. 2. In Systemate vero trium corporum *T*, *P*, *S*, si attractiones acceleratrices binorum quorumcunque in tertium sint ad invicem reciproce ut quadrata distantiarum; corpus *P*, radio *PT*, aream circa corpus *T* velocius describet prope conjunctionem *A* & Oppositionem *B*, quam prope Quadraturas *C*, *D*. Namque vis omnis qua corpus *P* urgetur & corpus *T* non urgetur, quæque non agit secundum lineam *PT* accelerat vel retardat descriptionem areæ, perinde ut ipsa in consequentia vel in antecedentia dirigitur. Talis est vis *NM*. Hæc in transitu corporis *P* a *C* ad *A* tendit in consequentia, motumque accelerat; dein usque ad *D* in antecedentia, & motum retardat; tum in consequentia usque ad *B*, & ultimo in antecedentia transeundo a *B* ad *C*.

Corol. 3. Et eodem argumento patet quod corpus *P*, cæteris paribus, velocius movetur in Conjunctione & Oppositione quam in Quadraturis.

Corol. 4. Orbita corporis *P*, cæteris paribus, curvior est in Quadraturis quam in Conjunctione & Oppositione. Nam corpora velociora minus deflectunt a recto tramite. Et præterea vis *KL* vel *NM*, in Conjunctione & Oppositione, contraria est vi qua corpus *T* trahit corpus *P*, adeoque vim illam minuit; corpus autem *P* minus deflectet a recto tramite, ubi minus urgetur in corpus *T*.

Corol. 5. Unde corpus *P*, cæteris paribus, longius recedet a corpore *T* in Quadraturis, quam in Conjunctione & Oppositione. Hæc ita se habent excluso motu Excentricitatis. Nam si Orbita corporis *P* excentrica sit: Excentricitas ejus (ut mox in hujus Corol. 9. ostendetur) evadet maxima ubi Apsides sunt in Syzygiis; indeque fieri potest ut corpus *P*, ad Apsidem summam appellens, absit longius a corpore *T* in Syzygiis quam in Quadraturis.

Corol. 6. Quoniam vis centripeta corporis centralis *T*, qua corpus *P* retinetur in Orbe suo, augetur in Quadraturis per additionem vis *LM*, ac diminuitur in Syzygiis per ablationem vis *KL*, & ob magnitudinem vis *KL*, magis diminuitur quam augetur; est autem vis illa centripeta (per Corol. 2. Prop. IV.) in ratione composita ex ratione simplici radii *TP* directe & ratione duplicata temporis

ris periodici inverse: patet hanc rationem compositam diminui per actionem vis KL, adeoque tempus periodicum, si mancat Orbis radius TP, augeri, idque in subduplicata ratione qua vis illa centripeta diminuitur: auctoque adeo vel diminuto hoc Radio, tempus periodicum augeri magis, vel diminui minus quam in Radii hujus ratione sesquiplicata, per Corol. 6. Prop. IV. Si vis illa corporis centralis paulatim languesceret, corpus P minus semper & minus attractum perpetuo recederet longius a centro T; & contra, si vis illa augeretur, accederet propius. Ergo si actio corporis longinqui S, qua vis illa diminuitur, augeatur ac diminuatur per vices; augebitur simul ac diminuetur Radius TP per vices, & tempus periodicum augebitur ac diminuetur in ratione composita ex ratione sesquiplicata Radii & ratione subduplicata qua vis illa centripeta corporis centralis T, per incrementum vel decrementum actionis corporis longinqui S, diminuitur vel augetur.

Corol. 7. Ex præmissis consequitur etiam quod Ellipseos a corpore P descriptæ Axis, seu Apsidum linea, quoad motum angularem progreditur & regreditur per vices, sed magis tamen progreditur, & in singulis corporis revolutionibus per excessum progressionis fertur in consequentia. Nam vis qua corpus P urgetur in corpus T in Quadraturis, ubi vis MN evanuit, componitur ex vi LM & vi centripeta qua corpus T trahit corpus P. Vis prior LM, si augeatur distantia PT, augetur in eadem fere ratione cum hac distantia, & vis posterior decrescit in duplicata illa ratione, adeoque summa harum virium decrescit in minore quam duplicata ratione distantiæ PT, & propterea (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut Aux, seu Apsis summa, regrediatur. In Conjunctione vero & Oppositione, vis qua corpus P urgetur in corpus T differentia est inter vim qua corpus T trahit corpus P & vim KL; & differentia illa, propterea quod vis KL augetur quamproxime in ratione distantiæ PT, decrescit in majore quam duplicata ratione distantiæ PT, adeoque (per Corol. 1. Prop. XLV.) efficit ut Aux progrediatur. In locis inter Syzygias & Quadraturas pendet motus Augis ex causa utraque conjunctim, adeo ut pro hujus vel alterius excessu progrediatur ipsa vel regrediatur. Unde cum vis KL in Syzygiis sit quasi duplo major quam vis LM in Quadraturis, excessus in tota revolutione erit penes vim KL, transferetque Augem singulis revolutionibus in consequentia. Veritas autem hujus & præcedentis Corollarii facilius intelligetur concipiendo Systema corporum duorum T, P corporibus pluribus S, S, S, &c. in Orbe ESE consistentibus, undique cingi. Namque horum actioni

bus actio ipsius T minuetur undique, decrescetque in ratione plusquam duplicata distantiæ.

Corol. 8. Cum autem pendeat Apsidum progressus vel regressus a decremento vis centripetæ facto in majori vel minori quam duplicata ratione distantiæ TP, in transitu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam; ut & a simili incremento in reditu ad Apsidem imam; atque adeo maximus sit ubi proportio vis in Apside summa ad vim in Apside ima maxime recedit a duplicata ratione distantiarum inversa: manifestum est quod Apsides in Syzygiis suis, per vim ablatitiam KL seu $NM - LM$, progredientur velocius, inque Quadraturis suis tardius recedent per vim addititiam LM. Ob diuturnitatem vero temporis quo velocitas progressus vel tarditas regressus continuatur, fit hæc inæqualitas longe maxima.

Corol. 9. Si corpus aliquod vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ a centro, revolveretur circa hoc centrum in Ellipsi, & mox, in descensu ab Apside summa seu Auge ad Apsidem imam, vis illa per accessum perpetuum vis novæ augeretur in ratione plusquam duplicata distantiæ diminutæ: manifestum est quod corpus, perpetuo accessu vis illius novæ impulsum semper in centrum, magis vergeret in hoc centrum, quam si urgeretur vi sola crescente in duplicata ratione distantiæ diminutæ, adeoque Orbem describeret Orbe Elliptico interiorem, & in Apside ima propius accederet ad centrum quam prius. Orbis igitur, accessu hujus vis novæ, fiet magis excentricus. Si jam vis, in recessu corporis ab Apside ima ad Apsidem summam, decresceret iisdem gradibus quibus ante creverat, rediret corpus ad distantiam priorem, adeoque si vis decrescat in majori ratione, corpus jam minus attractum ascendet ad distantiam majorem & sic Orbis Excentricitas adhuc magis augebitur. Igitur si ratio incrementi & decrementi vis centripetæ singulis revolutionibus augeatur, augebitur semper Excentricitas; & e contra, diminuetur eadem si ratio illa decrescat. Jam vero in Systemate corporum T, P, S, ubi Apsides Orbis PAB sunt in Quadraturis, ratio illa incrementi ac decrementi minima est,

&

& maxima fit ubi Apsides sunt in Syzygiis. Si Apsides constituantur in Quadraturis, ratio prope Apsides minor est & prope Syzygias major quam duplicata distantiarum, & ex ratione illa majori oritur Augis motus velocissimus, uti jam dictum est. At si consideretur ratio incrementi vel decrementi totius in progressu inter Apsides, hæc minor est quam duplicata distantiarum. Vis in Apside ima est ad vim in Apside summa in minore quam duplicata ratione distantiæ Apsidis summæ ab umbilico Ellipseos ad distantiam Apsidis imæ ab eodem umbilico: & e contra, ubi Apsides constituuntur in Syzygiis, vis in Apside ima est ad vim in Apside summa in majore quam duplicata ratione distantiarum. Nam vires LM in Quadraturis additæ viribus corporis T componunt vires in ratione minore, & vires KL in Syzygiis subductæ viribus corporis T relinquunt vires in ratione majore. Est igitur ratio decrementi & incrementi totius, in transitu inter Apsides, minima in Quadraturis, maxima in Syzygiis: & propterea in transitu Apsidum a Quadraturis ad Syzygias perpetuo augetur, augetque Excentricitatem Ellipseos; inque transitu a Syzygiis ad Quadraturas perpetuo diminuitur, & Excentricitatem diminuit.

Corol. 10. Ut rationem ineamus errorum in Latitudinem, fingamus planum Orbis EST immobile manere; & ex errorum exposita causa manifestum est, quod, ex viribus NM, ML, quæ sunt causa illa tota, vis ML agendo semper secundum planum Orbis PAB, nunquam perturbat motus in Latitudinem: quodque vis NM, ubi Nodi sunt in Syzygiis, agendo etiam secundum idem Orbis planum, non perturbat hos motus; ubi vero sunt in Quadraturis eos maxime perturbat, corpusque P de plano Orbis sui perpetuo trahendo, minuit inclinationem plani in transitu corporis a Quadraturis ad Syzygias, augetque vicissim eandem in transitu a Syzygiis ad Quadraturas. Unde fit ut corpore in Syzygiis existente inclinatio evadat omnium minima, redeatque ad priorem magnitudinem circiter, ubi corpus ad Nodum proximum accedit. At si Nodi constituantur in Octantibus post Quadraturas, id est, inter C & A, D & B, intelligetur ex modo expositis quod, in transitu corporis P a Nodo alterutro ad gradum inde nonagesimum, inclinatio plani perpetuo minuitur; deinde in transitu per proximos 45 gradus, usque ad Quadraturam proximam, inclinatio augetur, & postea denuo in transitu per alios 45 gradus, usque ad Nodum proximum, diminuitur. Magis itaque diminuitur inclinatio quam augetur, & propterea minor est semper in Nodo subsequente quam in præcedente.

dente. Et simili ratiocinio, inclinatio magis augetur quam diminuitur ubi Nodi sunt in Octantibus alteris inter *A* & *D*, *B* & *C*. Inclinatio igitur ubi Nodi sunt in Syzygiis est omnium maxima. In transitu eorum a Syzygiis ad Quadraturas, in singulis corporis ad Nodos appulsibus, diminuitur, fitque omnium minima ubi Nodi sunt in Quadraturis & corpus in Syzygiis: dein crescit iisdem gradibus quibus antea decreverat, Nodisque ad Syzygias proximas appulsis ad magnitudinem primam revertitur.

Corol. 11. Quoniam corpus *P* ubi Nodi sunt in Quadraturis perpetuo trahitur de plano Orbis sui, idque in partem versus *S*, in transitu suo a Nodo *C* per Conjunctionem *A* ad Nodum *D*; & in contrariam partem in transitu a Nodo *D* per Oppositionem *B* ad Nodum *C*; manifestum est quod in motu suo a Nodo *C*, corpus perpetuo recedit ab Orbis sui plano primo *CD*, usque dum perventum est ad Nodum proximum; adeoque in hoc Nodo, longissime distans a plano illo primo *CD*, transit per planum Orbis *EST* non in plani illius Nodo altero *D*, sed in puncto quod inde vergit ad partes corporis *S*, quodque proinde novus est Nodi locus in anteriora vergens. Et simili argumento pergent Nodi recedere in transitu corporis de hoc Nodo in Nodum proximum. Nodi igitur in Quadraturis constituti perpetuo recedunt: in Syzygiis (ubi motus in Latitudinem nil perturbatur) quiescunt; in locis intermediis, conditionis utriusque participes, recedunt tardius; adeoque, semper vel retrogradi vel stationarii, singulis revolutionibus feruntur in antecedentia.

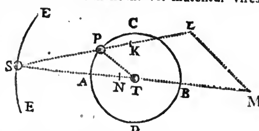
Corol. 12. Omnes illi in his Corollariis descripti Errores sunt paulo majores in Conjunctione corporum *P*, *S* quam in eorum Oppositione, idque ob majores vires generantes *NM* & *ML*.

Corol. 13. Cumque rationes horum Corollariorum non pendeant a magnitudine corporis *S*, obtinent præcedentia omnia, ubi corporis *S* tanta statuitur magnitudo ut circa ipsum revolvatur corporum duorum *T* & *P* Systema. Et ex aucto corpore *S* auctaque adeo ipsius vi centripeta, a qua errores corporis *P* oriuntur, evadent errores illi omnes (paribus distantiis) majores in hoc casu quam in altero, ubi corpus *S* circum Systema corporum *P* & *T* revolvitur.

Corol. 14. Cum autem vires *NM*, *ML*, ubi corpus *S* longinquum est, sint quamproxime ut vis *SK* & ratio *PT* ad *ST* conjunctim, hoc est, si detur tum distantia *PT*, tum corporis *S* vis absoluta, ut *ST cub.* reciproce; sint autem vires illæ *NM*, *ML* causæ errorum & effectuum omnium de quibus actum est in præcedentibus

dentibus Corollariis: manifestum est quod effectus illi omnes, stante corporum *T* & *P* Systemate, & mutatis tantum distantia *ST* & vi absoluta corporis *S*, sint quamproxime in ratione composita ex ratione directa vis absolutæ corporis *S* & ratione triplicata inversa distantiæ *ST*. Unde si Systema corporum *T* & *P* revolvatur circa corpus longinquum *S*, vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus erunt, (per Corol. 2. & 6. Prop. IV.) reciproce in duplicata ratione temporis periodici. Et inde etiam, si magnitudo corporis *S* proportionalis sit ipsius vi absolutæ, erunt vires illæ *NM*, *ML* & earum effectus directe ut cubus diametri apparentis longinqui corporis *S* e corpore *T* spectati, & vice versa. Namque hæ rationes eædem sunt atque ratio superior composita.

Corol. 15. Et quoniam si, manentibus Orbium *ESE* & *PAB* forma, proportionibus & inclinatione ad invicem, mutetur eorum magnitudo, & si corporum *S* & *T* vel maneant vel mutentur vires in data quavis ratione, hæ vires (hoc est, vis corporis *T* qua corpus *P* de recto tramite in Orbitam *PAB* deflectere, & vis corporis *S* qua corpus idem *P* de Orbita illa deviare cogitur) agunt semper eodem modo & eadem proportione: necesse est ut similes & proportionales sint effectus omnes & proportionalia effectuum tempora; hoc est, ut errores omnes lineares sint ut Orbium diametri, angulares vero iidem qui prius, & errorum linearium similium vel angularium æqualium tempora ut Orbium tempora periodica.



Corol. 16. Unde, si dentur Orbium formæ & inclinatio ad invicem, & mutentur utcunque corporum magnitudines, vires & distantiæ, ex datis erroribus & errorum temporibus in uno Casu, colligi possunt errores & errorum tempora in alio quovis, quam proxime: Sed brevius hac Methodo. Vires *NM*, *ML*, cæteris stantibus, sunt ut Radius *TP*, & harum effectus periodici (per Cor. 2. Lem. x.) ut vires & quadratum temporis periodici corporis *P* conjunctim. Hi sunt errores lineares corporis *P*; & hinc errores angulares e centro *T* spectati (id est, tam motus Augis & Nodorum, quam omnes in Longitudinem & Latitudinem errores apparentes) sunt, in qualibet revolutione corporis *P*, ut quadratum temporis

 revo-

revolutionis quam proxime. Conjungantur hæ rationes cum rationibus Corollarii 14, & in quolibet corporum *T*, *P*, *S* Systemate, ubi *P* circum *T* sibi propinquum, & *T* circum *S* longinquum revolvitur, errores angulares corporis *P*, de centro *T* apparentes, erunt, in singulis revolutionibus corporis illius *P*, ut quadratum temporis periodici corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverse. Et inde motus medius Augis erit in data ratione ad motum medium Nodorum; & motus uterque erit ut tempus periodicum corporis *P* directe & quadratum temporis periodici corporis *T* inverse. Augendo vel minuendo Excentricitatem & inclinationem Orbis *PAB* non mutantur motus Augis & Nodorum sensibiliter, nisi ubi eædem sunt nimis magnæ.

Corol. 17. Cum autem linea *LM* nunc major sit nunc minor quam radius *PT*, exponatur vis mediocris *LM* per radium illum *PT*: & erit hæc ad vim mediocrem *SK* vel *SN* (quam exponere licet per *ST*) ut longitudo *PT* ad longitudinem *ST*. Est autem vis mediocris *SN* vel *ST*, qua corpus *T* retinetur in Orbe suo circum *S* ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *T*, in ratione composita ex ratione radii *ST* ad radium *PT*, & ratione duplicata temporis periodici corporis *P* circum *T* ad tempus periodicum corporis *T* circum *S*. Et ex æquo, vis mediocris *LM*, ad vim qua corpus *P* retinetur in Orbe suo circum *T* (quave corpus idem *P*, eodem tempore periodico, circum punctum quodvis immobile *T* ad distantiam *PT* revolvi posset) est in ratione illa duplicata periodicorum temporum. Datis igitur temporibus periodicis una cum distantia *PT*, datur vis mediocris *LM*; & ea data, datur etiam vis *MN* quamproxime per analogiam linearum *PT*, *MN*.

Corol. 18. Iisdem legibus quibus corpus *P* circum corpus *T* revolvitur, fingamus corpora plura fluida circum idem *T* ad æquales ab ipso distantias moveri; deinde ex his contiguis factis conflari Annulum fluidum, rotundum ac corpori *T* concentricum; & singulæ Annuli partes, motus suos omnes ad legem corporis *P* peragendo,

agendo, propius accedent ad corpus *T*, & celerius movebuntur in Conjunctione & Oppositione ipsarum & corporis *S*, quam in Quadraturis. Et Nodi Annuli hujus seu intersectiones ejus cum plano Orbitæ corporis *S* vel *T*, quiescent in Syzygiis, extra Syzygias vero movebuntur in antecedentia, & velocissime quidem in Quadraturis, tardius aliis in locis. Annuli quoque inclinatio variabitur, & axis ejus singulis revolutionibus oscillabitur, completaque revolutione ad pristinum situm redibit, nisi quatenus per præcessionem Nodorum circumfertur.

Corol. 19. Fingas jam Globum corporis *T*, ex materia non fluida constantem, ampliari & extendi usque ad hunc Annulum, & alveo per circuitum excavato continere Aquam, motuque eodem periodico circa axem suum uniformiter revolvi. Hic liquor per vices acceleratus & retardatus (ut in superiore Corollario) in Syzygiis velocior erit, in Quadraturis tardior quam superficies Globi, & sic fluet in alveo refluetque ad modum Maris. Aqua revolvendo circa Globi centrum quiescens, si tollatur attractio corporis *S* nullum acquiret motum fluxus & refluxus. Par est ratio Globi uniformiter progredientis in directum & interea revolventis circa centrum suum (per Legum Corol. 5.) ut & Globi de cursu rectilineo uniformiter tracti, per Legum Corol. 6. Accedat autem corpus *S*, & ab ipsius inæquabili attractione mox turbabitur Aqua. Etenim major erit attractio aquæ propioris, minor ea remotioris. Vis autem *LM* trahet aquam deorsum in Quadraturis, facietque ipsam descendere usque ad Syzygias; & vis *KL* trahet eandem sursum in Syzygiis, sistetque descensum ejus & faciet ipsam ascendere usque ad Quadraturas.

Corol. 20. Si Annulus jam rigeat & minuatur Globus, cessabit motus fluendi & refluendi: sed Oscillatorius ille inclinationis motus & præcessio Nodorum manebunt. Habeat Globus eundem axem cum Annulo, gyrosque compleat iisdem temporibus, & superficie sua contingat ipsum interius, eique inhæreat; & participando motum ejus, compages utriusque oscillabitur & Nodi regredientur. Nam Globus, ut mox dicetur, ad suscipiendas impressiones omnes indifferens est. Annuli Globo orbati maximus inclinationis angulus est ubi Nodi sunt in Syzygiis. Inde in progressu Nodorum ad Quadraturas conatur is inclinationem suam minuere, & isto conatu motum imprimit Globo toti. Retinet Globus motum impressum usque dum Annulus conatu contrario motum hunc tollat, imprimatque motum novum in contrariam partem: Atque hac

ratione

ratione maximus decrescentis inclinationis motus fit in Quadraturis Nodorum, & minimus inclinationis angulus in Octantibus post Quadraturas; dein maximus reclinationis motus in Syzygiis, & maximus angulus in Octantibus proximis. Et eadem est ratio Globi Annulo nudati, qui in regionibus æquatoris vel altior est paulo quam juxta polos, vel constat ex materia paulo densiore. Supplet enim vicem Annuli iste materiæ in æquatoris regionibus excessus. Et quanquam, aucta utcunque Globi hujus vi centripeta, tendere supponantur omnes ejus partes deorsum, ad modum gravitantium partium telluris, tamen Phænomena hujus & præcedentis Corollarii vix inde mutabuntur.

Corol. 21. Eadem ratione qua materia Globi juxta æquatorem redundans efficit ut Nodi regrediantur, atque adeo per hujus incrementum augetur iste regressus, per diminutionem vero diminuitur & per ablationem tollitur; si materia plusquam redundans tollatur, hoc est, si Globus juxta æquatorem vel depressior reddatur vel rarior quam juxta polos, orietur motus Nodorum in consequentia.

Corol. 22. Et inde vicissim, ex motu Nodorum innotescit constitutio Globi. Nimirum si Globus polos eosdem constanter servat, & motus fit in antecedentia, materia juxta æquatorem redundat; si in consequentia, deficit. Pone Globum uniformem & perfecte circinatum in spatiis liberis primo quiescere; dein impetu quocunque oblique in superficiem suam facto propelli, & motum inde concipere partim circularem, partim in directum. Quoniam Globus iste ad axes omnes per centrum suum transeuntes indifferenter se habet, neque propensior est in unum axem, unumve axis situm, quam in alium quemvis; perspicuum est quod is axem suum axisque inclinationem vi propria nunquam mutabit. Impellatur jam Globus oblique, in eadem illa superficiei parte qua prius, impulsu quocunque novo; & cum citior vel serior impulsus effectum nil mutet, manifestum est quod hi duo impulsus successive impressi eundem producent motum ac si simul impressi fuissent, hoc est, eundem ac si Globus vi simplici ex utroque (per Legum Corol. 2.) composita impulsus fuisset, atque adeo simplicem, circa axem inclinatione datum. Et par est ratio impulsus secundi facti in locum alium quemvis in æquatore motus primi; ut & impulsus primi facti in locum quemvis in æquatore motus, quem impulsus secundus absque primo generaret; atque adeo impulsuum amborum factorum in loca quæcunque; Generabunt hi eundem motum circularem

cularem ac si simul & semel in locum intersectionis æquatorum motuum illorum, quos seorsim generarent, fuissent impressi. Globus igitur homogeneus & perfectus non retinet motus plures distinctos, sed impressos omnes componit & ad unum reducit, & quatenus in se est, gyratur semper motu simplici & uniformi circa axem unicum, inclinatione semper invariabili datum. Sed nec vis centripeta inclinationem axis, aut rotationis velocitatem mutare potest. Si Globus plano quocunque, per centrum suum & centrum in quod vis dirigitur transeunte, dividi intelligatur in duo hemisphæria; urgebit semper vis illa utrumque hemisphærium æqualiter, & propterea Globum, quoad motum rotationis, nullam in partem inclinabit. Addatur vero alicubi inter polum & æquatorem materia nova in formam montis cumulata, & hæc, perpetuo conatu recedendi a centro sui motus, turbabit motum Globi, facietque polos ejus errare per ipsius superficiem, & circulos circum se punctumque sibi oppositum perpetuo describere. Neque corrigetur ista vagationis enormitas, nisi locando montem illum vel in polo alterutro, quo in Casu (per Corol. 21.) Nodi æquatoris progredientur; vel in æquatore, qua ratione (per Corol. 20.) Nodi regredientur; vel denique ex altera axis parte addendo materiam novam, qua mons inter movendum libretur, & hoc pacto Nodi vel progredientur, vel recedent, perinde ut mons & hæcce nova materia sunt vel polo vel æquatori propiores.

PROPOSITIO LXVII. THEOREMA XXVII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P, T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, quam circa corpus intimum & maximum* T, *radiis ad ipsum ductis, describere potest.*

Nam corporis S attractiones versus T & P componunt ipsius attractionem absolutam, quæ magis dirigitur in corporum T & P commune gravitatis centrum C, quam in corpus maximum T, quæque quadrato distantiæ SC magis est proportionalis reciproce, quam quadrato distantiæ ST: ut rem perpendenti facile constabit.

PROPOSITIO LXVIII. THEOREMA XXVIII.

Positis iisdem attractionum legibus, dico quod corpus exterius S, *circa interiorum* P & T *commune gravitatis centrum* C, *radiis ad centrum illud ductis, describit areas temporibus magis proportionales, & Orbem ad formam Ellipseos umbilicum in centro eodem habentis magis accedentem, si corpus intimum & maximum his attractionibus perinde atque cætera agitetur, quam si id vel non attractum quiescat, vel multo magis aut multo minus attractum aut multo magis aut multo minus agitetur.*

Demonstratur eodem fere modo cum Prop. LXVI, sed argumento prolixiore, quod ideo prætereo. Suffecerit rem sic æstimare. Ex demonstratione Propositionis novissimæ liquet centrum in quod corpus *S* conjunctis viribus urgetur, proximum esse communi centro gravitatis duorum illorum. Si coincideret hoc centrum cum centro illo communi, & quiesceret commune centrum gravitatis corporum trium; describerent corpus *S* ex una parte, & commune centrum aliorum duorum ex altera parte, circa commune omnium centrum quiescens, Ellipses accuratas. Liquet hoc per Corollarium secundum Propositionis LVIII collatum cum demonstratis in Proposit. LXIV & LXV. Perturbatur iste motus Ellipticus aliquantulum per distantiam centri duorum a centro in quod tertium *S* attrahitur. Detur præterea motus communi trium centro, & augebitur perturbatio. Proinde minima est perturbatio ubi commune trium centrum quiescit, hoc est, ubi corpus intimum & maximum *T* lege cæterorum attrahitur: fitque major semper ubi trium commune illud centrum, minuendo motum corporis *T*, moveri incipit & magis deinceps magisque agitatur.

Corol. Et hinc, si corpora plura minora revolvantur circa maximum, colligere licet quod Orbitæ descriptæ propius accedent ad Ellipticas, & arearum descriptiones fient magis æquabiles, si corpora omnia viribus acceleratricibus, quæ sunt ut eorum vires absolutæ directe & quadrata distantiarum inverse, se mutuo trahant agitentque, & Orbitæ cujusque umbilicus collocetur in communi centro gravitatis corporum omnium interiorum (nimirum umbilicus Orbitæ primæ & intimæ in centro gravitatis corporis maximi & intimi; ille Orbitæ secundæ, in communi centro gravitatis corporum duorum intimorum; iste tertiæ, in communi centro gravitatis trium interiorum; & sic deinceps) quam si corpus intimum quiescat & statuatur communis umbilicus Orbitarum omnium.

PROPOSITIO LXIX. THEOREMA XXIX.

In Systemate corporum plurium A, B, C, D, *&c. si corpus aliquod* A *trahit cætera omnia* B, C, D, *&c. viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; & corpus aliud* B *trahit etiam cætera* A, C, D, *&c. viribus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente: erunt Absolutæ corporum trahentium* A, B *vires ad invicem, ut sunt ipsa corpora* A, B, *quorum sunt vires.*

Nam attractiones acceleratrices corporum omnium *B*, *C*, *D* versus *A*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur ex Hypothesi; & similiter attractiones acceleratrices corporum omnium versus *B*, paribus distantiis, sibi invicem æquantur. Est autem absoluta vis attractiva corporis *A* ad vim absolutam attractivam corporis *B*, ut attractio acceleratrix corporum omnium versus *A* ad attractionem acceleratricem corporum omnium versus *B*, paribus distantiis; & ita est attractio acceleratrix corporis *B* versus *A*, ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*. Sed attractio acceleratrix corporis *B* versus *A* est ad attractionem acceleratricem corporis *A* versus *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*; propterea quod vires motrices, quæ (per Definitionem secundam, septimam & octavam) ex viribus acceleratricibus in corpora attracta ductis oriuntur, sunt (per motus Legem tertiam) sibi invicem æqua-

 les.

les. Ergo absoluta vis attractiva corporis *A* est ad absolutam vim attractivam corporis *B*, ut massa corporis *A* ad massam corporis *B*. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt reciproce ut quadrata distantiarum a trahente; erunt corporum illorum omnium vires absolutæ ad invicem ut sunt ipsa corpora.

Corol. 2. Eodem argumento, si singula Systematis corpora *A*, *B*, *C*, *D*, &c. seorsim spectata trahant cætera omnia viribus acceleratricibus quæ sunt vel reciproce vel directe in ratione dignitatis cujuscunque distantiarum a trahente, quæve secundum Legem quamcunque communem ex distantiis ab unoquoque trahente definiuntur; constat quod corporum illorum vires absolutæ sunt ut corpora.

Corol. 3. In Systemate corporum, quorum vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum, si minora circa maximum in Ellipsibus umbilicum communem in maximi illius centro habentibus quam fieri potest accuratissimis revolvantur, & radiis ad maximum illud ductis describant areas temporibus quam maxime proportionales: erunt corporum illorum vires absolutæ ad invicem, aut accurate aut quamproxime in ratione corporum; & contra. Patet per Corol. Prop. LXVIII. collatum cum hujus Corol. 1.

Scholium.

His Propositionibus manuducimur ad analogiam inter vires centripetas & corpora centralia, ad quæ vires illæ dirigi solent. Rationi enim consentaneum est, ut vires quæ ad corpora diriguntur pendeant ab eorundem natura & quantitate, ut fit in Magneticis. Et quoties hujusmodi casus incidunt, æstimandæ erunt corporum attractiones, assignando singulis eorum particulis vires proprias, & colligendo summas virium. Vocem Attractionis hic generaliter usurpo pro corporum conatu quocunque accedendi ad invicem; sive conatus iste fiat ab actione corporum, vel se mutuo petentium, vel per Spiritus emissos se invicem agitantium, sive is ab actione Ætheris, aut Aeris, Mediive cujuscunque seu corporei seu incorporei oriatur corpora innatantia in se invicem utcunque impellentis. Eodem sensu generali usurpo vocem Impulsus, non species virium

&

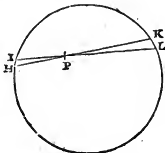
& qualitates Physicas, sed quantitates & proportiones Mathematicas in hoc Tractatu expendens, ut in Definitionibus explicui. In Mathesi investigandæ sunt virium quantitates & rationes illæ, quæ ex conditionibus quibuscunque positis consequentur: deinde, ubi in Physicam descenditur, conferendæ sunt hæ rationes cum Phænomenis, ut innotescat quænam virium conditiones singulis corporum attractivorum generibus competant. Et tum demum de virium speciebus, causis & rationibus Physicis tutius disputare licebit. Videamus igitur quibus viribus corpora Sphærica, ex particulis modo jam exposito attractivis constantia, debeant in se mutuo agere, & quales motus inde consequantur.

SECTIO XII.

De Corporum Sphæricorum Viribus attractivis.

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XXX.

Si ad Sphæricæ superficiei puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra superficiem constitutum his viribus nullam in partem attrahitur.



Sit $HIKL$ superficies illa Sphærica, & P corpusculum intus constitutum. Per P agantur ad hanc superficiem lineæ duæ HK, IL, arcus quam minimos HI, KL intercipientes; &, ob triangula HPI, LPK (per Corol. 3. Lem. VII.) similia, arcus illi erunt distantiis HP, LP proportionales; & superficiei Sphæricæ particulæ quævis ad HI & KL, rectis per punctum P transeuntibus undique terminatæ, erunt in duplicata illa ratione. Ergo vires harum particularum in corpus P exercitæ sunt inter se æquales. Sunt enim ut particulæ directe & quadrata distantiarum inverse. Et hæ duæ rationes componunt rationem

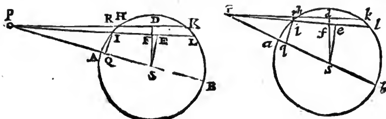
 æquali-

æqualitatis. Attractiones igitur, in contrarias partes æqualiter factæ, se mutuo destruunt. Et simili argumento, attractiones omnes per totam Sphæricam superficiem a contrariis attractionibus destruuntur. Proinde corpus *P* nullam in partem his attractionibus impellitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXI. THEOREMA XXXI.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæricam superficiem constitutum, attrahitur ad centrum Sphæræ vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab eodem centro.

Sint *AHKB*, *ahkb* æquales duæ superficies Sphæricæ, centris *S*, *s*, diametris *AB*, *ab* descriptæ, & *P*, *p* corpuscula sita extrinsecus in diametris illis productis. Agantur a corpusculis lineæ



PHK, *PIL*, *phk*, *pil*, auferentes a circulis maximis *AHB*, *ahb*, æquales arcus *HK*, *hk* & *IL*, *il*: Et ad eas demittantur perpendicula *SD*, *sd*; *SE*, *se*; *IR*, *ir*; quorum *SD*, *sd* secent *PL*, *pl* in *F* & *f*: Demittantur etiam ad diametros perpendicula *IQ*, *iq*. Evanescant anguli *DPE*, *dpe*: & (ob æquales *DS*, & *ds*, *ES* & *es*,) lineæ *PE*, *PF* & *pe*, *pf* & lineolæ *DF*, *df* pro æqualibus habeantur; quippe quarum ratio ultima, angulis illis *DPE*, *dpe* simul evanescentibus, est æqualitatis. His itaque constitutis, erit *PI*, ad *PF*, ut *RI* ad *DF*, & *pf*, ad *pi*, ut *df*, vel *DF* ad *ri*, & ex æquo $PI \times pf$ ad $PF \times pi$ ut *RI*, ad *ri*, hoc est (per Corol. 4. Lem. VII,) ut arcus *IH* ad arcum *ih*. Rursus *PI*, ad *PS* ut *IQ* ad *SE*, & *ps* ad *pi* ut *se* vel *SE* ad *iq*; & ex æquo $PI \times ps$ ad $PS \times pi$ ut *IQ* ad *iq*. Et conjunctis rationibus $PI\ quad. \times pf \times ps$ ad $pi\ quad. \times PF \times PS$, ut $IH \times IQ$ ad $ih \times iq$; hoc est, ut superficies circularis, quam

arcus

arcus IH convolutione semicirculi AKB circa diametrum AB describet, ad superficiem circularem, quam arcus ib convolutione semicirculi akb circa diametrum ab describet. Et vires, quibus hæ superficies secundum lineas ad se tendentes attrahunt corpuscula P & p, sunt (per Hypothesin) ut ipsæ superficies applicatæ ad quadrata distantiarum suarum a corporibus, hoc est, ut $pf \times ps$ ad $PF \times PS$. Suntque hæ vires ad ipsarum partes obliquas quæ (facta per Legum Corol. 2. resolutione virium) secundum lineas PS, ps ad centra tendunt, ut PI ad PQ, & pi ad pq; id est (ob similia triangula PIQ & PSF, piq & psf) ut PS ad PF & ps ad pf. Unde, ex æquo, fit attractio corpusculi hujus P versus S ad attractionem corpusculi p versus s, ut $\frac{PF \times pf \times ps}{PS}$ ad $\frac{pf \times PF \times PS}{ps}$, hoc est, ut ps *quad.* ad PS *quad.* Et simili argumento vires, quibus superficies convolutione arcuum KL, kl descriptæ trahunt corpuscula, erunt ut ps *quad.* ad PS *quad.*; inque eadem ratione erunt vires superficierum omnium circularium in quas utraque superficies Sphærica, capiendo semper sd æqualem SD & se æqualem SE, distingui potest. Et, per compositionem, vires totarum superficierum Sphæricarum in corpuscula exercitæ erunt in eadem ratione. *Q. E. D.*

LIBER PRIMUS.

PROPOSITIO LXXII. THEOREMA XXXII.

Si ad Sphæræ cujusvis puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis, ac detur tum Sphæræ densitas, tum ratio diametri Sphæræ ad distantiam corpusculi a centro ejus; dico quod vis qua corpusculum attrahitur proportionalis erit semidiametro Sphæræ.

Nam concipe corpuscula duo seorsim a Sphæris duabus attrahi, unum ab una & alterum ab altera, & distantias eorum a Sphærarum centris proportionales esse diametris Sphærarum respective, Sphæras autem resolvi in particulas similes & similiter positas ad corpuscula. Et attractiones corpusculi unius, factæ versus singulas particulas Sphæræ unius, erunt ad attractiones alterius versus analogas totidem particulas Sphæræ alterius, in ratione composita ex ratione particularum directe & ratione duplicata distantiarum inverse

verse. Sed particulæ sunt ut Sphæræ, hoc est, in ratione triplicata diametrorum, & distantiæ sunt ut diametri, & ratio prior directe una cum ratione posteriore bis inverse est ratio diametri ad diametrum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpuscula in Circulis, circa Sphæras ex materia æqualiter attractiva constantes, revolvantur; sintque distantiæ a centris Sphærarum proportionales earundem diametris: Tempora periodica erunt æqualia.

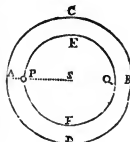
Corol. 2. Et vice versa, si Tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris. Constant hæc duo per Corol. 3. Prop. IV.

Corol. 3. Si ad Solidorum duorum quorumvis similium & æqualiter densorum puncta singula tendant vires æquales centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: vires quibus corpuscula, ad Solida illa duo similiter sita, attrahentur ab iisdem, erunt ad invicem ut diametri Solidorum.

PROPOSITIO LXXIII. THEOREMA XXXIII.

Si ad Sphæræ alicujus datæ puncta singula tendant æquales vires centripetæ decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis: dico quod corpusculum intra Sphæram constitutum attrahitur vi proportionali distantiæ suæ ab ipsius centro.

In Sphæra *ABCD*, centro *S* descripta, locetur corpusculum *P*; & centro eodem *S*, intervallo *SP*, concipe Sphæram interiorem *PEQF* describi. Manifestum est, per Prop. LXX. quod Sphæricæ superficies concentricæ ex quibus Sphærarum differentia *AEBF* componitur, attractionibus per attractiones contrarias destructis, nil agunt in corpus *P*. Restat sola attractio Sphæræ interioris *PEQF*. Et per Prop. LXXII. hæc est ut distantia *PS*. *Q. E. D.*



Scholium.

Superficies ex quibus solida componuntur, hic non sunt pure Mathematicæ, sed Orbes adeo tenues ut eorum crassitudo instar nihili

nihili sit; nimirum Orbes evanescentes ex quibus Sphæra ultimo constat, ubi Orbium illorum numerus augetur & crassitudo minuitur in infinitum. Similiter per puncta ex quibus lineæ, superficies & solida componi dicuntur, intelligendæ sunt particulæ æquales magnitudinis contemnendæ.

PROPOSITIO LXXIV. THEOREMA XXXIV.

Iisdem positis, dico quod corpusculum extra Sphæram constitutum attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro.

Nam distinguatur Sphæra in superficies Sphæricas innumeras concentricas, & attractiones corpusculi a singulis superficiebus oriundæ erunt reciproce proportionales quadrato distantiæ corpusculi a centro, per Prop. LXXI. Et componendo, fiet summa attractionum, hoc est attractio corpusculi in Sphæram totam, in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in æqualibus distantiis a centris homogenearum Sphærarum, attractiones sunt ut Sphæræ: Nam per Prop. LXXII, si distantiæ sunt proportionales diametris Sphærarum, vires erunt ut diametri. Minuatur distantia major in illa ratione; &, distantiis jam factis æqualibus, augebitur attractio in duplicata illa ratione; adeoque erit ad attractionem alteram in triplicata illa ratione, hoc est, in ratione Sphærarum.

Corol. 2. In distantiis quibusvis attractiones sunt ut Sphæræ applicatæ ad quadrata distantiarum.

Corol. 3. Si corpusculum, extra Sphæram homogeneam positum, trahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ suæ ab ipsius centro, constet autem Sphæra ex particulis attractivis; decrescet vis particulæ cujusque in duplicata ratione distantiæ a particula.

PROPOSITIO LXXV. THEOREMA XXXV.

Si ad Sphæræ datæ puncta singula tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in duplicata ratione distantiarum a punctis; dico quod Sphæra quævis alia similaris ab eadem attrahitur vi reciproce proportionali quadrato distantiæ centrorum.

Nam particulæ cujusvis attractio est reciproce ut quadratum distantiæ suæ a centro Sphæræ trahentis, (per Prop. LXXIV.) & propterea

terea eadem est ac si vis tota attrahens manaret de corpusculo unico sito in centro hujus Sphæræ. Hæc autem attractio tanta est quanta foret vicissim attractio corpusculi ejusdem, si modo illud a singulis Sphæræ attractæ particulis eadem vi traheretur qua ipsas attrahit. Foret autem illa corpusculi attractio (per Prop. LXXIV.) reciproce proportionalis quadrato distantiæ suæ a centro Sphæræ; adeoque huic æqualis attractio Sphæræ est in eadem ratione. *Q. E. D.*

Corol. 1. Attractiones Sphærarum, versus alias Sphæras homogeneas, sunt ut Sphæræ trahentes applicatæ ad quadrata distantiarum centrorum suorum a centris earum quas attrahunt.

Corol. 2. Idem valet ubi Sphæra attracta etiam attrahit. Namque hujus puncta singula trahent singula alterius, eadem vi qua ab ipsis vicissim trahuntur, adeoque cum in omni attractione urgeatur (per Legem III.) tam punctum attrahens, quam punctum attractum, geminabitur vis attractionis mutuæ, conservatis proportionibus.

Corol. 3. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicum Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens locatur in umbilico & corpora moventur extra Sphæram.

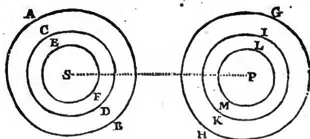
Corol. 4. Ea vero quæ de motu corporum circa centrum Conicarum Sectionum demonstrantur, obtinent ubi motus peraguntur intra Sphæram.

PROPOSITIO LXXVI. THEOREMA XXXVI.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam (quoad materiæ densitatem & vim attractivam) utcunque dissimilares, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sunt undique similares, & vis attractiva puncti cujusque decrescit in duplicata ratione distantiæ corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæra una attrahit aliam sit reciproce proportionalis quadrato distantiæ centrorum.

Sunto Sphæræ quotcunque concentricæ similares *AB*, *CD*, *EF*, &c. quarum interiores additæ exterioribus componant materiam densiorem

densiorem versus centrum, vel subductæ relinquant tenuiorem; & hæ (per Prop. LXXV.) trahent Sphæras alias quotcunque concentricas similares GH, IK, LM, &c. singulæ singulas, viribus reciproce proportionalibus quadrato distantiæ SP. Et componendo vel dividendo, summa virium illarum omnium, vel excessus aliquarum supra alias, hoc est, vis qua Sphæra tota ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis composita AB, trahit totam ex concentricis quibuscunque vel concentricarum differentiis compositam GH, erit in eadem ratione. Augeatur numerus Sphærarum concentricarum in infinitum sic, ut materiæ densitas una cum vi attractiva, in progressu a circumferentia ad centrum, secundum Legem quamcunque crescat vel decrescat: &, addita materia



non attractiva, compleatur ubivis densitas deficiens, eo ut Sphæræ acquirant formam quamvis optatam; & vis qua harum una attrahet alteram erit etiamnum (per argumentum superius) in eadem illa distantiæ quadratæ ratione inversa. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si ejusmodi Sphæræ complures, sibi invicem per omnia similes, se mutuo trahant; attractiones acceleratrices singularum in singulas erunt, in æqualibus quibusvis centrorum distantiis, ut Sphæræ attrahentes.

Corol. 2. Inque distantiis quibusvis inæqualibus, ut Sphæræ attrahentes applicatæ ad quadrata distantiarum intra centra.

Corol. 3. Attractiones vero motrices, seu pondera Sphærarum in Sphæras erunt, in æqualibus centrorum distantiis, ut Sphæræ attrahentes & attractæ conjunctim, id est, ut contenta sub Sphæris per multiplicationem producta.

Corol. 4. Inque distantiis inæqualibus, ut contenta illa applicata ad quadrata distantiarum inter centra.

 Corol. 5. Eadem valent ubi attractio oritur a Sphæræ utriusque virtute attractiva, mutuo exercita in Sphæram alteram. Nam viribus ambabus geminatur attractio, proportione servata.

Corol. 6. Si hujusmodi Sphæræ aliquæ circa alias quiescentes revolvantur, singulæ circa singulas, sintque distantiæ inter centra revolventium & quiescentium proportionales quiescentium diametris; æqualia erunt Tempora periodica.

Corol. 7. Et vicissim, si Tempora periodica sunt æqualia; distantiæ erunt proportionales diametris.

Corol. 8. Eadem omnia, quæ superius de motu corporum circa umbilicos Conicarum Sectionum demonstrata sunt, obtinent ubi Sphæra attrahens, formæ & conditionis cujusvis jam descriptæ, locatur in umbilico.

Corol. 9. Ut & ubi gyrantia sunt etiam Sphæræ attrahentes, conditionis cujusvis jam descriptæ.

PROPOSITIO LXXVII. THEOREMA XXXVII.

Si ad singula Sphærarum puncta tendant vires centripetæ, proportionales distantiis punctorum a corporibus attractis: dico quod vis composita, qua Sphæræ duæ se mutuo trahent, est ut distantia inter centra Sphærarum.

Cas. 1. Sit $AEBF$ Sphæra, S centrum ejus, P corpusculum attractum, $PASB$ axis Sphæræ per centrum corpusculi transiens, EF, ef plana duo quibus Sphæra secatur, huic axi perpendicularia & hinc inde æqualiter distantia a centro Sphæræ; G, g intersectiones planorum & axis, & H punctum quodvis in plano EF. Puncti H vis centripeta in corpusculum P, secundum lineam PH exercita, est ut distantia PH; & (per Legum Corol. 2.) secundum lineam PG, seu versus centrum S, ut longitudo PG. Igitur punctorum omnium in plano EF, hoc est plani totius vis, qua corpusculum P trahitur versus centrum S, est ut numerus punctorum ductus in distantiam PG: id est, ut contentum sub plano ipso EF & distantia illa PG. Et similiter vis plani ef, qua corpusculum P trahitur

trahitur versus centrum S, est ut planum illud ductum in distantiam suam Pg, sive ut huic æquale planum EF ductum in distantiam illam Pg; & summa virium plani utriusque ut planum EF ductum in summam distantiarum $PG + Pg$, id est, ut planum illud ductum in duplam centri & corpusculi distantiam PS, hoc est, ut duplum planum EF ductum in distantiam PS, vel ut summa æqualium planorum $EF + ef$ ducta in distantiam eandem. Et simili argumento, vires omnium planorum in Sphæra tota, hinc inde æqualiter a centro Sphæræ distantium, sunt ut summa planorum ducta in distantiam PS, hoc est, ut Sphæra tota ducta in distantiam centri sui S a corpusculo P. *Q. E. D.*

Cas. 2. Trahat jam corpusculum P Sphæram $AEBF$. Et eodem argumento probabitur quod vis, qua Sphæra illa trahitur, erit ut distantia PS. *Q. E. D.*

Cas. 3. Componatur jam Sphæra altera ex corpusculis innumeris P; & quoniam vis, qua corpusculum unumquodque trahitur, est ut distantia corpusculi a centro Sphæræ primæ ducta in Sphæram eandem, atque adeo eadem est ac si prodiret tota de corpusculo unico in centro Sphæræ; vis tota qua corpuscula omnia in Sphæra secunda trahuntur, hoc est, qua Sphæra illa tota trahitur, eadem erit ac si Sphæra illa traheretur vi prodeunte de corpusculo unico in centro Sphæræ primæ, & propterea proportionalis est distantiæ inter centra Sphærarum. *Q. E. D.*

Cas. 4. Trahant Sphæræ se mutuo, & vis geminata proportionem priorem servabit. *Q. E. D.*

Cas. 5. Locetur jam corpusculum p intra Sphæram $AEBF$; & quoniam vis plani ef in corpusculum est ut contentum sub plano illo & distantia pg; & vis contraria plani EF ut contentum sub plano illo & distantia pG; erit vis ex utraque composita ut differentia contentorum, hoc est, ut summa æqualium planorum ducta in semissem differentiæ distantiarum, id est, ut summa illa ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphæræ. Et simili argumento, attractio planorum omnium EF, ef in Sphæra tota, hoc est, attractio Sphæræ totius, est ut summa planorum omnium, seu Sphæra tota, ducta in pS distantiam corpusculi a centro Sphæræ. *Q. E. D.*

Cas. 6. Et si ex corpusculis innumeris p componatur Sphæra nova, intra Sphæram priorem $AEBF$ sita; probabitur ut prius quod attractio, sive simplex Sphæræ unius in alteram, sive mutua utriusque in se invicem, erit ut distantia centrorum pS. *Q. E. D.*

De Motu Corporum.

PROPOSITIO LXXVIII. THEOREMA XXXVIII.

Si Sphæræ in progressu a centro ad circumferentiam sint utcunque dissimilares & inæquabiles, in progressu vero per circuitum ad datam omnem a centro distantiam sint undique similares; & vis attractiva puncti cujusque sit ut distantia corporis attracti: dico quod vis tota qua hujusmodi Sphæræ duæ se mutuo trahunt sit proportionalis distantiæ inter centra Sphærarum.

Demonstratur ex Propositione præcedente, eodem modo quo Propositio LXXVI ex Propositione LXXV demonstrata fuit.

Corol. Quæ superius in Propositionibus X & LXIV de motu corporum circa centra Conicarum Sectionum demonstrata sunt, valent ubi attractiones omnes fiunt vi Corporum Sphæræ conditionis ejusdem.

Scholium.

Attractionum Casus duos insigniores jam dedi expositos; nimirum ubi Vires centripetæ decrescunt in duplicata distantiarum ratione, vel crescunt in distantiarum ratione simplici; efficientes in utroque Casu ut corpora gyrentur in Conicis Sectionibus, & componentes corporum Sphæricorum Vires centripetas eadem Lege, in recessu a centro, decrescentes vel crescentes cum seipsis: Quod est notatu dignum. Casus cæteros, qui conclusiones minus elegantes exhibent, sigillatim percurrere longum esset. Malim cunctos methodo generali simul comprehendere ac determinare, ut sequitur.

LEMMA XXIX.

Si describantur centro S *circulus quilibet* AEB, & *centro* P *circuli duo* EF, ef, *secantes priorem in* E, e, *lineamque* PS *in* F, f; & *ad* PS *demittantur perpendicula* ED, ed: *dico quod, si distantia arcuum* EF, ef *in infinitum minui intelligatur, ratio ultima lineæ evanescentis* Dd *ad lineam evanescentem* Ff *ea sit, quæ lineæ* PE *ad lineam* PS.

Nam

Nam si linea Pe secet arcum EF in q; & recta Ee, quæ cum arcu evanescente Ee coincidit, producta occurrat rectæ PS in T; & ab S demittatur in PE normalis SG: ob similia triangula DTE, dTe, DES; erit Dd ad Ee, ut DT ad TE, seu DE ad ES;

& ob triangula Eeq, ESG (per Lem. VIII, & Corol. 3. Lem VII.) similia, erit Ee ad eq seu Ff, ut ES ad SG; & ex æquo, Dd ad Ff ut DE ad SG; hoc est (ob similia triangula PDE, PGS) ut PE ad PS. *Q.E.D.*

PROPOSITIO LXXIX. THEOREMA XXXIX.

Si superficies ob latitudinem infinite diminutam jamjam evanescens EFfe, *convolutione sui circa axem* PS, *describat solidum sphæricum concavo-convexum, ad cujus particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ: dico quod Vis, qua solidum illud trahit corpusculum situm in* P, *est in ratione composita ex ratione solidi* $DEq \times Ff$ *& ratione vis qua particula data in loco* Ff *traheret idem corpusculum.*

Nam si primo consideremus vim superficiei Sphæricæ FE, quæ convolutione arcus FE generatur, & a linea de ubivis secatur in r; erit superficiei pars annularis, convolutione arcus rE genita, ut lineola Dd, manente Sphæræ radio PE, (uti demonstravit *Archimedes* in Lib. de *Sphæra & Cylindro.*) Et hujus vis secundum lineas PE vel Pr undique in superficie conica sitas exercita, ut hæc ipsa superficiei pars annularis; hoc est, ut lineola Dd vel, quod perinde est, ut rectangulum sub dato Sphæræ radio PE & lineola

De Motu Corporum

lineola illa Dd: at secundum lineam PS ad centrum S tendentem minor, in ratione PD ad PE, adeoque ut $PD \times Dd$. Dividi jam intelligatur linea DF in particulas innumeras æquales, quæ singulæ nominentur Dd; & superficies FE dividetur in totidem æquales annulos, quorum vires erunt ut summa omnium $PD \times Dd$, hoc est, ut $\frac{1}{2} PFq - \frac{1}{2} PDq$, adeoque ut DE *quad.* Ducatur

jam superficies FE in altitudinem Ff & fiet solidi $EFfe$ vis exercita in corpusculum P ut $DEq \times Ff$: puta si detur vis quam particula aliqua data Ff in distantia PF exercet in corpusculum P. At si vis illa non detur, fiet vis solidi $EFfe$ ut solidum $DEq \times Ff$ & vis illa non data conjunctim. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXX. THEOREMA XL.

Si ad Sphæræ alicujus ABE, *centro* S *descriptæ, particulas singulas æquales tendant æquales vires centripetæ, & ad Sphæræ axem* AB, *in quo corpusculum aliquod* P *locatur, erigantur de punctis singulis* D *perpendicula* DE, *Sphæræ occurrent in* E, *& in ipsis capiantur longitudines* DN, *quæ sint ut quantitas* $\frac{DEq \times PS}{PE}$ *& vis quam Sphæræ particula sita in axe ad distantiam* PE *exercet in corpusculum* P *conjunctim: dico quod Vis tota, qua corpusculum* P *trahitur versus Sphæram, est ut area comprehensa sub axe Sphæræ* AB *& linea curva* ANB, *quam punctum* N *perpetuo tangit.*

Etenim

Etenim ſtantibus quæ in Lemmate & Theoremate noviſſimo conſtructa ſunt, concipe axem Sphæræ AB dividi in particulas innumeras æquales Dd, & Sphæram totam dividi in totidem laminas Sphæricas concavo-convexas $EFfe$, & erigatur perpendiculum dn. Per Theorema ſuperius, vis qua lamina $EFfe$ trahit corpuſculum P eſt ut $DEq \times Ff$ & vis particulæ unius ad diſtantiam PE vel PF exercita conjunctim. Eſt autem per Lemma noviſſimum, Dd ad Ff ut PE ad PS, & inde Ff æqualis $\frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DEq \times Ff$ æquale Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$, & propterea vis laminæ $EFfe$ eſt ut Dd in $\frac{DEq \times PS}{PE}$ & vis particulæ ad diſtantiam PF exercita conjunctim, hoc eſt (ex Hypotheſi) ut $DN \times Dd$, ſeu area evaneſcens $DNnd$. Sunt igitur laminarum omnium vires, in corpus P exercitæ, ut areæ omnes $DNnd$, hoc eſt, Sphæræ vis tota ut area tota $ABNA$. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ſi vis centripeta, ad particulas ſingulas tendens, eadem ſemper maneat in omnibus diſtantiis, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE}$; erit vis tota qua corpuſculum a Sphæra attrahitur, ut area $ABNA$.

Corol. 2. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut diſtantia corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEq}$: erit vis qua corpuſculum P a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 3. Si particularum vis centripeta ſit reciproce ut cubus diſtantiæ corpuſculi a ſe attracti, & fiat DN ut $\frac{DEq \times PS}{PEqq}$: erit vis qua corpuſculum a tota Sphæra attrahitur ut area $ABNA$.

Corol. 4. Et univerſaliter ſi vis centripeta ad ſingulas Sphæræ particulas tendens ponatur eſſe reciproce ut quantitas V, fiat autem DN ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$; erit vis qua corpuſculum a Sphæra tota attrahitur ut area $ABNA$.

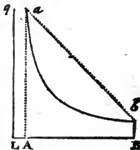
PROPOSITIO LXXXI. PROBLEMA XLI.

Stantibus jam positis, mensuranda est Area ABNA.

A puncto P ducatur recta PH Sphæram tangens in H, & ad axem PAB demissa normali HI, bisecetur PI in L; & erit (per Prop. 12. Lib. 2. Elem.) PEq æquale $PSq + SEq + 2\,PSD$. Est autem SEq seu SHq (ob similitudinem triangulorum SPH, SHI) æquale rectangulo PSI. Ergo PEq æquale est contento sub PS & $PS + SI + 2\,SD$, hoc est, sub PS & $2\,LS + 2\,SD$, id est, sub PS & $2\,LD$. Porro DE *quad.* æquale est $SEq - SDq$, seu $SEq - LSq + 2\,SLD - LDq$, id est, $2\,SLD - LDq - ALB$. Nam $LSq - SEq$ seu $LSq - SAq$ (per Prop. 6. Lib. 2. Elem.) æquatur rectangulo ALB. Scribatur itaque $2\,SLD - LDq - ALB$ pro DEq; & quantitas $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$, quæ secundum Corollarium quartum Propositionis præcedentis est ut longitudo ordinatim applicatæ DN, resolvet sese in tres partes $\frac{2\,SLD \times PS}{PE \times V} - \frac{LDq \times PS}{PE \times V} - \frac{ALB \times PS}{PE \times V}$: ubi si pro V scribatur ratio inversa vis centripetæ, & pro PE medium proportionale inter PS & $2\,LD$; tres illæ partes evadent ordinatim applicatæ linearum totidem curvarum, quarum areæ per Methodos vulgatas innotescunt. *Q. E. F.*

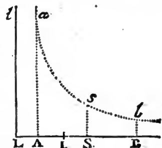
Ex-

Exempl. 1. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut distantia; pro V scribe distantiam PE; dein $2\,PS \times LD$ pro PEq, & fiet DN ut $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{ALB}{2\,LD}$. Pone DN æqualem duplo ejus $2\,SL - LD - \frac{ALB}{LD}$: & ordinatæ pars data $2\,SL$ ducta in longitudinem AB describet aream rectangulam $2\,SL \times AB$; & pars indefinita LD ducta normaliter in eandem longitudinem per motum continuum, ea lege ut inter movendum crescendo vel decrescendo æquetur semper longitudini LD, describet aream $\frac{LBq - LAq}{2}$, id est, aream $SL \times AB$; quæ subducta de area priore $2\,SL \times AB$ relinquit aream $SL \times AB$. Pars autem tertia $\frac{ALB}{LD}$ ducta itidem per motum localem normaliter in eandem longitudinem, describet aream Hyperbolicam; quæ subducta de area $SL \times AB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, B erige perpendicula Ll, Aa, Bb, quorum Aa ipsi LB, & Bb ipsi LA æquetur. Asymptotis Ll, LB, per puncta a, b describatur Hyperbola ab. Et acta chorda ba claudet aream aba areæ quæsitæ $ABNA$ æqualem.



Exempl. 2. Si vis centripeta ad singulas Sphæræ particulas tendens sit reciproce ut cubus distantiæ, vel (quod perinde est) ut cubus ille applicatus ad planum quodvis datum; scribe $\frac{PE\,cub.}{2\,ASq}$ pro V, dein $2\,PS \times LD$ pro PEq; & fiet DN ut $\frac{SL \times ASq}{PS \times LD} - \frac{ASq}{2\,PS} - \frac{ALB \times ASq}{2\,PS \times LDq}$, id est (ob continue proportionales PS, AS, SI) ut $\frac{LSI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{ALB \times SI}{2\,LDq}$. Si ducantur hujus partes tres in longitudinem AB, prima $\frac{LSI}{LD}$ generabit aream Hyperbolicam;

cam; secunda $\frac{1}{2}SI$ aream $\frac{1}{2}AB \times SI$; tertia $\frac{ALB \times SI}{2LDq}$ aream $\frac{ALB \times SI}{2LA} - \frac{ALB \times SI}{2LB}$, id est $\frac{1}{2}AB \times SI$. De prima subducatur summa secundæ & tertiæ, & manebit area quæsita $ABNA$. Unde talis emergit Problematis constructio. Ad puncta L, A, S, B erige perpendicula Ll, Aa, Ss, Bb, quorum Ss ipsi SI æquetur, perque punctum s Asymptotis Ll, LB describatur Hyperbola asb occurrens perpendiculis Aa, Bb in a & b; & rectangulum $2ASI$ subductum de area Hyperbolica $AasbB$ relinquet aream quæsitam $ABNA$.



Exempl. 3. Si Vis centripeta, ad singulas Sphæræ particulas tendens, decrescit in quadruplicata ratione distantiæ a particulis; scribe $\frac{PEqq}{2AS\,cub}$ pro V, dein $\sqrt{2PS \times LD}$ pro PE, & fiet DN ut $\frac{SIq \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDc}}$, $-\frac{SIq}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LD}}$, $-\frac{SIq \times ALB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{1}{\sqrt{LDqc}}$. Cujus tres partes ductæ in longitudinem AB, producunt areas totidem, viz. $\frac{2SIq \times SL}{\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SIq}{\sqrt{2SI}}$ in $\sqrt{LB} - \sqrt{LA}$; & $\frac{SIq \times ALB}{3\sqrt{2SI}}$ in $\frac{1}{\sqrt{LA\,cub.}} - \frac{1}{\sqrt{LB\,cub.}}$ Et hæ post debitam reductionem fiunt $\frac{2SIq \times SL}{LI}$, SIq, & $SIq + \frac{2SI\,cub.}{3LI}$. Hæ vero subductis posterioribus de priore, evadunt $\frac{4SI\,cub.}{3LI}$. Igitur vis tota, qua corpusculum P in Sphæræ centrum trahitur, est ut $\frac{SI\,cub.}{PI}$ id est, reciproce ut $PS\,cub. \times PI$. *Q.E.I.*

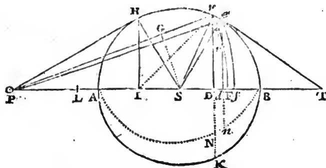
Eadem Methodo determinari potest Attractio corpusculi siti intra Sphæram, sed expeditius per Theorema sequens.

PRO-

PROPOSITIO LXXXII. THEOREMA XLI.

In Sphæra centro S *intervallo* SA *descripta, si capiantur* SI, SA, SP *continue proportionales: dico quod corpusculi intra Sphæram in loco quovis* I *attractio est ad attractionem ipsius extra Sphæram in loco* P, *in ratione composita ex subduplicata ratione distantiarum a centro* IS, PS *& subduplicata ratione virium centripetarum, in locis illis* P *&* I, *ad centrum tendentium.*

Ut si vires centripetæ particularum Sphæræ sint reciproce ut distantiæ corpusculi a se attracti; vis, qua corpusculum situm in *I* trahitur a Sphæra tota, erit ad vim qua trahitur in *P*, in ratione



composita ex subduplicata ratione distantiæ *SI* ad distantiam *SP* & ratione subduplicata vis centripetæ in loco *I*, a particula aliqua in centro oriundæ, ad vim centripetam in loco *P* ab eadem in centro particula oriundam, id est, ratione subduplicata distantiarum *SI*, *SP* ad invicem reciproce. Hæ duæ rationes subduplicatæ componunt rationem æqualitatis, & propterea attractiones in *I* & *P* a Sphæra tota factæ æquantur. Simili computo, si vires particularum Sphæræ sunt reciproce in duplicata ratione distantiarum, colligetur quod attractio in *I* sit ad attractionem in *P*, ut distantia *SP* ad Sphæræ semidiametrum *SA*: Si vires illæ sunt reciproce in triplicata ratione distantiarum, attractiones in *I* & *P* erunt ad invi-

cem ut SP *quad.* ad SA *quad.* Si in quadruplicata, ut SP *cub.* ad SA *cub.* Unde cum attractio in P, in hoc ultimo casu, inventa fuit reciproce ut PS *cub.* $\times PI$, attractio in I erit reciproce ut SA *cub.* $\times PI$, id est (ob datum SA *cub.*) reciproce ut PI. Et similis est progressus in infinitum. Theorema vero sic demonstratur.

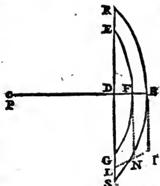
Stantibus jam ante constructis, & existente corpore in loco quovis P, ordinatim applicata DN inventa fuit ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times V}$. Ergo si agatur IE, ordinata illa ad alium quemvis locum I, mutatis mutandis, evadet ut $\frac{DEq \times IS}{IE \times V}$. Pone vires centripetas, e Sphæræ puncto quovis E manantes, esse ad invicem in distantiis IE, PE, ut PE^n ad IE^n, (ubi numerus n designet indicem potestatum PE & IE) & ordinatæ illæ fient ut $\frac{DEq \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DEq \times IS}{IE \times IE^n}$, quarum ratio ad invicem est ut $PS \times IE \times IE^n$ ad $IS \times PE \times PE^n$. Quoniam ob similia triangula SPE, SEI, fit IE ad PE ut IS ad SE vel SA; pro ratione IE ad PE scribe rationem IS ad SA; & ordinatarum ratio evadet $PS \times IE^n$ ad $SA \times PE^n$. Sed PS ad SA subduplicata est ratio distantiarum PS, SI; & IE^n ad PE^n subduplicata est ratio virium in distantiis PS, IS. Ergo ordinatæ, & propterea areæ quas ordinatæ describunt, hisque proportionales attractiones, sunt in ratione composita ex subduplicatis illis rationibus. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXIII. PROBLEMA XLII.

Invenire vim qua corpusculum in centro Sphæræ locatum ad ejus Segmentum quodcunque attrahitur.

Sit P corpus in centro Sphæræ, & $RBSD$ Segmentum ejus plano RDS & superficie Sphærica RBS contentum. Superficie Sphærica EFG centro P descripta secetur DB in F, ac distinguatur Segmentum in partes $BREFGS$, $FEDG$. Sit autem superficies illa non pure Mathematica, sed Physica, profunditatem habens quam minimam. Nominetur illa profunditas O,

tas O, & erit hæc superficies (per demonstrata *Archimedis*) ut $PF \times DF \times O$. Ponamus præterea vires attractivas particularum Sphæræ esse reciproce ut distantiarum dignitas illa cujus Index est n; & vis qua superficies FE trahit corpus P erit ut $\frac{DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DFq \times O}{2\,pF^{n}}$. Huic proportionale sit perpendiculum FN ductum in O; & area curvilinea $BDLIB$, quam ordinatim applicata FN in longitudinem DB per motum continuum ducta describit, erit ut vis tota qua Segmentum totum $RBSD$ trahit corpus P. *Q. E. I.*



PROPOSITIO LXXXIV. PROBLEMA XLIII.

Invenire vim qua corpusculum, extra centrum Sphæræ in axe Segmenti cujusvis locatum, attrahitur ab eodem Segmento.

A Segmento EBK trahatur corpus P (Vide Fig. Prop. LXXIX, LXXX, LXXXI.) in ejus axe ADB locatum. Centro P intervallo PE describatur superficies Sphærica EFK, qua distinguatur Segmentum in partes duas $EBKF$ & $EFKD$. Quæratur vis partis prioris per Prop. LXXXI, & vis partis posterioris per Prop. LXXXIII; & summa virium erit vis Segmenti totius $EBKD$. *Q. E. I.*

Scholium.

Explicatis attractionibus corporum Sphæricorum, jam pergere liceret ad Leges attractionum aliorum quorundam ex particulis attractivis similiter constantium corporum; sed ista particulatim tractare minus ad institutum spectat. Suffecerit Propositiones quasdam generaliores de viribus hujusmodi corporum, deque motibus inde oriundis, ob earum in rebus Philosophicis aliqualem usum, subjungere.

SECTIO

SECTIO XIII.

De Corporum non Sphæricorum viribus attractivis.

PROPOSITIO LXXXV. THEOREMA XLII.

Si corporis attracti, ubi attrahenti contiguum est, attractio longe fortior sit, quam cum vel minimo intervallo separantur ab invicem: vires particularum trahentis, in recessu corporis attracti, decrescunt in ratione plusquam duplicata distantiarum a particulis.

Nam si vires decrescunt in ratione duplicata distantiarum a particulis; attractio versus corpus Sphæricum, propterea quod (per Prop. LXXIV.) sit reciproce ut quadratum distantiæ attracti corporis a centro Sphæræ, haud sensibiliter augebitur ex contactu; atque adhuc minus augebitur ex contactu, si attractio in recessu corporis attracti decrescat in ratione minore. Patet igitur Propositio de Sphæris attractivis. Et par est ratio Orbium Sphæricorum concavorum corpora externa trahentium. Et multo magis res constat in Orbibus corpora interius constituta trahentibus, cum attractiones passim per Orbium cavitates ab attractionibus contrariis (per Prop. LXX.) tollantur, ideoque vel in ipso contactu nullæ sunt. Quod si Sphæris hisce Orbibusque Sphæricis partes quælibet a loco contactus remotæ auferantur, & partes novæ ubivis addantur: mutari possunt figuræ horum corporum attractivorum pro lubitu, nec tamen partes additæ vel subductæ, cum sint a loco contactus remotæ, augebunt notabiliter attractionis excessum qui ex contactu oritur. Constat igitur propositio de corporibus Figurarum omnium. *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO LXXXVI. THEOREMA XLIII.

Si particularum, ex quibus corpus attractivum componitur, vires in recessu corporis attracti decrescunt in triplicata vel plusquam triplicata ratione distantiarum a particulis: attractio longe fortior erit in contactu, quam cum attrahens & attractum intervallo vel minimo separantur ab invicem.

Nam attractionem in accessu attracti corpusculi ad hujusmodi Sphæram trahentem augeri in infinitum, constat per solutionem Problematis XLI, in Exemplo secundo ac tertio exhibitam. Idem, per Exempla illa & Theorema XLI. inter se collata, facile colligitur de attractionibus corporum versus Orbes concavo-convexos, sive corpora attracta collocentur extra Orbes, sive intra in eorum cavitatibus. Sed & addendo vel auferendo his Sphæris & Orbibus ubivis extra locum contactus materiam quamlibet attractivam, eo ut corpora attractiva induant figuram quamvis assignatam, constabit Propositio de corporibus universis. *Q. E. D.*

PROPOSITIO LXXXVII. THEOREMA XLIV.

Si corpora duo sibi invicem similia, & ex materia æqualiter attractiva constantia, seorsim attrahant corpuscula sibi ipsis proportionalia, & ad se similiter posita: attractiones acceleratrices corpusculorum in corpora tota erunt ut attractiones acceleratrices corpusculorum in eorum particulas totis proportionales & in totis similiter positas.

Nam si corpora distinguantur in particulas, quæ sint totis proportionales & in totis similiter sitæ; erit, ut attractio in particulam quamlibet unius corporis ad attractionem in particulam correspondentem in corpore altero, ita attractiones in particulas singulas primi corporis ad attractiones in alterius particulas singulas correspondentes; & componendo, ita attractio in totum primum corpus ad attractionem in totum secundum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo si vires attractivæ particularum, augendo distantias corpusculorum attractorum, decrescant in ratione dignitatis

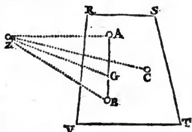
 cujusvis

 cujusvis distantiarum; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut corpora directe & distantiarum dignitates illæ inverse. Ut si vires particularum decrescant in ratione duplicata distantiarum a corpusculis attractis, corpora autem sint ut *A cub.* & *B cub.* adeoque tum corporum latera cubica tum corpusculorum attractorum distantiæ a corporibus, ut *A* & *B*: attractiones acceleratrices in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ quad.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ quad.}$ id est, ut corporum latera illa cubica *A* & *B*. Si vires particularum decrescant in ratione triplicata distantiarum a corpusculis attractis; attractiones acceleratrices in corpora tota erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ cub.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ cub.}$ id est, æquales. Si vires decrescant in ratione quadruplicata; attractiones in corpora erunt ut $\frac{A\ cub.}{A\ q\ q.}$ & $\frac{B\ cub.}{B\ q\ q.}$ id est, reciproce ut latera cubica *A* & *B*. Et sic in cæteris.

Corol. 2. Unde vicissim, ex viribus quibus corpora similia trahunt corpuscula ad se similiter posita, colligi potest ratio decrementi virium particularum attractivarum in recessu corpusculi attracti: si modo decrementum illud sit directe vel inverse in ratione aliqua distantiarum.

PROPOSITIO LXXXVIII. THEOREMA XLV.

Si particularum æqualium Corporis cujuscunque vires attractivæ sint ut distantiæ locorum a particulis: vis corporis totius tendet ad ipsius centrum gravitatis; & eadem erit cum vi Globi ex materia consimili & æquali constantis & centrum habentis in ejus centro gravitatis.



Corporis *RSTV* particulæ *A*, *B* trahant corpusculum aliquod *Z* viribus quæ, si particulæ æquantur inter se, sint ut distantiæ *AZ*, *BZ*; sin particulæ statuantur inæquales, sint ut hæ particulæ in distantias suas *AZ*, *BZ* respective ductæ. Et exponantur hæ vires per contenta illa $A \times AZ$ & $B \times BZ$. Jungatur *AB*, & secetur ea in *G* ut sit *AG* ad *BG* ut particula *B* ad particulam *A*; &

& erit G commune centrum gravitatis particularum A & B. Vis $A \times AZ$ (per Legum Corol. 2.) resolvitur in vires $A \times GZ$ & $A \times AG$, & vis $B \times BZ$ in vires $B \times GZ$ & $B \times BG$. Vires autem $A \times AG$ & $B \times BG$, ob proportionales A ad B & BG ad AG, æquantur; adeoque cum dirigantur in partes contrarias, se mutuo destruunt. Restant vires $A \times GZ$ & $B \times GZ$. Tendunt hæ ab Z versus centrum G, & vim $\overline{A+B} \times GZ$ componunt; hoc est, vim eandem ac si particulæ attractivæ A & B consisterent in eorum communi gravitatis centro G, Globum ibi componentes.

Eodem argumento, si adjungatur particula tertia C, & componatur hujus vis cum vi $\overline{A+B} \times GZ$ tendente ad centrum G; vis inde oriunda tendet ad commune centrum gravitatis trium particularum A, B, C; & eadem erit ac si Globus & particula C consisterent in centro illo communi, Globum majorem ibi componentes. Et sic pergitur in infinitum. Eadem est igitur vis tota particularum omnium corporis cujuscunque $RSTV$ ac si corpus illud, servato gravitatis centro, figuram Globi indueret. *Q. E. D.*

Corol. Hinc motus corporis attracti Z idem erit ac si corpus attrahens $RSTV$ esset Sphæricum; & propterea si corpus illud attrahens vel quiescat, vel progrediatur uniformiter in directum; corpus attractum movebitur in Ellipsi centrum habente in attrahentis centro gravitatis.

PROPOSITIO LXXXIX. THEOREMA XLVI.

Si Corpora sint plura ex particulis æqualibus constantia, quarum vires sunt ut distantiæ locorum a singulis: vis ex omnium viribus composita, qua corpusculum quodcunque trahitur, tendet ad trahentium commune centrum gravitatis, & eadem erit ac si trahentia illa, servato gravitatis centro communi, coirent & in Globum formarentur.

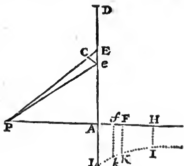
Demonstratur eodem modo, atque Propositio superior.

Corol. Ergo motus corporis attracti idem erit ac si corpora trahentia, servato communi gravitatis centro, coirent & in Globum formarentur. Ideoque si corporum trahentium commune gravitatis centrum vel quiescit, vel progreditur uniformiter in linea recta: corpus attractum movebitur in Ellipsi, centrum habente in communi illo trahentium centro gravitatis.

PROPOSITIO XC. PROBLEMA XLIV.

Si ad singula Circuli cujuscunque puncta tendant vires æquales centripetæ, decrescentes in quacunque distantiarum ratione: invenire vim qua corpusculum attrahitur ubivis positum in recta quæ plano Circuli ad centrum ejus perpendiculariter insistit.

Centro *A* intervallo quovis *AD*, in plano cui recta *AP* perpendicularis est, describi intelligatur Circulus; & invenienda sit vis qua corpusculum quodvis *P* in eundem attrahitur. A Circuli puncto quovis *E* ad corpusculum attractum *P* agatur recta *PE*: In recta *PA* capiatur *PF* ipsi *PE* æqualis, & erigatur normalis *FK*, quæ sit ut vis qua punctum *E* trahit corpusculum *P*. Sitque *IKL* curva linea quam punctum *K* perpetuo tangit. Occurrat eadem Circuli plano in *L*. In *PA* capiatur *PH* æqualis *PD*, & erigatur perpendiculum *HI* curvæ prædictæ occurrens in *I*; & erit corpusculi *P* attractio in Circulum ut area *AHIL* ducta in altitudinem *AP*. *Q.E.I.*



Etenim in *AE* capiatur linea quam minima *Ee*. Jungatur *Pe*; & in *PE*, *PA* capiantur *PC*, *Pf* ipsi *Pe* æquales. Et quoniam vis, qua annuli centro *A* intervallo *AE* in plano prædicto descripti punctum quodvis *E* trahit ad se corpus *P*, ponitur esse ut *FK*, & inde vis qua punctum illud trahit corpus *P* versus *A* est ut $\frac{AP \times FK}{PE}$, & vis qua annulus totus trahit corpus *P* versus *A*, ut annulus & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim; annulus autem iste est ut rectangulum sub radio *AE* & latitudine *Ee*, & hoc rectangulum (ob proportionales *PE* & *AE*, *Ee* & *CE*) æquatur rectangulo $PE \times CE$ seu $PE \times Ff$; erit vis qua annulus iste trahit corpus *P* versus *A*, ut $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjunctim, id est, ut contentum $Ff \times FK \times AP$, sive ut area *FKkf* ducta in *AP*. Et propterea summa virium, quibus annuli omnes in Circulo, qui centro *A* & intervallo

tervallo AD describitur, trahunt corpus P versus A, est ut area tota $AHIKL$ ducta in AP. *Q. E. D.* LIBER PRIMUS.

Corol. 1. Hinc si vires punctorum decrescunt in duplicata distantiarum ratione, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{PF\,quad.}$, atque adeo area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; erit attractio corpusculi P in Circulum ut $1 - \frac{PA}{PH}$, id est, ut $\frac{AH}{PH}$.

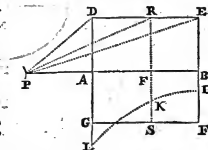
Corol. 2. Et universaliter, si vires punctorum ad distantias D sint reciproce ut distantiarum dignitas quælibet D^n, hoc est, si sit FK ut $\frac{1}{D^n}$, adeoque area $AHIKL$ ut $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; erit attractio corpusculi P in Circulum ut $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Corol. 3. Et si diameter Circuli augeatur in infinitum, & numerus n sit unitate major; attractio corpusculi P in planum totum infinitum erit reciproce ut PA^{n-2}, propterea quod terminus alter $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ evanescet.

PROPOSITIO XCI. PROBLEMA XLV.

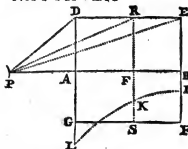
Invenire attractionem corpusculi siti in axe Solidi rotundi, ad cujus puncta singula tendunt vires æquales centripetæ in quacunque distantiarum ratione decrescentes.

In Solidum $ADEFG$ trahatur corpusculum P, situm in ejus axe AB. Circuloquolibet RFS ad hunc axem perpendiculari secetur hoc Solidum, & in ejus diametro FS, in plano aliquo $PALKB$ per axem transeunte, capiatur (per Prop. XC.) longitudo FK vi qua corpusculum P in circulum illum attrahitur proportionalis.

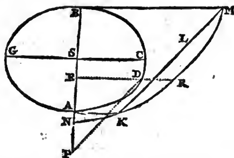


Tangat autem punctum K curvam lineam LKI, planis extimorum circulorum AL & BI occurrentem in L & I; & erit attractio corpusculi P in Solidum ut area $LABI$. *Q. E. I.*

 Corol.



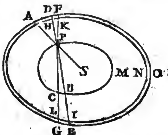
Corol. 1. Unde si Solidum Cylyndrus sit, parallelogrammo $ADEB$ circa axem AB revoluto descriptus, & vires centripetæ in singula ejus puncta tendentes sint reciproce ut quadrata distantiarum a punctis: erit attractio corpusculi P in hunc Cylindrum ut $AB-PE+PD$. Nam ordinatim applicata FK (per Corol. 1. Prop. xc.) erit ut $1-\frac{PF}{PR}$. Hujus pars 1 ducta in longitudinem AB, describit aream $1\times AB$; & pars altera $\frac{PF}{PR}$ ducta in longitudinem PB, describit aream 1 in $\overline{PE-AD}$ (id quod ex curvæ LIK quadratura facile ostendi potest:) & similiter pars eadem ducta in longitudinem PA describit aream 1 in $\overline{PD-AD}$, ductaque in ipsarum PB, PA differentiam AB, describit arearum differentiam 1 in $\overline{PE-PD}$. De contento primo $1\times AB$ auferatur contentum postremum 1 in $\overline{PE-PD}$, & restabit area $LABI$ æqualis 1 in $\overline{AB-PE+PD}$. Ergo vis, huic areæ proportionalis, est ut $AB-PE+PD$.



Corol. 2. Hinc etiam vis innotescit qua Sphæroïs $AGBCD$ attrahit corpus quodvis P, exterius in axe suo AB situm. Sit $NKRM$ Sectio Conica cujus ordinatim applicata ER, ipsi PE perpendicularis, æquetur semper longitudini PD, quæ ducitur ad punctum illud D, in quo applicata ista Sphæroidem secat. A Sphæroidis verticibus A, B ad ejus axem AB erigantur perpendicula AK, BM ipsis AP, BP æqualia respective, & propterea Sectioni Conicæ occurrentia in K & M; & jungatur KM auferens ab eadem segmentum $KMRK$. Sit autem Sphæroidis centrum S & semidiameter maxima SC: & vis qua

qua Sphærois trahit corpus P erit ad vim qua Sphæra, diametro AB descripta, trahit idem corpus, ut $\frac{AS \times CSq - PS \times KMRK}{PSq + CSq - ASq}$ ad $\frac{AS\ cub.}{3PS\ quad.}$ Et eodem computandi fundamento invenire licet vires segmentorum Sphæroidis.

Corol. 3. Quod si corpusculum intra Sphæroidem, in data quavis ejusdem diametro, collocetur; attractio erit ut ipsius distantia a centro. Id quod facilius colligetur hoc argumento. Sit $AGOF$ Sphærois attrahens, S centrum ejus & P corpus attractum. Per corpus illud P agantur tum semidiameter SPA, tum rectæ duæ quævis DE, FG Sphæroidi hinc inde occurrentes in D & E, F & G: Sintque PCM, HLN superficies Sphæroidum duarum interiorum, exteriori similium & concentricarum, quarum prior transeat per corpus P & secet rectas DE & FG in B & C, posterior secet easdem rectas in H, I & K, L. Habeant autem Sphæroides omnes axem communem, & erunt rectarum partes hinc inde interceptæ DP & BE, FP & CG, DH & IE, FK & LG sibi mutuo æquales; propterea quod rectæ DE, PB & HI bisecantur in eodem puncto, ut & rectæ FG, PC & KL. Concipe jam DPF, EPG designare Conos oppositos, angulis verticalibus DPF, EPG infinite parvis descriptos, & lineas etiam DH, EI infinite parvas esse; & Conorum particulæ Sphæroidum superficiebus abscissæ $DHKF$, $GLIE$, ob æqualitatem linearum DH, EI, erunt ad invicem ut quadrata distantiarum suarum a corpusculo P, & propterea corpusculum illud æqualiter trahent. Et pari ratione, si superficiebus Sphæroidum innumerarum similium concentricarum & axem communem habentium dividantur spatia DPF, $EGCB$ in particulas, hæ omnes utrinque æqualiter trahent corpus P in partes contrarias. Æquales igitur sunt vires Coni DPF & segmenti Conici $EGCB$, & per contrarietatem se mutuo destruunt. Et par est ratio virium materiæ omnis extra Sphæroidem intimam $PCBM$. Trahitur igitur corpus P a sola Sphæroide intima $PCBM$, & propterea (per Corol. 3. Prop. LXXII.) attractio ejus est ad vim, qua corpus A trahitur a Sphæroide tota $AGOD$, ut distantia PS ad distantiam AS. Q. E. D.



PRO-

PROPOSITIO XCII. PROBLEMA XLVI.

Dato Corpore attractivo, invenire rationem decrementi virium centripetarum in ejus puncta singula tendentium.

E Corpore dato formanda est Sphæra vel Cylindrus aliave figura regularis, cujus lex attractionis, cuivis decrementi rationi congruens (per Prop. LXXX, LXXXI, & XCI.) inveniri potest. Dein factis experimentis invenienda est vis attractionis in diversis distantiis, & lex attractionis in totum inde patefacta dabit rationem decrementi virium partium singularum, quam invenire oportuit.

PROPOSITIO XCIII. THEOREMA XLVII.

Si Solidum ex una parte planum, ex reliquis autem partibus infinitum, constet ex particulis æqualibus æqualiter attractivis, quarum vires in recessu a Solido decrescunt in ratione potestatis cujusvis distantiarum plusquam quadraticæ, & vi Solidi totius corpusculum ad utramvis plani partem constitutum trahatur: dico quod Solidi vis illa attractiva, in recessu ab ejus superficie plana, decrescet in ratione potestatis, cujus latus est distantia corpusculi a plano, & Index ternario minor quam Index potestatis distantiarum.

Cas. 1. Sit LGl planum quo Solidum terminatur. Jaceat Solidum autem ex parte plani hujus versus I, inque plana innumera mHM, nIN, &c. ipsi GL parallela resolvatur. Et primo collocetur corpus attractum C extra Solidum. Agatur autem $CGHI$ planis illis innumeris perpendicularis, & decrescant vires attractivæ punctorum Solidi in ratione potestatis distantiarum, cujus index sit numerus n ternario non minor. Ergo (per Corol. 3. Prop. XC.) vis

vis qua planum quodvis $m HM$ trahit punctum C est reciproce ut CH^{n-2}. In plano $m HM$ capiatur longitudo HM ipsi CH^{n-2} reciproce proportionalis, & erit vis illa ut HM. Similiter in planis singulis lGL, nIN, oKO, &c. capiantur longitudines GL, IN, KO, &c. ipsis CG^{n-2}, CI^{n-2}, CK^{n-2}, &c. reciproce proportionales; & vires planorum eorundem erunt ut longitudines captæ, adeoque summa virium ut summa longitudinum, hoc est, vis Solidi totius ut area $GLOK$ in infinitum versus OK producta. Sed area illa (per notas quadraturarum methodos) est reciproce ut CG^{n-3}, & propterea vis Solidi totius est reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Cas. 2. Collocetur jam corpusculum C ex parte plani lGL intra Solidum, & capiatur distantia CK æqualis distantiæ CG. Et Solidi pars $LGloKO$, planis parallelis lGL, oKO terminata, corpusculum C in medio situm nullam in partem trahet, contrariis oppositorum punctorum actionibus se mutuo per æqualitatem tollentibus, Proinde corpusculum C sola vi Solidi ultra planum OK siti trahitur. Hæc autem vis (per Casum primum) est reciproce ut CK^{n-3}, hoc est (ob æquales CG, CK) reciproce ut CG^{n-3}. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si Solidum $LGIN$ planis duobus infinitis parallelis LG, IN utrinque terminetur; innotescit ejus vis attractiva, subducendo de vi attractiva Solidi totius infiniti $LGKO$ vim attractivam partis ulterioris $NIKO$, in infinitum versus KO productæ.

Corol. 2. Si Solidi hujus infiniti pars ulterior, quando attractio ejus collata cum attractione partis citerioris nullius pene est momenti, rejiciatur: attractio partis illius citerioris augendo distantiam decrescet quam proxime in ratione potestatis CG^{n-3}.

Corol. 3. Et hinc si corpus quodvis finitum & ex una parte planum trahat corpusculum e regione medii illius plani, & distantia inter corpusculum & planum collata cum dimensionibus corporis attrahentis perexigua sit, constet autem corpus attrahens ex particulis homogeneis, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis cujusvis plusquam quadruplicatæ distantiarum; vis attractiva corporis totius decrescet quamproxime in ratione potestatis, cujus latus sit distantia illa perexigua, & Index ternario minor quam Index potestatis prioris. De corpore ex particulis constante, quarum vires attractivæ decrescunt in ratione potestatis triplicatæ distantiarum, assertio non valet; propterea quod, in hoc casu, attractio partis illius ulterioris corporis infiniti in Corollario secundo, semper est infinite major quam attractio partis citerioris.

Scholium.

Si corpus aliquod perpendiculariter versus planum datum trahatur, & ex data lege attractionis quæratur motus corporis: Solvetur Problema quærendo (per Prop. XXXIX.) motum corporis recta descendentis ad hoc planum, & (per Legum Corol. 2.) componendo motum istum cum uniformi motu, secundum lineas eidem plano parallelas facto. Et contra, si quæratur Lex attractionis in planum secundum lineas perpendiculares factæ, ea conditione ut corpus attractum in data quacunque curva linea moveatur, solvetur Problema operando ad exemplum Problematis tertii.

Operationes autem contrahi solent resolvendo ordinatim applicatas in Series convergentes. Ut si ad basem A in angulo quovis dato ordinatim applicetur longitudo B, quæ sit ut basis dignitas quælibet $A^{\frac{m}{n}}$; & quæratur vis qua corpus, secundum positionem ordinatim applicatæ, vel in basem attractum vel a basi fugatum, moveri possit in curva linea quam ordinatim applicata termino suo superiore semper attingit: Suppono basem augeri parte quam minima O, & ordinatim applicatam $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ resolvo in Seriem infinitam $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ &c. atque hujus termino in quo O duarum est dimensionum, id est, termino $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ vim proportionalem esse suppono. Est igitur vis quæsita ut $\frac{mm-mn}{nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, vel quod perinde est, ut $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$. Ut si ordinatim applicata Parabolam attingat, existente $m=2$, & $n=1$: fiet vis ut data $2B^0$, adeoque dabitur. Data igitur vi corpus movebitur in Parabola, quemadmodum *Galilæus* demonstravit. Quod si ordinatim applicata Hyperbolam attingat, existente $m=0-1$, & $n=1$; fiet vis ut $2A^{-3}$ seu $2B^3$: adeoque vi, quæ sit ut cubus ordinatim applicatæ, corpus movebitur in Hyperbola. Sed missis hujusmodi Propositionibus, pergo ad alias quasdam de Motu, quas nondum attigi.

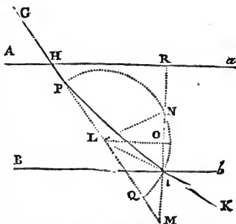
SECTIO

SECTIO XIV.

De Motu corporum minimorum, quæ Viribus centripetis ad singulas magni alicujus corporis partes tendentibus agitantur.

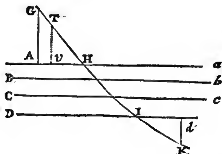
PROPOSITIO XCIV. THEOREMA XLVIII.

Si Media duo similaria, spatio planis parallelis utrinque terminato, distinguantur ab invicem, & corpus in transitu per hoc spatium attrahatur vel impellatur perpendiculariter versus Medium alterutrum, neque ulla alia vi agitetur vel impediatur: Sit autem attractio, in æqualibus ab utroque plano distantiis ad eandem ipsius partem captis, ubique eadem: dico quod sinus incidentiæ in planum alterutrum erit ad sinum emergentiæ ex plano altero in ratione data.



Cas. 1. Sunto *Aa*, *Bb* plana duo parallela. Incidat corpus in planum prius *Aa* secundum lineam *GH*, actoto suo per spatium intermedium transitu attrahatur vel impellatur versus Medium incidentiæ eaque actione describat lineam curvam *HI*, & emergat secundum lineam *IK*. Ad planum emergentiæ *Bb* erigatur perpendiculum *IM*, occurrens tum lineæ incidentiæ *GH* productæ in *M*, tum plano incidentiæ *Aa* in *R*; & linea emergentiæ *KI* producta occurrat *HM* in *L*. Centro *L* intervallo *LI* describatur Circulus,

secans tam HM in P & Q, quam MI productam in N, & primo si attractio vel impulsus ponatur uniformis, erit (ex demonstratis *Galilæi*) curva HI Parabola, cujus hæc est proprietas, ut rectangulum sub dato latere recto & linea IM æquale sit HM quadrato; sed & linea HM bisecabitur in L. Unde si ad MI demittatur perpendiculum LO, æquales erunt MO, OR; & additis æqualibus ON, OI, fient totæ æquales MN, IR. Proinde cum IR detur, datur etiam MN; estque rectangulum NMI ad rectangulum sub latere recto & IM, hoc est, ad HMq, in data ratione. Sed rectangulum NMI æquale est rectangulo PMQ, id est, differentiæ quadratorum MLq, & PLq seu LIq; & HMq datam rationem habet ad sui ipsius quartam partem MLq: ergo datur ratio $MLq - LIq$ ad MLq, & divisim, ratio LIq ad MLq, & ratio dimidiata LI ad ML. Sed in omni triangulo LMI, sinus angulorum sunt proportionales lateribus oppositis. Ergo datur ratio sinus anguli incidentiæ LMR ad sinum anguli emergentiæ LIR. *Q.E.D.*



Cas. 2. Transeat jam corpus successive per spatia plura parallelis planis terminata, $AabB$, $BbcC$, &c. & agitetur vi quæ sit in

singulis

ſingulis ſeparatim uniformis, ac in diverſis diverſa, & Per jam demonſtrata, ſinus incidentiæ in planum primum Aa erit ad ſinum emergentiæ ex plano ſecundo Bb, in data ratione; & hic ſinus, qui eſt ſinus incidentiæ in planum ſecundum Bb, erit ad ſinum emergentiæ ex plano tertio Cc, in data ratione; & hic ſinus ad ſinum emergentiæ ex plano quarto Dd, in data ratione, & ſic in infinitum: & ex æquo, ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo in data ratione. Minuantur jam planorum intervalla & augeatur numerus in infinitum, eo ut attractionis vel impulſus actio, ſecundum legem quamcunque aſſignatam, continua reddatur; & ratio ſinus incidentiæ in planum primum ad ſinum emergentiæ ex plano ultimo, ſemper data exiſtens, etiamnum dabitur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCV. THEOREMA XLIX.

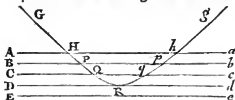
Iiſdem poſitis; dico quod velocitas corporis ante incidentiam eſt ad ejus velocitatem poſt emergentiam, ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ.

Capiantur AH, Id æquales, & erigantur perpendicula AG, dK occurrentia lineis incidentiæ & emergentiæ GH, IK, in G & K. In GH capiatur TH æqualis IK, & ad planum Aa demittatur normaliter Tv. Et (per Legum Corol. 2.) diſtinguatur motus corporis in duos, unum planis Aa, Bb, Cc, &c. perpendicularem, alterum iiſdem parallelum. Vis attractionis vel impulſus, agendo ſecundum lineas perpendiculares, nil mutat motum ſecundum parallelas, & propterea corpus hoc motu conficiet æqualibus temporibus æqualia illa ſecundum parallelas intervalla, quæ ſunt inter lineam AG & punctum H, interque punctum I & lineam dK; hoc eſt, æqualibus temporibus deſcribet lineas GH, IK. Proinde velocitas ante incidentiam eſt ad velocitatem poſt emergentiam, ut GH ad IK vel TH, id eſt, ut AH vel Id ad vH, hoc eſt (reſpectu radii TH vel IK) ut ſinus emergentiæ ad ſinum incidentiæ. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XCVI. THEOREMA L.

Iisdem positis & quod motus ante incidentiam velocior sit quam postea: dico quod corpus, inclinando lineam incidentiæ, reflectetur tandem, & angulus reflexionis fiet æqualis angulo incidentiæ.

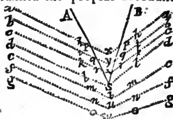
Nam concipe corpus inter parallela plana Aa, Bb, Cc, &c. describere arcus Parabolicos, ut supra; sintque arcus illi HP, PQ, QR, &c. Et sit ea lineæ incidentiæ GH obliquitas ad planum primum Aa, ut sinus incidentiæ sit ad radium circuli, cujus est sinus, in ea ratione quam habet idem sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ ex plano Dd, in spatium $DdeE$: & ob sinum emergentiæ jam factum æqualem radio, angulus emergentiæ erit rectus, adeoque linea emergentiæ coincidet cum plano Dd. Perveniat corpus ad hoc planum in puncto R; & quoniam linea emergentiæ coincidit cum eodem plano, perspicuum est quod corpus non potest ultra pergere versus planum Ee. Sed nec potest idem pergere in linea emergentiæ Rd, propterea quod perpetuo attrahitur vel impellitur versus Medium incidentiæ. Revertetur itaque inter plana Cc, Dd, describendo arcum Parabolæ QRq, cujus vertex principalis (juxta demonstrata *Galilæi*) est in R; secabit planum Cc in eodem angulo in q, ac prius in Q; dein pergendo in arcubus parabolicis qp, ph, &c. arcubus prioribus QP, PH similibus & æqualibus secabit reliqua plana in iisdem angulis in p, h, &c. ac prius in P, H, &c. emergetque tandem eadem obliquitate in h, qua incidit in H. Concipe jam planorum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. intervalla in infinitum minui & numerum augeri, eo ut actio attractionis vel impulsus secundum legem quamcunque assignatam continua reddatur; & angulus emergentiæ semper angulo incidentiæ æqualis existens, eidem etiamnum manebit æqualis. *Q. E. D.*



Scholium.

Scholium.

Harum attractionum haud multum dissimiles sunt Lucis reflexiones & refractiones, factæ secundum datam Secantium rationem, ut invenit *Snellius*, & per consequens secundum datam Sinuum rationem, ut exposuit *Cartesius*. Namque Lucem successive propagari & spatio quasi septem vel octo minutorum primorum a Sole ad Terram venire, jam constat per Phænomena Satellitum *Jovis*, Observationibus diversorum Astronomorum confirmata. Radii autem in aere existentes (uti dudum *Grimaldus*, luce per foramen in tenebrosum cubiculum admissa, invenit, & ipse quoque expertus sum) in transitu suo prope corporum vel opacorum vel perspicuorum angulos (quales sunt nummorum ex auro, argento & ære cusorum termini rectanguli circulares, & cultrorum, lapidum aut fractorum vitrorum acies) incurvantur circum corpora, quasi attracti in eadem: & ex his radiis, qui in transitu illo propius accedunt ad corpora incurvantur magis, quasi magis attracti, ut ipse etiam diligenter observavi. In figura designat *s* aciem cultri vel cunei cujusvis *AsB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld*, sunt radii, arcubus *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl* versus cultrum incurvati; idque magis vel minus pro distantia eorum a cultro. Cum autem talis incurvatio radiorum fiat in aere extra cultrum, debebunt etiam radii, qui incidunt in cultrum, prius incurvari in aere quam cultrum attingunt. Et par est ratio incidentium in vitrum. Fit igitur refractio, non in puncto incidentiæ, sed paulatim per continuam incurvationem radiorum, factam partim in aere antequam attingunt vitrum, partim (ni fallor) in vitro, postquam illud ingressi sunt: uti in radiis *ckzkc*, *biyib*, *abxba* incidentibus ad *r*, *q*, *p*, & inter *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x* incurvatis, delineatum est. Igitur ob analogiam quæ est inter propagationem radiorum lucis & progressum corporum, visum est Propositiones sequentes in usus Opticos subjungere; interea de natura radiorum (utrum sint corpora necne) nihil omnino disputans, sed Trajectorias corporum Trajectoriis radiorum persimiles solummodo determinans.



PROPO-

PROPOSITIO XCVII. PROBLEMA XLVII.

Posito quod sinus incidentiæ in superficiem aliquam sit ad sinum emergentiæ in data ratione, quodque incurvatio viæ corporum juxta superficiem illam fiat in spatio brevissimo, quod ut punctum considerari possit; determinare superficiem quæ corpuscula omnia de loco dato successive manantia convergere faciat ad alium locum datum.

Sit *A* locus a quo corpuscula divergunt; *B* locus in quem convergere debent; *CDE* curva linea quæ circa axem *AB* revoluta describat superficiem quæsitam; *D*, *E* curvæ illius puncta duo quævis; & *EF*, *EG* perpendicula in corporis vias *AD*, *DB* demissa. Accedat punctum *D* ad punctum *E*; & lineæ *DF* qua *AD* augetur, ad lineam *DG* qua *DB* diminuitur, ratio ultima erit eadem quæ sinus incidentiæ ad sinum emergentiæ. Datur ergo ratio incrementi lineæ *AD* ad decrementum lineæ *DB*; & propterea si in axe *AB* sumatur ubivis punctum *C*, per quod curva *CDE* transire debet, & capiatur ipsius *AC* incrementum *CM*, ad ipsius *BC* decrementum *CN* in data illa ratione; centrisque *A*, *B*, & intervallis *AM*, *BN* describantur circuli duo se mutuo secantes in *D*: punctum illud *D* tanget curvam quæsitam *CDE*, eandemque ubivis tangendo determinabit. *Q. E. I.*

Corol. 1. Faciendo autem ut punctum *A* vel *B* nunc abeat in infinitum, nunc migret ad alteras partes puncti *C*, habebuntur Figuræ illæ omnes quas *Cartesius* in Optica & Geometria ad Refractiones exposuit. Quarum inventionem cum *Cartesius* maximi fecerit & studiose celaverit, visum fuit hac propositione exponere.

Corol.

Corol. 2. Si corpus in superficiem quamvis *CD*, secundum lineam rectam *AD* lege quavis ductam incidens, emergat secundum aliam quamvis rectam *DK*, & a puncto *C* duci intelligantur Lineæ curvæ *CP*, *CQ* ipsis *AD* *DK* semper perpendiculares: erunt incrementa linearum *PD*, *QD*, atque adeo lineæ ipsæ *PD*, *QD*, incrementis istis genitæ, ut sinus incidentiæ & emergentiæ ad invicem: & contra.

H Q D F S K P R B G A C E L

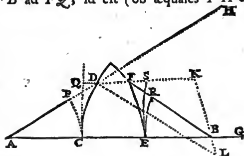
PROPOSITIO XCVIII. PROBLEMA XLVIII.

Iisdem positis, & circa axem AB *descripta superficie quacunque attractiva* CD, *regulari vel irregulari, per quam corpora de loco dato* A *exeuntia transire debent; invenire superficiem secundam attractivam* EF, *quæ corpora illa ad locum datum* B *convergere faciat.*

Juncta *AB* secet superficiem primam in *C* & secundam in *E*, puncto *D* utcunque assumpto. Et posito sinu incidentiæ in superficiem primam ad sinum emergentiæ ex eadem, & sinu emergentiæ e superficie secunda ad sinum incidentiæ in eandem, ut quantitas aliqua data M ad aliam datam N; produc tum *AB* ad *G* ut sit *BG* ad *CE* ut M−N ad N, tum *AD* ad *H* ut sit *AH* æqualis *AG*, tum etiam *DF* ad *K* ut sit *DK* ad *DH* ut N ad M. Junge *KB*, & centro *D* intervallo *DH* describe circulum occurrentem *KB* productæ in *L*, ipsique *DL* parallelam age *BF*: & punctum *F* tanget lineam *EF*, quæ circa axem *AB* revoluta describet superficiem quæsitam. *Q. E. F.*

Nam concipe Lineas *CP*, *CQ* ipsis *AD*, *DF* respective, & Lineas *ER*, *ES* ipsis *FB*, *FD* ubique perpendiculares esse, adeoque *QS* ipsi *CE* semper æqualem; & erit (per Corol. 2. Prop. XCVII.) *PD* ad *QD* ut M ad N, adeoque ut *DL* ad *DK* vel *FB* ad *FK*;

& divisim ut $DL-FB$ seu $PH-PD-FB$ ad FD seu $FQ-QD$; & composite ut $PH-FB$ ad FQ, id est (ob æquales PH & CG, QS & CE) $CE+BG-FR$ ad $CE-FS$. Verum (ob proportionales BG ad CE & M—N ad N) est etiam $CE+BG$ ad CE ut M ad N: adeoque divisim FR ad FS ut M ad N, & propterea (per Corol. 2. Prop. XCVII) superficies EF cogit corpus, in ipsam secundum lineam DF incidens, pergere in linea FR ad locum B. *Q. E. D.*



Scholium.

Eadem methodo pergere liceret ad superficies tres vel plures. Ad usus autem Opticos maxime accommodatæ sunt figuræ Sphæricæ. Si Perspicillorum vitra Objectiva ex vitris duobus sphærice figuratis & Aquam inter se claudentibus conflentur; fieri potest ut a refractionibus Aquæ errores refractionum, quæ fiunt in vitrorum superficiebus extremis, satis accurate corrigantur. Talia autem vitra Objectiva vitris Ellipticis & Hyperbolicis præferenda sunt, non solum quod facilius & accuratius formari possint, sed etiam quod Penicillos radiorum extra axem vitri sitos accuratius refringant. Verum tamen diversa diversorum radiorum Refrangibilitas impedimento est, quo minus Optica per Figuras vel Sphæricas vel alias quascunque perfici possit. Nisi corrigi possint errores illinc oriundi, labor omnis in cæteris corrigendis imperite collocabitur.

DE

DE
MOTU CORPORUM
LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

De Motu Corporum quibus resistitur in ratione Velocitatis.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentia amissus est ut spatium movendo confectum.

Nam cum motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc est, ut itineris confecti particula: erit, componendo, motus toto tempore amissus ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Igitur si corpus, gravitate omni destitutum, in spatiis liberis sola vi insita moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motus illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitatis differentiis suis proportionales, sunt continue proportionales.

Sit A ad A—B ut B ad B—C & C ad C—D, &c. & dividendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

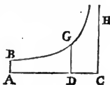
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si Corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem sola vi insita per Medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione Geometrica, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulso unico, quæ sit ut velocitas: erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (per Lem. 1. Lib. II.) continue proportionales. Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continua, qui per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea sunt æquales. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione Geometrica. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ, & augeatur earum numerus in infinitum, eo ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continue proportionales, erunt in hoc etiam casu continue proportionales. *Q. E. D.*

Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: Spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ, (per Prop. 1. Lib. II.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si Asymptotis rectangulis ADC, CH describatur Hyperbola BG, sintque AB, DG ad Asymptoton AC perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia Medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam AC, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam DC: exponi potest tempus per aream $ABGD$, & spatium eo tempore descriptum per lineam AD. Nam si area illa per motum puncti D augeatur uniformiter ad modum tempo-

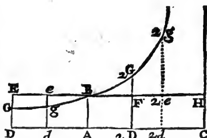


ris,

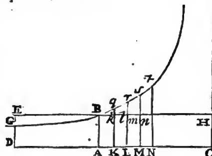
ris, decrescet recta $\mathcal{D}C$ in ratione Geometrica ad modum velocitatis, & partes rectæ AC æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eadem ratione.

PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui dum in Medio similari recta ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.



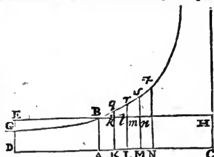
Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum BC, & resistentia Medii initio ascensus per rectangulum $B\mathcal{D}$ sumptum ad contrarias partes. Asymptotis rectangulis AC, CH, per punctum B describatur Hyperbola secans perpendicula $\mathcal{D}E$, de in G, g; & corpus ascendendo, tempore $\mathcal{D}Ggd$, describet spatium $EGge$, tempore $\mathcal{D}GBA$ spatium ascensus totius EGB; tempore $AB\,2G\,2\mathcal{D}$ spatium descensus $BF\,2G$, atque tempore $2\mathcal{D}\,2G\,2g\,2d$ spatium descensus $2GF\,2e\,2g$: & velocitates corporis (resistentiæ Medii proportionales) in horum temporum periodis erunt $ABE\mathcal{D}$, $ABed$, nulla, $ABF\,2\mathcal{D}$, $AB\,2e\,2d$ respective; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit BC.



Resolvatur enim rectangulum AH in rectangula innumera Ak, Kl, Lm, Mn, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, Ak, Al, Am, An, &c. ut velocitates totæ, atque adeo (per Hypothesin) ut resistentiæ Medii principio singulorum temporum æqualium. Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$, ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravi-

 tatis

 tatis subducantur resistentiæ, & manebunt *ABHC*, *KkHC*, *LlHC*, *Nn HC*, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque adeo (per motus Legem II) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c; & propterea (per Lem. I. Lib. II.) in progressione Geometrica. Quare si rectæ *Kk*, *Ll*, *Mm*, *Nn*, &c. productæ occurrant Hyperbolæ in *q*, *r*, *s*, *t*, &c. erunt areæ *ABqK*, *KqrL*, *LrsM*, *MstN*, &c. æquales, adeoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. Est autem area *ABqK* (per Corol. 3 Lem. VII & Lem. VIII. Lib. I.) ad aream *Bkq* ut *Kq* ad ½ *kq* seu *AC* ad ½ *AK*, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi. Et simili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. sunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad resistentias in medio temporis secundi, tertii, quarti, &c. Proinde cum areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. sint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. resistentiis in mediis singulorum temporum, hoc est (per Hypothesin) velocitatibus, atque adeo descriptis spatiis analogæ. Sumantur analogarum summæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. spatiis totis descriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter descendendum, tempore quovis *ABrL*, describit spatium *Blr*, & tempore *Lrtn* spatium *rlnt*. *Q. E. D.* Et similis est demonstratio motus expositi in ascensu. *Q. E. D.*



Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo potest acquirere, est ad velocitatem dato quovis tempore acquisitam, ut vis data gravitatis qua perpetuo urgetur, ad vim resistentiæ qua in fine temporis illius impeditur.

Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione Arithmetica, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu (atque etiam earundem differentia in descensu) decrescit in progressione Geometrica.

Corol. 3. Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur, decrescunt in eadem progressione Geometrica.

Corol.

Corol. 4. Spatium vero a corpore descriptum differentia est duorum spatiorum, quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensus, & alterum ut velocitas, quæ etiam ipso descensus initio æquantur inter se.

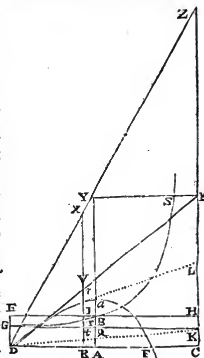
PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quod vis gravitatis in Medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum Horizontis; definire motum Projectilis in eodem, resistentiam velocitati proportionalem patientis.

E loco quovis *D* egrediatur Projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam Horizontalem *DC* demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A* ut sit *DA* ad *AC* ut resistentia Medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP* ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis *DC*, *CP*, describatur Hyperbola quævis *GTBS* secans perpendicula *DG*, *AB* in *G* & *B*; & compleatur parallelogrammum *DGKC*, cujus latus *GK* secet *AB* in *Q*. Capiatur linea N in ratione ad *QB* qua *DC* sit ad *CP*; & ad rectæ *DC* punctum quodvis *R* erecto perpendiculo *RT*, quod Hyperbolæ in *T*, & rectis *EH*, *GK*, *DP* in *I*, *t* & *V* occurrat; in eo cape *Vr* æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel quod perinde

inde est, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & Projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, describens curvam lineam $DraF$, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & postea semper appropinquans ad Asymptoton PLC. Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut Curvæ Tangens rL. *Q. E. I.*

Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV, adeoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (per Legum Corol. 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cum resistentia sit ut motus, distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, a motu ad latus descripta, erit (per Prop. II. hujus) ut linea DR, altitudo vero (per Prop. III. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, hoc est, ut linea Rr. Ipso autem motus initio area $RDGT$ æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut $AB - AQ$ seu QB ad N, id est, ut CP ad DC; atque adeo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cum igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r perpetuo tangit. *Q. E. D.*



Corol.

Corol. 1. Est igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$, ideoque si producatur RT ad X ut sit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$, (id est, si compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY secans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X;) erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ CR vel, quod perinde est, innumeræ ZX, in progressione Geometrica; erunt totidem Xr in progressione Arithmetica. Et hinc Curva $Dr a F$ per tabulam Logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice D, diametro DE deorsum producta, & Latere recto quod sit ad $2DP$ ut resistentia tota, ipso motus initio, ad vim gravitatis, Parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP, ut in Medio uniformi resistente describat Curvam $Dr a F$, ea ipsa erit quacum exire debet de eodem loco D, secundum eandem rectam DP, ut in spatio non resistente describat Parabolam. Nam Latus rectum Parabolæ hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ & Vr est $\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, si duceretur, Hyperbolam GTB tangeret in G, parallela est ipsi DK, ideoque Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$ & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est $\frac{DRq \times CK \times CP}{2DCq \times QB}$, id est, (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2DPq \times QB}$, & Latus rectum $\frac{DV\ quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id est (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2DPq \times DA}{AC \times CP}$, adeoque ad $2DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; hoc est, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis D, data cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur; & resistentia Medii ipso motus initio detur: inveniri potest Curva $Dr a F$, quam corpus idem describet. Nam ex data velocitate

 datur

datur latus rectum Parabolæ, ut notum est. Et sumendo $2\,DP$ ad latus illud rectum, ut est vis gravitatis ad vim resistentiæ, datur DP. Dein secando DC in A, ut sit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eadem illa ratione gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum A. Et inde datur Curva $DraF$.

Corol. 5. Et contra, si datur Curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & resistentia Medii in locis singulis r. Nam ex data ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistentia Medii sub initio motus, tum latus rectum Parabolæ: & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r.

Corol. 6. Cum autem longitudo $2\,DP$ sit ad latus rectum Parabolæ ut gravitas ad resistentiam in D; & ex aucta velocitate augeatur resistentia in eadem ratione, at latus rectum Parabolæ augeatur in ratione illa duplicata: patet longitudinem $2\,DP$ augeri in ratione illa simplici, adeoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo CDP mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi Curvam $DraF$ ex Phænomenis quamproxime, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quacum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eadem cum velocitate, de loco D, secundum angulos diversos CDP, cDP (minuscularum literarum locis subintellectis) & cognoscantur loca F, f, ubi incidunt in horizontale planum DC. Tum, assumpta quacunque longitudine pro DP vel Dp, fingatur quod resistentia in D sit ad gravitatem in ratione

tione qualibet, & exponatur ratio illa per longitudinem quamvis *SM*. Deinde per computationem, ex longitudine illa assumpta *DP*, inveniantur longitudines *DF*, *Df*, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventa, auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & exponatur differentia per perpendiculum *MN*. Idem fac iterum ac tertio, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *SM*, & colligendo novam differentiam *MN*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ *SM*, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *NNN* secans rectam *SMMM* in *X*, & erit *SX* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam invenire oportuit. Ex hac ratione colligenda est longitudo *DF* per calculum; & longitudo quæ sit ad assumptam longitudinem *DP*, ut longitudo *DF* per experimentum cognita ad longitudinem *DF* modo inventam, erit vera longitudo *DP*. Qua inventa, habetur tum Curva linea *DraF* quam corpus describit, tum corporis velocitas & resistentia in locis singulis.



Scholium.

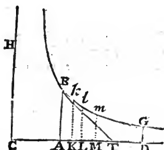
Cæterum resistentiam corporum esse in ratione velocitatis, Hypothesis est magis Mathematica quam Naturalis. Obtinet hæc ratio quamproxime ubi corpora in Mediis rigore aliquo præditis tardissime moventur. In Mediis autem quæ rigore omni vacant resistentiæ corporum sunt in duplicata ratione velocitatum. Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem Medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; adeoque tempore æquali (ob majorem Medii quantitatem perturbatam) communicatur motus in duplicata ratione major; estque resistentia (per motus Legem II & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hac lege Resistentiæ.

SECTIO II.

De motu Corporum quibus resistitur in duplicata ratione Velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si Corpori resistitur in velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita per Medium similare movetur; tempora vero sumantur in progressione Geometrica a minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eadem progressione Geometrica inverse, & quod spatia sunt æqualia quæ singulis temporibus describuntur.



Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis est resistentia Medii, & resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM &c. in recta CD sumptæ, & erigantur perpendicula $AB, Kk, Ll, Mm,$ &c. Hyperbolæ $BklmG$, centro C Asymptotis rectangulis CD, CH descriptæ. occurrentia in $B,k,l,m,$ &c. & erit AB ad Kk ut CK ad CA, & divisim $AB-Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & vicissim $AB-Kk$ ad AK ut Kk ad CA, adeoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, cum AK & $AB \times CA$ dentur. erit $AB-Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk ut ABq. Et simili argumento erunt $Kk-Ll$, $Ll-Mm$, &c. ut $Kkq, Llq,$ &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm qua-

quadrata sunt ut earundem differentiæ; & idcirco cum quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum differentiæ, similis erit ambarum progressio. Quo demonstrato, consequens est etiam ut areæ his lineis descriptæ sint in progressione consimili cum spatiis quæ velocitatibus describuntur. Ergo si velocitas initio primi temporis *AK* exponatur per lineam *AB*, & velocitas initio secundi *KL* per lineam *Kk*, & longitudo primo tempore descripta per aream *AKkB*; velocitates omnes subsequentes exponentur per lineas subsequentes *Ll*, *Mm*, &c. & longitudines descriptæ per areas *Kl*, *Lm*, &c. Et composite, si tempus totum exponatur per summam partium suarum *AM*, longitudo tota descripta exponetur per summam partium suarum *AMmB*. Concipe jam tempus *AM* ita dividi in partes *AK*, *KL*, *LM*, &c. ut sint *CA*, *CK*, *CL*, *CM*, &c. in progressione Geometrica; & erunt partes illæ in eadem progressione, & velocitates *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. in progressione eadem inversa, atque spatia descripta *Ak*, *Kl*, *Lm*, &c. æqualia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Patet ergo quod, si tempus exponatur per Asymptoti partem quamvis *AD*, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam *AB*, velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam *DG*, & spatium totum descriptum per aream Hyperbolicam adjacentem *ABGD*; necnon spatium quod corpus aliquod eodem tempore *AD*, velocitate prima *AB*, in Medio non resistente describere posset, per rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 2. Unde datur spatium in Medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi *AB* in medio non resistente simul describi posset, ut est area Hyperbolica *ABGD* ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol. 3. Datur etiam resistentia Medii, statuendo eam ipso motus initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *AC*, in Medio non resistente, generare posset velocitatem *AB*. Nam si ducatur *BT* quæ tangat Hyperbolam in *B*, & occurrat Asymptoto in *T*; recta *AT* æqualis erit ipsi *AC*, & tempus exponet quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam *AB*.

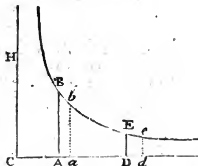
Corol. 4. Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol. 5. Et viceversa, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam, datur tempus *AC*, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis *AB*; & in-

 de datur punctum *B* per quod Hyperbola, Asymptotis *CH*, *CD*, describi debet; ut & spatium *ABGD*, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illa *AB*, tempore quovis *AD*, in Medio similari resistente describere potest.

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora Sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicata ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.



Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descripta Hyperbola quavis *BbEe* secante perpendicula *AB*, *ab*, *DE*, *de*, in *B*, *b*, *E*, *e*, exponantur velocitates initiales per perpendicula *AB*, *DE*, & tempora per lineas *Aa*, *Dd*. Est ergo ut *Aa* ad *Dd* ita (per Hypothesin) *DE* ad *AB*, & ita (ex natura Hyperbolæ) *CA* ad *CD*; & componendo, ita *Ca* ad *Cd*. Ergo areæ *ABba*, *DEed*, hoc est, spatia descripta æquantur inter se, & velocitates primæ *AB*, *DE* sunt ultimis *ab*, *de*, & propterea (dividendo) partibus etiam suis amissis *AB—ab*, *DE—de* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora Sphærica quibus resistitur in duplicata ratione velocitatum, temporibus quæ sunt ut motus primi directe & resistentiæ primæ inverse, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis in velocitates primas ductis proportionalia.

Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tempora con-

conjunctim. Igitur ut partes illæ ſint totis proportionales, debebit reſiſtentia & tempus conjunctim eſſe ut motus. Proinde tempus erit ut motus directe & reſiſtentia inverſe. Quare temporum particulis in ea ratione ſumptis, corpora amittent ſemper particulas motuum proportionales totis, adeoque retinebunt velocitates in ratione prima. Et ob datam velocitatum rationem, deſcribent ſemper ſpatia quæ ſunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in duplicata ratione diametrorum: Globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia diametris ſuis proportionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim Globi cujuſque erit ut ejus velocitas & Maſſa conjunctim, id eſt, ut velocitas & cubus diametri; reſiſtentia (per Hypotheſin) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (per hanc Propoſitionem) eſt in ratione priore directe & ratione poſteriore inverſe, id eſt, ut diameter directe & velocitas inverſe; adeoque ſpatium (tempori & velocitati proportionale) eſt ut diameter.

Corol. 2. Si æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione ſeſquialtera diametrorum: Globi homogenei quibuſcunque cum velocitatibus moti, deſcribendo ſpatia in ſeſquialtera ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et univerſaliter, ſi æquivelocibus corporibus reſiſtitur in ratione dignitatis cujuſcunque diametrorum: ſpatia quibus Globi homogenei, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E: & ſi reſiſtentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, ſint ut D^n & E^n: ſpatia quibus Globi, quibuſcunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis; erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Igitur deſcribendo ſpatia ipſis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eadem ratione ad invicem ac ſub initio.

Corol. 4. Quod ſi Globi non ſint homogenei, ſpatium a Globo denſiore deſcriptum augeri debet in ratione denſitatis. Motus enim, ſub pari velocitate, major eſt in ratione denſitatis, & tempus (per hanc propoſitionem) augetur in ratione motus directe, ac ſpatium deſcriptum in ratione temporis.

Corol.

Corol. 5. Et si Globi moveantur in Mediis diversis; spatium in Medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (per hanc Propositionem) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ, & spatium in ratione temporis.

LEMMA II.

Momentum Genitæ æquatur Momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continue ductis.

Genitam voco quantitatem omnem quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque, in Arithmetica per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum; in Geometria per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, absque additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt Facti, Quoti, Radices, Rectangula, Quadrata, Cubi, Latera quadrata, Latera cubica, & similes. Has quantitates ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; & earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine Momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jamjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum, (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. Lateris autem cujusque generantis Coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando Genitam ad hoc latus.

Igitur sensus Lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. momenta, vel mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB+bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC+bAC+cAB$: & genitarum digni-

dignitatum $A^2, A^3, A^4, A^{\frac{1}{2}}, A^{\frac{3}{2}}, A^{\frac{1}{3}}, A^{\frac{2}{3}}, A^{-1}, A^{-2}$, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$, respective. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut Genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB+bA^2$; & Genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$; & Genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ sive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$: & sic in cæteris. Demonstratur vero Lemma in hunc modum.

Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A-\frac{1}{2}a$ in $B-\frac{1}{2}b$, seu $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A+\frac{1}{2}a$ in $B+\frac{1}{2}b$ seu $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & manebit excessus $aB+bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB+bA$. *Q.E.D.*

Cas. 2. Ponatur AB semper æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (per Cas. 1.) erit $gC+cG$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB+bA$) $aBC+bAC+cAB$. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunque. *Q.E.D.*

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; & ipsius A^2, id est rectanguli AB, momentum $aB+bA$ erit $2aA$, ipsius autem A^3, id est contenti ABC, momentum $aBC+bAC+cAB$ erit $3aA^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est naA^{n-1}. *Q.E.D.*

Cas. 4. Unde cum $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A, una cum $\frac{1}{A}$ ducto in a erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cum $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n

 una

una cum $\frac{1}{A^n}$ in $n a A^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{n a}{A^{n+1}}$. *Q.E.D.*

Cas. 5. Et cum $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2 A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per Cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2 A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2} a A^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque $m a A^{m-1}$ æquale $n b B^{n-1}$, & $m a A^{-1}$ æquale $n b B^{-1}$ seu $n b A^{-\frac{m}{n}}$, adeoque $\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q.E.D.*

Cas. 6. Igitur Genitæ cujuscunque $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, una cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $m a A^{m-1} B^n + n b B^{n-1} A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q.E.D.*

Corol. 1. Hinc in continue proportionalibus, si terminus unus datur, momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F, continue proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut -2 A, $-$ B, D, 2 E, 3 F.

Corol. 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

Corol. 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciproce ut latera.

Scholium.

In Literis quæ mihi cum Geometra peritissimo *G. G. Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cum significarem me compotem esse methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus

tibus [*Data Æquatione quotcunque Fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice versa*] eandem celarem: rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit a mea vix abludentem præterquam in verborum & notarum formulis, & Idea generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in Medio uniformi, Gravitate uniformiter agente, recta ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam Medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) colligantur vires absolutæ; dico quod vires illæ absolutæ sunt in progressione Geometrica.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; resistentia per lineam indefinitam AK; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP (quæ sit media proportionalis inter AK & AC, ideoque in subduplicata ratione resistentiæ;) incrementum resistentiæ data temporis particula factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C Asymptotis rectangulis CA, CH describatur Hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO, PR, QS occurrens in B, N, O, R, S. Quoniam AK est ut APq, erit hujus momentum KL ut illius momentum $2\,APQ$, id est, ut AP in KC. Nam velocitatis incrementum PQ, (per motus Leg. II.) proportionale est vi generanti KC. Componatur ratio ipsius KL, cum ratione ipsius KN, & fiet rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$, hoc est, ob datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP. Atqui areæ Hyperbolicæ $KNOL$ ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L, est æqualitatis. Ergo area illa Hyperbolica evanescens est ut AP. Componitur igitur area tota Hyperbolica $ABOL$ ex particulis $KNOL$ velocitati AP semper proportionalibus, & propterea spatio velocitate ista descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$, &c. & vi-

 res

 res absolutæ *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt in progressione Geometrica. *Q. E. D.* Et simili argumento, in ascensu corporis, sumendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. constabit quod vires absolutæ *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. sunt continue proportionales. Ideoque si spatia omnia in ascensu & descensu capiantur æqualia; omnes vires absolutæ *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. erunt continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam *ABNK*; exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia Medii per lineas *AC*, *AP* & *AK* respective; & vice versa.

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum descendendo potest unquam acquirere, exponens est linea *AC*.

Corol. 3. Igitur si in data aliqua velocitate cognoscatur resistentia Medii, invenietur velocitas maxima, sumendo ipsam ad velocitatem

tatem illam, datam in subduplicata ratione, quam habet vis Gravitatis ad Medii resistentiam illam cognitam.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Positis jam demonstratis, dico quod si Tangentes angulorum sectoris Circularis & sectoris Hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascensus futuri ut sector Circuli, & tempus omne descensus præteriti ut sector Hyperbolæ.

Rectæ AC, qua vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D semidiametro AD describatur tum Circuli quadrans AtE, tum Hyperbola rectangula AVZ axem habens AX, verticem principalem A & Asymptoton DC. Jungantur Dp, DP, & erit sector Circularis AtD ut tempus ascensus omnis futuri; & sector Hyperbolicus ATD ut tempus descensus omnis præteriti. Si modo sectorum Tangentes Ap, AP sint ut velocitates.

Cas. 1. Agatur enim Dvq abscindens sectoris ADt & trianguli ADp momenta, seu particulas quam minimas simul descriptas tDv & pDq. Cum particulæ illæ, ob angulum communem D, sunt in duplicata ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp}{pD\ quad.}$ Sed $pD\ quad.$ est $AD\ quad. + Ap\ quad.$ id est, $AD\ quad. + AD \times Ak$ seu $AD \times Ck$; & qDp est $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo sectoris particula tDv est ut $\frac{pq}{Ck}$, id est, ut velocitatis decrementum quam minimum pq directe & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inverse, atque adeo ut particula temporis decremento respondens. Et componendo fit summa particularum omnium tDv in sectore ADt, ut summa particularum temporis singulis velocitatis decrescentis Ap particulis amissis pq respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus ADt est ut ascensus totius futuri tempus. *Q. E. D.*

De Motu Corporum,

Cas. 2. Agatur DQV abscindens tum sectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quam minimas TDV & PDQ; & erunt hæ particulæ ad invicem ut $DTq.$ ad $DPq.$ id est (si TX & AP parallelæ sint) ut $DXq.$ ad $DAq.$ vel $TXq.$ ad $APq.$ & divisim ut $DXq - TXq$ ad $DAq - APq.$ Sed ex natura Hyperbolæ $DXq - TXq$ est ADq, & per Hypothesin APq est $AD \times AK.$ Ergo particulæ sunt ad invicem ut ADq ad

$ADq - AD \times AK$; id est, ut AD ad $AD - AK$ seu AC ad CK: ideoque sectoris particula TDV est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, atque adeo ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directe utque vis generans incrementum inverse, atque adeo ut particula temporis incremento respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ

PQ

PQ generantur, ut summa particularum sectoris *ATD*, id est, tempus totum ut sector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si *AB* æquetur quartæ parti ipsius *AC*, spatium quod corpus tempore quovis cadendo describit, erit ad spatium quod corpus velocitate maxima *AC*, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area *ABNK*, qua spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream *ATD* qua tempus exponitur. Nam cum sit *AC* ad *AP* ut *AP* ad *AK*, erit (per Corol 1. Lem. 11. hujus) *LK* ad *PQ* ut 2 *AK* ad *AP*, hoc est, ut 2 *AP* ad *AC*, & inde *LK* ad ½ *PQ* ut *AP* ad (¼ *AC* vel) *AB*; est & *KN* ad (*AC* vel) *AD* ut *AB* ad *CK*; itaque ex æquo *LKN* ad *DPQ* ut *AP* ad *CK*. Sed erat *DPQ* ad *DTV* ut *CK* ad *AC*. Ergo rursus ex æquo *LKN* est ad *DTV* ut *AP* ad *AC*; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cum igitur arearum *ABNK* & *ATD* momenta *LKN* & *DTV* sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideoque areæ totæ ab initio genitæ *ABNK* & *ATD* ut spatia tota ab initio descensus descripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. Idem consequitur etiam de spatio quod in ascensu describitur. Nimirum quod spatium illud omne sit ad spatium, uniformi cum velocitate *AC* eodem tempore descriptum, ut est area *ABnk* ad sectorem *ADt*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *ATD* cadentis est ad velocitatem, quam eodem tempore in spatio non resistente acquireret, ut triangulum *APD* ad sectorem Hyperbolicum *ATD*. Nam velocitas in Medio non resistente foret ut tempus *ATD*, & in Medio resistente est ut *AP*, id est, ut triangulum *APD*. Et velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, qua corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum *ApD* ad sectorem Circularem *AtD*; sive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Est igitur tempus quo corpus in Medio resistente cadendo velocitatem *AP* acquirit, ad tempus quo velocitatem maximam *AC* in spatio non resistente cadendo acquirere posset, ut sector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus, quo velocitatem *Ap* in Medio

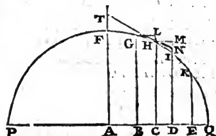
Medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut arcus *At* ad ejus tangentem *Ap*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima, per Corol. 2, & 3, Theor. VI, Lib II; indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo Sectorem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; dabitur tum velocitas *AP* vel *Ap*, tum area *ABNK* vel *ABnk*, quæ est ad sectorem *ADT* vel *ADt* ut spatium quæsitum ad spatium quod tempore dato, cum velocitate illa maxima jam ante inventa, uniformiter describi potest.

Corol. 7. Et regrediendo, ex dato ascensus vel descensus spatio *ABnk* vel *ABNK*, dabitur tempus *ADt* vel *ADT*.

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum Horizontis, sitque resistentia ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum Medii densitas in locis singulis, quæ faciat ut corpus in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas & Medii resistentia in locis singulis.



Sit *PQ* planum illud plano Schematis perpendiculare; *PFHQ* linea curva plano huic occurrens in punctis *P* & *Q*; *G*, *H*, *I*, *K* loca quatuor corporis in hac curva ab *F* ad *Q* pergentis; & *GB*, *HC*, *ID*, *KE* ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demissæ & lineæ horizontali *PQ* ad puncta *B*, *C*, *D*, *E* insistentes; & sint *BC*, *CD*, *DE* distantiæ Ordinatarum inter se æquales. A punctis *G* & *H* ducantur rectæ *GL*, *HN* curvam tangentes in *G* & *H*, & Ordinatis *CH*, *DI* sursum productis occurrentes in *L* & *N*, & compleatur parallelogrammum *HCDM*. Et

Et tempora quibus corpus deſcribit arcus GH, HI, erunt in ſubduplicata ratione altitudinum LH, NI quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, a tangentibus cadendo: & velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ GH, HI directe & tempora inverſe. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$: & decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur a reſiſtentia corpus retardante & gravitate corpus accelerante. Gravitas in corpore cadente & ſpatium NI cadendo deſcribente, generat velocitatem qua duplum illud ſpatium eodem tempore deſcribi potuiſſet (ut *Galilæus* demonſtravit) id eſt, velocitatem $\frac{2NI}{t}$: at in corpore arcum HI deſcribente, auget arcum illum ſola longitudine $HI - HN$ ſeu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, & habebitur decrementum velocitatis ex reſiſtentia ſola oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cum gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; Reſiſtentia erit ad Gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, ſive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abſciſſis CB, CD, CE ſcribantur $-o$, o, $2o$. Pro Ordinata CH ſcribatur P, & pro MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. erunt NI, & Ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c, $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c, & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpective. Et quadrando differentias Ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c; & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, &

$o\sqrt{1+}$

 $o\sqrt{1 \times QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus GH & HI. Præterea si ab Ordinata CH subducatur semisumma Ordinatarum BG ac DI, & ab Ordinata DI subducatur semisumma Ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK sagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæ sunt lineolis LH & NI proportionales, adeoque in duplicata ratione temporum infinite parvorum T & t, & inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ seu $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$: & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$ GH, HI, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cum $2NI$ sit $2Roo$, Resistentia jam erit ad Gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id est, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea est quacum corpus de loco quovis H, secundum tangentem HN egrediens, in Parabola diametrum HC & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut Medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, & propterea Medii densitas est ut resistentia directe & quadratum velocitatis inverse, id est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directe & $\frac{1+QQ}{R}$ inverse, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat Ordinatæ cuilibet AF in T: erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis $\sqrt{1+QQ}$, adeoque in superioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ scribi potest. Qua ratione Resistentia erit ad Gravitatem ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$; Velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & Medii densitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Corol. 2. Et hinc, si curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter basem seu abscissam AC & ordinatim applicatam CH,

CH, (ut moris est) & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos seriei terminos expedite solvetur, ut in exemplis sequentibus.

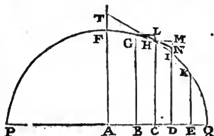
Exempl. 1. Sit Linea *PFHQ* Semicirculus super diametro *PQ* descriptus, & requiratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile in hac linea moveatur.

Bisecetur diameter *PQ* in *A*, dic $AQ\ n$, $AC\ a$, $CH\ e$, & $CD\ o$: & erit DIq seu $AQq - ADq = nn - aa - 2ao - oo$, seu $ee - 2ao - oo$, & radice per methodum nostram extracta, fiet

$$DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} \text{ \&c.}$$ Hic scribatur nn pro

$ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} -$ &c.

Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva o non extat; secundum in quo quantitas illa est unius dimensionis, tertium in quo extat duarum, quartum in quo trium est, & sic in infinitum. Et primus terminus qui hic est e, denotabit semper longitudinem Ordinatæ *CH* insistentis ad initium indefinitæ quantitatis o; secundus terminus qui hic est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam



inter *CH* & *DN*, id est, lineolam *MN* quæ abscinditur complendo parallelogrammum *HCDM*, atque adeo positionem tangentis *HN* semper determinat; ut in hoc casu capiendo *MN* ad *HM* ut est $\frac{ao}{e}$ ad o, seu a ad e. Terminus tertius qui hic est $\frac{nnoo}{2e^3}$ designabit lineolam *IN* quæ jacet inter tangentem & curvam, adeoque determinat angulum contactus *IHN* seu curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si lineola illa *IN* finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium una cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum,

 termi-

De Motu Corporum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus determinat variationem curvaturæ; quintus variationem variationis, & ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum Serierum in Solutione Problematum quæ pendent a tangentibus & curvatura curvarum.

Conferatur jam ſeries $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c, cum ſerie $P - Qo - Roo - So^3$ — &c. & perinde pro P, Q, R & S ſcribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$ & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ ſcribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ ſeu $\frac{n}{e}$, & prodibit Medii denſitas ut $\frac{a}{ne}$ hoc eſt, (ob datam n,) ut $\frac{a}{e}$, ſeu $\frac{AC}{CH}$, id eſt, ut tangentis longitudo illa HT quæ ad ſemidiametrum AF ipſi PQ normaliter inſiſtentem terminatur: & reſiſtentia erit ad gravitatem ut $3a$ ad $2n$, id eſt, ut $3AC$ ad Circuli diametrum PQ: velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare ſi corpus juſta cum velocitate ſecundum lineam ipſi PQ parallelam exeat de loco F, & Medii denſitas in ſingulis locis H ſit ut longitudo tangentis HT, & reſiſtentia etiam in loco aliquo H ſit ad vim gravitatis ut $3AC$ ad PQ, corpus illud deſcribet Circuli quadrantem FHQ. *Q. E. I.*

At ſi corpus idem de loco P, ſecundum lineam ipſi PQ perpendicularem egrederetur, & in arcu ſemicirculi PFQ moveri inciperet, ſumenda eſſet AC ſeu a ad contrarias partes centri A, & propterea ſignum ejus mutandum eſſet & ſcribendum $-a$ pro $+a$. Quo pacto prodiret Medii denſitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem denſitatem, hoc eſt, quæ motus corporum accelerat, Natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non poteſt, ut corpus aſcendendo a P deſcribat Circuli quadrantem PF. Ad hunc effectum deberet corpus a Medio impellente accelerari, non a reſiſtente impediri.

Exempl. 2. Sit linea $PFHQ$ Parabola, axem habens AF horizonti PQ perpendicularem, & requiratur Medii denſitas quæ faciat ut Projectile in ipſa moveatur.

Ex natura Parabolæ, rectangulum PDQ æquale eſt rectangulo ſub ordinata DI & recta aliqua data; hoc eſt, ſi dicantur recta

recta illa b, PCa, PQc, CHe & CDo; rectangulum $a+o$ in $c-a-o$ seu $ac-aa-2ao+co-oo$ æquale est rectangulo b in DI, adeoque DI æquale $\frac{ac-aa}{b}+\frac{c-2a}{b}o-\frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c-2a}{b}o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum vero plures non sint termini, debebit quarti coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ cui Medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nulla igitur Medii densitate movebitur Projectile in Parabola, uti olim demonstravit *Galilæus*. *Q. E. I.*

Exempl. 3. Sit linea AGK Hyperbola, Asymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur Medii densitas quæ faciat ut Projectile moveatur in hac linea.

Sit MX Asymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V, & ex natura Hyperbolæ, rectangulum XV in VG dabitur. Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb; & completo parallelogrammo $DNXZ$, dicatur BNa, BDo, NXc, & ratio data VZ ad ZX vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD seu $NX-VZ-VG$ æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{n}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o$ usurpandus est pro Qo, tertius cum signo mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum signo etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n}-\frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ scribendæ sunt in Regula superiore pro Q, R & S. Quo facto prodit medii densitas

ut

ut $\dfrac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}}$ seu $\dfrac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}}$ id est, si in VZ sumatur VY æqualis EG, ut $\frac{1}{XY}$. Namque aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3XY$ ad $2YG$, & velocitas ea est quacum corpus in Parabola pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\frac{XY\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod Medii densitates in locis singulis G sint reciproce ut distantiæ XY, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut $3XY$ ad $2YG$, & corpus de loco A, justa cum velocitate emissum, describet Hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl. 4. Ponatur indefinite, quod linea AGK Hyperbola sit, centro X Asymptotis MX, NX ea lege descripta, ut constructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD secet Hyperbolam in G & Asymp-

Asymptoton ejus in V, fuerit VG reciproce ut ipsius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, cujus index est numerus n: & quæratur Medii densitas, qua Projectile progrediatur in hac curva.

Pro BN, BD, NX scribantur A, O, C respective, sitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis $A-O$, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, & GD seu $NX-VZ-VG$ æqualis $C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$. Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbb}{A^{n+1}}O+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O-\frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus seriei terminus secundus $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ usurpandus est pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde Medii densitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in loco quovis G, fit

$$\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}},$$

adeoque si in VZ capiatur VY æqualis $n \times VG$, densitas illa est reciproce ut XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}$ ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem in eodem loco G fit ad gravitatem ut 3S in $\frac{XY}{A}$ ad 4RR, id est, XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est quacum corpus projectum in Parabola pergeret, verticem G, diametrum GD & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2XY\ quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Scholium.

Eadem ratione qua prodiit densitas Medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in Corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n prodibit densitas Medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}\Big|^{n-1}.$

Et propterea si Curva inveniri potest ea lege ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}\Big|^{n-1}$, vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}\big|^{n-1}$: corpus movebitur in hac Curva in uniformi Medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad Curvas simpliciores.

Quoniam motus non fit in Parabola nisi in Medio non resistente, in Hyperbolis vero hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod Linea, quam projectile in Medio uniformiter resistente describit, propius accedit ad Hyperbolas hasce quam ad Parabolam. Est utique linea illa Hyperbolici generis, sed quæ circa verticem magis distat ab Asymptotis; in partibus a vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quam pro ratione Hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta vero non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommode adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quam Hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ vero in usum sic deducentur.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & recta GT tanget Hyperbolam in G, ideoque densitas Medii in G est reciproce ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2} GV$.

Proinde si corpus de loco A secundum rectam AH projectum describat Hyperbolam AGK, & AH producta occurrat Asymptoto NX in H, actaque AI eidem parallela occurrat alteri Asymptoto MX in I; erit Medii densitas in A reciproce ut AH, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad gravitatem ut AH ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in AI. Unde prodeunt sequentes Regulæ.

Reg. 1.

Reg. 1. Si servetur tum Medii densitas in A, tum velocitas quacum corpus projicitur, & mutetur angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX. Ideoque si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, Hyperbola deinceps ex dato quovis angulo NAH expedite determinari potest.

Reg. 2. Si servetur tum angulus NAH, tum Medii densitas in A, & mutetur velocitas quacum corpus projicitur; servabitur longitudo AH, & mutabitur AI in duplicata ratione velocitatis reciproce.

Reg. 3. Si tam angulus NAH quam corporis velocitas in A, gravitasque acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacunque: augebitur proportio AH ad AI in eadem ratione, manente Parabolæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AHq}{AI}$; & propterea minuetur AH in eadem ratione, & AI minuetur in ratione illa duplicata. Augetur vero proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub æquali magnitudine fit minor, vel Medii densitas major, vel resistentia, ex magnitudine diminuta, diminuitur in minore ratione quam pondus.

De Motu Corporum.

Reg. 4. Quoniam densitas Medii prope verticem Hyperbolæ major est quam in loco A, ut habeatur densitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium GT ad tangentem AH inveniri, & densitas in A augeri in ratione paulo majore quam semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT.

Reg. 5. Si dantur longitudines AH, AI, & describenda sit Figura AGK: produc HN ad X, ut sit HX æqualis facto sub $n+1$ & AI; centroque X & Asymptotis MX, NX per punctum A describatur Hyperbola, ea lege, ut sit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n.

Reg. 6. Quo major est numerus n, eo magis accuratæ sunt hæ Hyperbolæ in ascensu corporis ab A, & minus accuratæ in ejus descensu ad K; & contra. Hyperbola Conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si Hyperbola sit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta AN Asymptotis MX, NX in M & N, & sumatur NK ipsi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc Hyperbolam ex Phænomenis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia, eadem velocitate, in angulis diversis HAK, hAk, incidantque in planum Horizontis in K & k; & notetur proportio AK ad Ak. Sit ea d ad e. Tum erecto cujusvis longitudinis perpendiculo AI, assume utcunque longitudinem AH vel Ah, & inde collige graphice longitudines AK, Ak, per Reg. 6. Si ratio AK ad Ak sit eadem cum ratione d ad e, longitudo AH recte assumpta fuit. Sin minus cape in recta infinita SM longitudinem SM æqualem assumptæ AH, & erige perpendiculum MN æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak}-\frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus AH invenienda sunt plura puncta N, & per omnia agenda Curva linea regularis $NNXN$, secans rectam $SMMM$ in X. Assumatur demum AH æqualis abscissæ SX & inde denuo inveniatur longitudo AK; & longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem AI & hanc ultimam AH ut longitudo AK per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem AK, erunt veræ illæ longitudines AI & AH, quas invenire oportuit. Hisce vero datis dabitur & resistentia Medii in loco A, quippe quæ sit ad vim gravitatis ut AH ad $2AI$. Augenda est autem densitas Medii per Reg. 4. & resistentia modo inventa, si in eadem ratione augeatur, fiet accuratior.



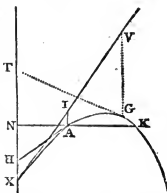
Reg.

Reg. 8. Inventis longitudinibus AH, HX; si jam desideretur positio rectæ AH, secundum quam Projectile, data illa cum velocitate emissum, incidit in punctum quodvis K: ad puncta A & K erigantur rectæ AC, KF horizonti perpendiculares, quarum AC deorsum tendat, & æquetur ipsi AI seu $\frac{1}{2} HX$. Asymptotis AK, KF describatur Hyperbola, cujus conjugata transeat per punctum C, centroque A & intervallo AH describatur Circulus secans Hyperbolam illam in puncto H; & Projectile secundum rectam AH emissum incidet in punctum K. *Q. E. I.* Nam punctum H, ob datam longitudinem AH, locatur alicubi in Circulo descripto. Agatur CH occurrens ipsis AK & KF, illi in E, huic in F; & ob

parallelas CH, MX & æquales AC, AI, erit AE æqualis AM, & propterea etiam æqualis KN. Sed CE est ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in Hyperbolam Asymptotis AK, KF descriptam, cujus conjugata transit per punctum C atque adeo reperitur in communi intersectione Hyperbolæ hujus & Circuli descripti. *Q. E. D.* Notandum est autem quod hæc operatio perinde se habet, sive recta AKN horizonti parallela sit, sive ad horizontem in angulo quovis inclinata: quodque ex duabus intersectionibus H, H duo prodeunt anguli NAH, NAH; & quod in Praxi mechanica sufficit

 Cir-

 Circulum semel describere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C, ut ejus pars FH, Circulo & rectæ FK interjecta, æqualis sit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK sitæ.



Quæ de Hyperbolis dicta sunt facile applicantur ad Parabolas. Nam si $XAGK$ Parabolam designet quam recta XV tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abscissarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH, quarum XT parallela sit VG, & GT, AH Parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, secundum rectam AH productam, justa cum velocitate projectum, describet hanc Parabolam, si modo densitas Medii, in locis singulis G, sit reciproce ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quacum Projectile pergeret, in spatio non resistente, in Parabola Conica verticem G, diametrum VG deorsum productam, & latus rectum $\frac{2\,GTq.}{nn - n \times VG}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn - 2n}{n - 2}\,VG$. Unde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate Medii in A, tum velocitate quacum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur Parabolæ vertex X, & positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia Parabolæ puncta G, per quæ Projectile transibit.

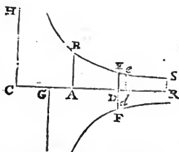
SECTIO

SECTIO III.

De Motu Corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si Corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicata, & idem sola vi insita in Medio similari movetur, sumantur autem tempora in progressione Arithmetica: quantitates velocitatibus reciproce proportionales, datâ quadam quantitate auctæ, erunt in progressione Geometrica.



Centro C, Asymptotis rectangulis $CADd$ & CH, describatur Hyperbola $BEeS$, & Asymptoto CH parallelæ sint AB, DE, de. In Asymptoto CD dentur puncta A, G: Et si tempus exponatur per aream Hyperbolicam $ABED$ uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem DF, cujus reciproca GD una cum data CG componat longitudinem CD in progressione Geometrica crescentem.

Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quam minimum, & erit Dd reciproce ut DE, adeoque directe ut CD. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (per hujus Lem. II.) est $\frac{Dd}{GDq}$ erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$ uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{GD}$ in eadem ratione cum velocitate. Nam decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per Hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut

 velo-

 velocitas, altera ut quadratum velocitatis: & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{1}{GDq}$. Proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas GD, ipsi $\frac{1}{GD}$ reciproce proportionalis, quantitate data CG augeatur, summa CD, tempore $ABED$ uniformiter crescente, crescet in progressione Geometrica. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream Hyperbolicam $ABED$; exponi potest velocitas per ipsius GD reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Corol. 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis $ABED$, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iisdem positis, dico quod si spatia descripta sumantur in progressione Arithmetica, velocitates data quadam quantitate auctæ erunt in progressione Geometrica.

In Asymptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS, quod occurrat Hyperbolæ in S, exponatur descriptum spatium per aream Hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ cum data CG componit longitudinem CD, in progressione Geometrica decrescentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in Arithmetica.

Etenim ob datum spatii incrementum $EDde$, lineola Dd, quæ decre-

decrementum est ipsius GD, erit reciproce ut ED, adeoque directe ut CD, hoc est, ut summa ejusdem GD & longitudinis datæ CG. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciproce proportionali, quo data spatii particula $DdeE$ describitur, est ut resistentia & tempus conjunctim, id est, directe ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inverse ut velocitas; adeoque directe ut summa duarum quantitatum, quarum una datur, altera est ut velocitas. Igitur decrementum tam velocitatis quam lineæ GD, est ut quantitas data & quantitas decrescens conjunctim, & propter analoga decrementa, analogæ semper erunt quantitates decrescentes: nimirum velocitas & linea GD. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si velocitas exponatur per longitudinem GD, spatium descriptum erit ut area Hyperbolica $DESR$.

Corol. 2. Et si utcunque assumatur punctum R, invenietur punctum G, capiendo GR ad GD, ut est velocitas sub initio ad velocitatem post spatium quodvis $RSED$ descriptum. Invento autem puncto G, datur spatium ex data velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cum, per Prop. XI, detur velocitas ex dato tempore, & per hanc Propositionem detur spatium ex data velocitate; dabitur spatium ex dato tempore, & contra.

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Posito quod Corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum recta ascendit vel descendit, & quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata: dico quod si Circuli & Hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum a dato puncto ducta, Tempora erunt ut arearum Sectores, rectis a centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

Cas. 1. Ponamus primo quod corpus ascendit, centroque D & semidiametro quovis DB describatur Circuli quadrans $BETF$, & per semidiametri DB terminum B agatur infinita BAP, semidiametro DF parallela. In ea detur punctum A, & capiatur segmentum AP velocitati proportionale. Et cum resistentiæ pars aliqua sit

ut

De Motu Corporum, ut velocitas & pars altera ut velocitatis quadratum, sit resistentia tota in *P* ut *AP quad.* + 2 *BAP*. Jungantur *DA*, *DP* Circulum secantes in *E* ac *T*, & exponatur gravitas per *DA quad.* ita ut sit gravitas ad resistentiam in *P* ut *DAq* ad *APq* + 2 *BAP*: & tempus ascensus omnis futuri erit ut Circuli sector *EDTE*.

Agatur enim *DVQ*, abscindens & velocitatis *AP* momentum *PQ*, & Sectoris *DET* momentum *DTV* dato temporis momento respondens: & velocitas decrementum illud *PQ* erit ut summa virium gravitatis *DAq* & resistentiæ *APq* + 2 *BAP*, id est (per Prop. 12. Lib. 2. Elem.) ut *DP quad.* Proinde area *DPQ*, ipsi *PQ* proportionalis, est ut *DP quad*; & area *DTV*, (quæ est ad aream *DPQ* ut *DTq* ad *DPq*) est ut datum *DTq*. Decrescit igitur area *EDT* uniformiter ad modum temporis futuri per subductionem datarum particularum *DTV*, & propterea tempori ascensus futuri proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem *AP* ut prius, & resistentia ponatur esse ut *APq* + 2 *BAP*, & si vis gravitatis minor sit quam quæ per *DAq* exponi possit; capiatur *BD* ejus longitudinis ut sit *ABq* — *BDq* gravitati proportionale, sitque *DF* ipsi *DB* perpendicularis & æqualis, & per verticem *F* describatur Hyperbola *FTVE* cujus semidiametri conjugatæ sint *DB* & *DF*, quæque secet *DA* in *E*, & *DP*, *DQ* in *T* & *V*; & erit tempus ascensus futuri ut Hyperbolæ sector *TDE*.

Nam

Nam velocitatis decrementum PQ, in data temporis particula factum, est ut summa resistentiæ $APq+2BAP$ & gravitatis $ABq-BDq$, id est, ut $BPq-BDq$. Est autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq adeoque, si ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq seu $GDq-DFq$ ad BDq utque GDq ad BPq, & divisim ut DFq ad $BPq-BDq$. Quare cum area DPQ sit ut PQ, id est, ut $BPq-BDq$; erit area DTV ut datum DFq. Decrescit igitur area EDT uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per subductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 3. Sit AP velocitas in descensu corporis, & $APq+2BAP$ resistentia, & $BDq-ABq$ vis gravitatis, existente angulo DBA recto. Et si centro D, vertice principali B, describatur Hyperbola rectangula $BETV$ secans productas DA, DP, & DQ in E, T & V; erit Hyperbolæ hujus sector DET ut tempus descensus.

Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, est ut excessus gravitatis supra resistentiam, id est, ut $BDq-ABq-2BAP-APq$ seu $BDq-BPq$. Et area DTV est ad aream DPQ ut DTq ad DPq, adeoque ut GTq seu $GDq-BDq$ ad BPq utque GDq ad BDq & divisim ut BDq ad $BDq-BPq$. Quare cum area DPQ sit ut $BDq-BPq$, erit area DTV ut datum BDq. Crescit igitur area EDT uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori descensus proportionalis est. *Q. E. D.*

Corol. Igitur velocitas AP est ad velocitatem quam corpus tempore EDT, in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli DAP ad aream sectoris centro D, radio DA, angulo ADT descripti; ideoque ex dato tempore datur. Nam velocitas, in Medio non resistente, tem-

pori atque adeo sectori huic proportionalis est; in Medio resistente est ut triangulum; & in Medio utroque, ubi quam minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris & trianguli.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione Arithmetica; si vires ex resistentia & gravitate compositæ sumantur in progressione Geometrica.

Capiatur AC (in Fig. tribus ultimis,) gravitati, & AK resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes puncti A si corpus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab quæ sit ad DB ut DBq ad $4BAC$: & area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione Arithmetica, dum vires CK in progressione Geometrica sumuntur. Dico igitur quod distantia corporis ab ejus altitudine maxima sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cum AK sit ut resistentia, id est, ut $APq+2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq+2BAP}{Z}$; & (per hujus Lemma II.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ+2BA\times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ\times LO}{Z}$ seu $\frac{BPQ\times BD\,cub.}{2Z\times CK\times AB}$

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, sitque gravitas ut $ABq+BDq$ existente BET Circulo, (in Fig. Cas. 1. Prop. XIII.) linea AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq+BDq}{Z}$, & DPq seu $APq+2BAP+ABq+BDq$ erit $AK\times Z+AC\times Z$ seu $CK\times Z$; ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK\times Z$.

Cas.

Cas. 2. Sin corpus ascendit, & gravitas sit ut $ABq - BDq$, linea AC (Fig. Cas. 2. Prop. XIII) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & DTq erit ad DPq ut DFq seu DBq ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times Z + AC \times Z$ seu $CK \times Z$. Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 3. Et eodem argumento, si corpus descendit, & propterea gravitas sit ut $BDq - ABq$, & linea AC (Fig. Cas. 3. Prop. præced.) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$, erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut supra.

Cum igitur areæ illæ semper sint in hac ratione, si pro area DTV, qua momentum temporis sibimet ipsi semper æquale exponitur, scribatur determinatum quodvis rectangulum, puta $BD \times m$, erit area DPQ, id est, $\frac{1}{2} BD \times PQ$ ad $BD \times m$, ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ superius inventum, fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV seu $BD \times m$, & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea (ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$) ut velocitas AP, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo vel descendendo describit. Ideoque differentia arearum & spatium illud, proportionalibus momentis crescentia vel decrescentia & simul incipientia vel simul evanescentia, sunt proportionalia. *Q. E. D.*

Corol. Igitur si longitudo aliqua V sumatur in ea ratione ad duplum longitudinis M, quæ oritur applicando aream DET ad BD, quam habet linea DA ad lineam DE; spatium quod corpus ascensu vel descensu toto in Medio resistente describit, erit ad spatium quod in Medio non resistente eodem tempore describere posset, ut arearum illarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{4AB}$, ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in Medio non resistente est in duplicata ratione temporis, sive ut V^2, & ob datas BD & AB, ut

De Motu Corporum, $\frac{BD \times V^2}{4AB}$. Momentum hujus areæ five huic æqualis $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq \times AB}$ eft ad momentum differentiæ arearum DET & $AbNK$, ut $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$ ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, hoc eft, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, five ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP; adeoque ubi areæ DET & DAP quam minimæ funt, in ratione æqualitatis. Æqualis igitur eft area quam minima $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ differentiæ quam minimæ arearum DET & $AbNK$. Unde cum fpatia in Medio utroque, in principio defcenfus vel fine afcenfus fimul defcripta accedunt ad æqualitatem, adeoque tunc funt ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia; ob eorum analoga incrementa neceffe eft ut in æqualibus quibufcunque temporibus fint ad invicem ut area illa $\frac{BD \times V^2}{4AB}$ & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E D.*

SECTIO

SECTIO IV.

De Corporum Circulari Motu in Mediis resistentibus.

LEMMA III.

Sit PQRr *Spiralis quæ secet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* SQ *in* T; *& ad Spiralem erectis perpendiculis* PO, QO *concurrentibus in* O, *jungatur* SO. *Dico quod si puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ×2PS *ad* PQ *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *OPQ*, *OQR* subducantur anguli æquales *SPQ*, *SQR*, & manebunt anguli æquales *OPS*, *OQS*. Ergo Circulus qui transit per puncta *O*, *S*, *P* transibit etiam per punctum *Q*. Coeant puncta *P* & *Q*, & hic Circulus in loco coitus *PQ* tanget Spiralem, adeoque perpendiculariter secabit rectam *OP*. Fiet igitur *OP* diameter Circuli hujus, & angulus *OSP* in semicirculo rectus. *Q. E. D.*

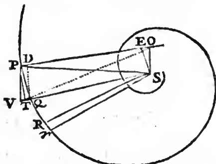
Ad *OP* demittantur perpendicula *QD*, *SE*, & linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: *TQ* ad *PD* ut *TS* vel *PS* ad *PE*, seu 2 *PO* ad 2 *PS*. Item *PD* ad *PQ* ut *PQ* ad 2 *PO*. Et ex æquo perturbate *TQ* ad *PQ* ut *PQ* ad 2 *PS*. Unde fit *PQq* æquale *TQ*×2*PS*. *Q. E. D.*

PROPO-

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta in duplicata ratione densitatis: dico quod corpus gyrari potest in Spirali, quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore Lemmate, & producatur SQ ad V, ut sit SV æqualis SP. Tempore quovis, in medio resistente, describat corpus arcum quam minimum PQ, & tempore duplo arcum quam minimum PR; & decrementa horum arcuum ex resistentia oriunda, sive defectus ab arcubus qui in Medio non resistente iisdem temporibus describerentur, erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Est itaque decrementum arcus PQ pars quarta decrementi arcus PR. Unde etiam, si areæ PSQ, æqualis capiatur area QSr, erit decrementum arcus PQ, æquale dimidio lineolæ Rr; adeoque vis resistentiæ & vis centripeta sunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2} Rr$ & TQ quas simul generant.



Quoniam vis centripeta, qua corpus urgetur in P, est reciproce ut SPq, & (per Lem. x. Lib. I.) lineola TQ, quæ vi illa generatur, est in ratione composita ex ratione hujus vis & ratione duplicata temporis quo arcus PQ describitur, (Nam resistentiam in hoc casu, ut infinite minorem quam vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$ id est (per Lemma novissimum) $\frac{1}{2} PQq \times SP$, in ratione duplicata temporis, adeoque tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & corporis velocitas, qua arcus PQ illo tempore describitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$ hoc est, in subduplicata ratione ipsius SP reciproce. Et simili argumento, velocitas qua arcus QR describitur, est in subduplicata

duplicata ratione ipsius SQ reciproce. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicata ratione SQ ad SP, sive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$; & ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, est arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2} VQ$; nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ad $\frac{1}{2} VQ$ fit æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ, ex resistentia oriundum, sive hujus duplum Rr, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim; erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad $\frac{1}{2} VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ sive ut $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & ob similia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2} VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2} OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, id est, in ratione densitatis Medii in P & ratione duplicata velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit Medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur Spiralis, & ob datam rationem OS ad OP, densitas Medii in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In Medio igitur, cujus densitas est reciproce ut distantia a centro SP, corpus gyrari potest in hac Spirali. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas in loco quovis P ea semper est quacum corpus in Medio non resistente gyrari potest in Circulo, ad eandem a centro distantiam SP.

Corol. 2. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{OS}{OP}$, sin distantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et inde Spiralis ad quamlibet Medii densitatem aptari potest.

Corol. 3. Vis resistentiæ in loco quovis P, est ad vim centripetam

tam in eodem loco ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP. Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}$ Rr & TQ sive ut $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQq}{SP}$, hoc est, ut $\frac{1}{2}$ VQ & PQ, seu $\frac{1}{2}$ OS & OP. Data igitur Spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & viceversa ex data illa proportione datur Spiralis.

Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hac Spirali, nisi ubi vis resistentiæ minor est quam dimidium vis centripetæ. Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ & Spiralis conveniet cum linea recta PS, inque hac recta corpus descendet ad centrum, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem, qua probavimus in superioribus in casu Parabolæ (Theor. x. Lib. 1,) descensum in Medio non resistente fieri, in subduplicata ratione unitatis ad numerum binarium. Et tempora descensus hic erunt reciproce ut velocitates, atque adeo dantur.

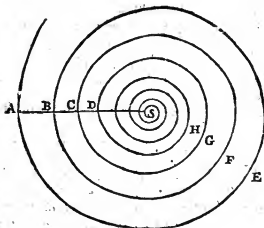
Corol. 5. Et quoniam in æqualibus a centro distantiis velocitas eadem est in Spirali PQR atque in recta SP, & longitudo Spiralis ad longitudinem rectæ PS est in data ratione, nempe in ratione OP ad OS; tempus descensus in Spirali erit ad tempus descensus in recta SP in eadem illa data ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuscunque datis describantur duo Circuli; & manentibus hisce Circulis, mutetur utcunque angulus quem Spiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum quas corpus intra Circulorum circumferentias, pergendo in Spirali a circumferentia ad circumferentiam, complere potest, est ut $\frac{PS}{OS}$, sive ut Tangens anguli illius quem Spiralis continet cum radio PS; tempus vero revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id est, ut Secans anguli ejusdem, vel etiam reciproce ut Medii densitas.

Corol. 7. Si corpus, in Medio cujus densitas est reciproce ut distantia locorum a centro, revolutionem in curva quacunque AEB circa centrum illud fecerit, & Radium primum AS in eodem angulo secuerit in B quo prius in A, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in A reciproce in subduplicata ratione distantiarum a centro (id est, ut AS ad mediam proportionalem inter AS & BS) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones BFC, CGD &c. facere, & interfec-

tionibus

ctionibus distinguet Radium AS in partes AS, BS, CS, DS, &c. continue proportionales. Revolutionum vero tempora erunt ut



perimetri Orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directe, & velocitates in principiis A, B, C, inverse; id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continue proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$, id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}AS$ ad AB quam proxime. Unde tempus illud totum expedite invenitur.

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in Mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro S, intervallis continue proportionalibus SA, SB, SC, &c. describe Circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter perimetros duorum quorumvis ex his Circulis, in Medio de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in Medio proposito, ut Medii propositi densitas mediocris inter hos Circulos ad Medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quam proxime: Sed & in eadem quoque ratione esse Secantem anguli quo Spiralis præfinita, in Medio de quo egimus, secat radium AS, ad Secantem anguli

quo

 quo Spiralis nova secat radium eundem in Medio proposito: Atque etiam ut sunt eorundem angulorum Tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter Circulos eosdem duos quam proxime. Si hæc fiant passim inter Circulos binos, continuabitur motus per Circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possimus quibus modis ac temporibus corpora in Medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in Spiralibus ad formam Ovalium accedentibus peragantur; tamen concipiendo Spiralium illarum singulas revolutiones iisdem ab invicem intervallis distare, iisdemque gradibus ad centrum accedere cum Spirali superius descripta, intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujusmodi Spiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si Medii densitas in locis singulis sit reciproce ut distantia locorum a centro immobili, sitque vis centripeta reciproce ut dignitas quælibet ejusdem distantiæ: dico quod corpus gyrari potest in Spirali quæ radios omnes a centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Demonstratur eadem methodo cum Propositione superiore. Nam si vis centripeta in P sit reciproce ut distantiæ SP dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index est $n+1$; colligetur ut supra, quod tempus quo corpus describit arcum quemvis PQ erit ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & resistentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^n}$, sive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$, adeoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc est, ob datum $\frac{1-\frac{1}{2}n \times OS}{OP}$, reciproce ut SP^{n+1}. Et propterea, cum velocitas sit reciproce ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, densitas in P erit reciproce ut SP.

Corol. 1. Resistentia est ad vim centripetam, ut $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciproce ut SP *cub.*, erit $1-\frac{1}{2}n=0$; adeoque resistentia & densitas Medii nulla erit, ut in Propositione nona Libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciproce ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa in negativam mutabitur.

Scho-

Scholium.

Cæterum hæc Propositio & superiores, quæ ad Media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut Medii ex uno corporis latere major densitas quam ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in Mediis quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA IV.

Invenire & vim centripetam & Medii resistentiam qua corpus in data Spirali, data velocitatis Lege, revolvi potest.

Sit Spiralis illa PQR. Ex velocitate qua corpus percurrit arcum quam minimum PQ dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac densitas Medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Data Lege vis centripetæ, invenire Medii densitatem in locis singulis, qua corpus datam Spiralem describet.

Ex vi centripeta invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda Medii densitas: ut in Propositione superiore.

Methodum vero tractandi hæc Problemata aperui in hujus Propositione decima, & Lemmate secundo; & Lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentia Mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

De Motu Corporum,

SECTIO V.

De Densitate & Compressione Fluidorum, deque Hydrostatica.

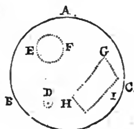
Definitio Fluidi.

Fluidum est corpus omne cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facile moventur inter se.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (seposita condensationis, gravitatis & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & absque omni motu a pressione illa orto permanent in locis suis.

Cas. 1. In vase Sphærico *A B C* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illa pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes, ad eandem a centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atque hoc adeo quia similis & æqualis est omnium pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui a pressione illa oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra Hypothesin. Non possunt longius ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra Hypothesin. Non possunt servata sua a centro distantia moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest



pars

pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Dico jam quod fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique: sit enim EF pars sphærica fluidi, & si hæc undique non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per Casum primum, permanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebunt in locis suis, per Casum eundem primum, & additione pressionis novæ movebuntur de locis suis, per definitionem Fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falso dicebatur quod Sphæra EF non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Cas. 3. Dico præterea quod diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motus Legem III. Sed &, per Casum secundum, undique premuntur eadem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eadem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quod fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt a partibus Sphæricis in punctis quibuscunque; & ibi partes illas Sphæricas æqualiter premunt, per Casum 3. & vicissim ab illis æqualiter premuntur, per Motus Legem tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cum igitur fluidi pars quælibet GHI in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuo æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est quod Fluidi cujuscunque GHI, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuo premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

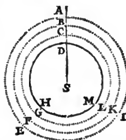
Cas. 6. Igitur si Fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter, cedet idem pressioni fortiori, per Definitionem Fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido Fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quam ex alio, sed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam Fluidum, quam primum a parte magis pressa recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; reducetur pressio undique ad æqualitatem, in momento temporis, absque motu locali: & subinde partes fluidi, per Casum quintum, se mutuo prement æqualiter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externa superficie illatam, mutari possunt, nisi quatenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensius vel remissius sese premendo difficilius vel facilius labuntur inter se.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si Fluidi Sphærici, & in æqualibus a centro distantiis homogenei, fundo Sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus Cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ Fluidi incumbentis.



Sit *DHM* superficies fundi, & *AEI* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *BFK*, *CGL* distinguatur fluidum in Orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem Orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *AEI* vi simplici gravitatis propriæ, qua & omnes Orbis supremi partes & superficies secunda *BFK* (per Prop. XIX.) pro mensura sua æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hac pressione, pro mensura sua, & insuper vi propriæ gravitatis, id est pressione tripla, urgetur superficies tertia *CGL*. Et similiter pressione quadrupla urgetur superficies quarta, quintupla quinta, & sic deinceps. Pressio igitur qua superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus Orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati Orbis infimi multiplicatæ per numerum Orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad Cylindrum præfinitum (si modo Orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis a superficie infima ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus Cylindri præfi-

præfiniti. *Q. E. D.* Et simili argumentatione patet Propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quavis assignata distantiæ a centro, ut & ubi Fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur a toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in propositione describitur; pondere reliquo a fluidi figura fornicata sustentato.

Corol. 2. In æqualibus autem a centro distantiis eadem semper est pressionis quantitas, sive superficies pressa sit Horizonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive fluidum, a superficie pressa sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpat oblique per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maxime irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem Theorematis hujus ad Casus singulos Fluidorum.

Corol. 3. Eadem Demonstratione colligitur etiam (per Prop. XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se, si modo excludatur motus qui ex condensatione oritur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido libere innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquesceret & indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet vel descenderet vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet vel descenderet vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui, per Cas. 5. Prop. XIX. jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod specifice gravius est quam Fluidum sibi contiguum subsidebit, & quod specifice levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus alias in æquili-

æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutra libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est Gravitas: altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas absoluta est vis tota qua corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis Gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis Gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est, inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impedientia permanent in locis suis, perinde ac si gravia non essent. Quæ in Aere sunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quatenus ab Aeris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quam excessus verorum ponderum supra pondus Aeris. Unde & vulgo dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, Aerique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparative levia sunt, non vere, quia descendunt in vacuo. Sic & in Aqua corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparative & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ vel ab ea superatur. Quæ vero nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparative tamen & in sensu vulgi non gravitant in aqua. Nam similis est horum Casuum Demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si Medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel a gravitate propria, vel ab alia quacunque vi centripeta, & corpus ab eadem vi urgeatur fortius: differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus Propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus a vi illa urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifuga haberi debet.

Corol. 9. Cum autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum Figuras externas, patet insuper, per Corollarium

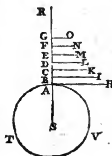
Prop.

Prop. XIX., quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si Animalia immergantur, & sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quatenus hæc corpora a compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum Systematis fluido comprimente circundati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quatenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

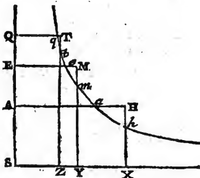
Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a vi centripeta distantiis suis a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continue proportionales, densitates Fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continue proportionales.

Designet ATV fundum Sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, &c. distantias continue proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, &c. quæ sint ut densitates Medii in locis A, B, C, D, E; & specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}, \frac{BI}{BS}, \frac{CK}{CS}$, &c. vel, quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}, \frac{BI}{BC}, \frac{CK}{CD}$, &c. Finge primum has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, a B ad C, a C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. Et hæ gravitates ductæ in altitudines AB, BC, CD, &c. conficient pressiones AH, BI, CK, quibus fundum ATV (juxta Theorema XV.) urgetur. Sustinet ergo particula A pressiones omnes AH, BI, CK, DL, pergendo in infinitum; & particula B pressiones omnes præter primam AH; & particula C omnes præter duas primas AH, BI; & sic deinceps: adeoque particulæ primæ A densitas AH est ad particulæ secundæ B densitatem



tatem BI ut summa omnium $AH+BI+CK+\mathcal{D}L$, in infinitum, ad summam omnium $BI+CK+\mathcal{D}L$, &c. Et BI densitas secundæ B, est ad CK densitatem tertiæ C, ut summa omnium $BI+CK+\mathcal{D}L$, &c. ad summam omnium $CK+\mathcal{D}L$, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis AH, BI, CK, &c. proportionales, atque adeo continue proportionales, per hujus Lem. I. proindeque differentiæ AH, BI, CK, &c. summis proportionales, sunt etiam continue proportionales. Quare cum densitates in locis A, B, C, &c. sint ut AH, BI, CK, &c. erunt etiam hæ continue proportionales. Pergatur per saltum, & (ex æquo) in distantiis SA, SC, SE continue proportionalibus, erunt densitates AH, CK, EM continue proportionales. Et eodem argumento, in distantiis quibusvis continue proportionalibus SA, $S\mathcal{D}$, SG, densitates AH, $\mathcal{D}L$, GO erunt continue proportionales. Coeant jam puncta A, B, C, $\mathcal{D}$, E, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum a fundo A ad summitatem Fluidi continua reddatur, & in distantiis quibusvis continue proportionalibus SA, $S\mathcal{D}$, SG, densitates AH, $\mathcal{D}L$, GO, semper existentes continue proportionales, manebunt etiamnum continue proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si detur densitas Fluidi in duobus locis, puta A & E, colligi potest ejus densitas in alio quovis loco Q. Centro S, Asymptotis rectangulis SQ, SX, describatur Hyperbola secans perpendicula AH, EM, QT in a, e, q, ut & perpendicula HX, MY, TZ, ad Asymptoton SX demissa, in h, m & t. Fiat area $ZYmtZ$ ad aream datam $YmhX$ ut area data $EeqQ$ ad aream datam $EeaA$; & linea Zt producta abscindet lineam Qt densitati proportionalem. Namque si lineæ SA, SE, SQ sunt continue proportionales, erunt areæ $EeqQ$, $EeaA$ æquales, & inde areæ his proportionales $YmtZ$, $XhmY$ etiam æquales, & lineæ SX, SY, SZ, id est AH, EM, QT continue proportionales, ut oportet. Et si lineæ SA, SE, SQ obtinent alium quemvis ordinem in serie continue proportionalium, lineæ AH, EM, QT, ob proportionales areas Hyperbolicas, obtinebunt eundem ordinem in alia serie quantitatum continue proportionalium.

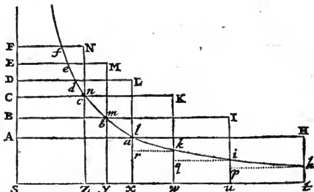


PROPO-

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit Fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus a gravitate quadratis distantiarum suarum a centro reciproce proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ sumantur in progressione Musica, densitates Fluidi in his distantiis erunt in progressione Geometrica.

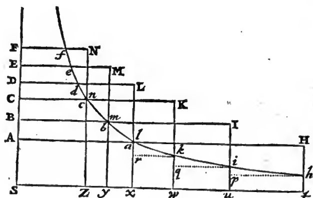
Designet S centrum, & SA, SB, SC, SD, SE distantias in progressione Geometrica. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, &c. quæ sint ut Fluidi densitates in locis $A, B, C, D, E,$ &c. & ipsius



gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde est, in distantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cum densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c.

 Centro

DE MOTU CORPORUM, Centro S, Asymptotis SA, Sx, describatur Hyperbola quævis, quæ secet perpendicula AH, BI, CK, &c. in a, b, c, &c. ut & perpendicula ad Asymptoton Sx demissa Ht, Iu, Kw in h, i, k; & densitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu tp, uq, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est, ut Aa, Bb, &c. Est enim, ex natura Hyperbolæ, SA ad AH vel St, ut th ad Aa, adeoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa.



Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb, &c. Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continue proportionales, & propterea differentiis suis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quam plurimi; & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ Hyperbolicæ $zthn$, adeoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. Sumantur

tur jam differentiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progressione Musica, & differentiæ $Aa-Dd$, $Dd-Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz, id est, AH, DL, FN, continue proportionales. Q. E. D.

Corol. Hinc si dentur Fluidi densitates duæ quævis, puta AH & CK, dabitur area $thkw$ harum differentiæ tw respondens; & inde invenietur densitas FN in altitudine quacunque SF, sumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thkw$ ut est differentia $Aa-Ff$ ad differentiam $Aa-Cc$.

Scholium.

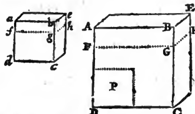
Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum Fluidi diminuatur in triplicata ratione distantiarum a centro; & quadratorum distantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\,cub.}{SAq}$, $\frac{SA\,cub.}{SBq}$, $\frac{SA\,cub.}{SCq}$) sumantur in progressione Arithmetica; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione Geometrica. Et si gravitas diminuatur in quadruplicata ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\,cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\,cub.}$, &c.) sumantur in progressione Arithmetica; densitates AH, BI, CK, &c. erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Rursus si gravitas particularum Fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione Arithmetica, densitates erunt in progressione Geometrica. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi Fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium a Fluido occupatum reciproce ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis Leges, ut quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, sed triplicata ratio Vis æqualis quadruplicatæ rationi densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ a centro, densitas erit reciproce ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciproce ut quadratum distantiæ, densitas erit reciproce in sesquiplicata ratione

 tione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicata ratione densitatis, & gravitas reciproce in ratione duplicata distantiæ, & densitas erit reciproce ut distantia. Casus omnes percurrere longum esset.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si Fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versa, particulæ viribus quæ sunt reciproce proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt Fluidum Elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur Fluidum in spatio cubico *ACE*, dein compressione redigi in spatium cubicum minus *ace*; & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, distantiæ erunt ut cuborum latera *AB*, *ab*; & Medii densitates reciproce ut spatia continentia *AB cub.* & *ab cub.* In latere cubi majoris *ABCD* capiatur quadratum *DP* æquale lateri cubi minoris *db*; & ex Hypothesi, pressio qua quadratum *DP* urget Fluidum inclusum, erit ad pressionem qua latus illud quadratum *db* urget Fluidum inclusum ut Medii densitates ad invicem, hoc est, ut *ab cub.* ad *AB cub.* Sed pressio qua quadratum *DB* urget Fluidum inclusum, est ad pressionem qua quadratum *DP* urget idem Fluidum, ut quadratum *DB*, ad quadratum *DP*, hoc est,ut *AB, quad.* ad *ab quad.* Ergo, ex æquo, pressio qua latus *DB* urget Fluidum, est ad pressionem qua latus *db* urget Fluidum, ut *ab* ad *AB*. Planis *FGH*, *fgb*, per media cuborum ductis, distinguatur Fluidum in duas partes, & hæ se mutuo prement iisdem viribus,quibus premuntur a planis *AC*, *ac*, hoc est, in proportione *ab* ad *AB*: adeoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eadem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana *FGH*, *fgb* exercent in omnes,



nes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum *FGH* in cubo majore, sunt ad vires quas singulæ exercent in singulas secundum planum *fgh* in cubo minore ut *ab* ad *AB*, hoc est, reciproce ut distantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versa, si vires particularum singularum sunt reciproce ut distantiæ, id est, reciproce ut cuborum latera *AB*, *ab*; summæ virium erunt in eadem ratione, & pressiones laterum *DB*, *db* ut summæ virium; & pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *DB* ut *ab quad.* ad *AB quad.* Et, ex æquo, pressio quadrati *DP* ad pressionem lateris *db* ut *ab cub.* ad *AB cub.* id est, vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciproce in duplicata ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si vires centrifugæ sint reciproce in triplicata vel quadruplicata ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantia, & E pro densitate Fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciproce ut distantiæ dignitas qualibet D^n, cujus index est numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index est numerus $n+2$: & contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum Viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longe ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus Magneticis. Horum Virtus attractiva terminatur fere in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in lamina fere terminatur. Nam corpora ulteriora non tam a Magnete quam a lamina trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugiant alias sui generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujusmodi particulis componentur Fluida de quibus actum est in hac Propositione. Quod si particulæ cujusque virtus in infinitum propagetur, opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris quantitatis Fluidi. An vero Fluida Elastica ex particulis se mutuo fugantibus constent, Quæstio Physica est. Nos proprietatem Fluidorum ex ejusmodi particulis constantium Mathematice demonstravimus, ut Philosophis ansam præbeamus Quæstionem illam tractandi.

SECTIO

De Motu Corporum,

SECTIO VI.

De Motu & Resistentia Corporum Funependulorum.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oscillationum a centro suspensionis æqualiter distant, sunt in ratione composita ex ratione ponderum & ratione duplicata temporum oscillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in data materia dato tempore generare potest, est ut vis & tempus directe, & materia inverse. Quo major est vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus Legem secundam manifestum est. Jam vero si Pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis a perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cum tempora quibus corpora describunt singulas arcuum partes correspondentes, sint ut tempora oscillationum totarum, erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directe & quantitates materiæ reciproce: adeoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directe & velocitates reciproce. Sed velocitates reciproce sunt ut tempora, atque adeo tempora directe & velocitates reciproce sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est, ut pondera & quadrata temporum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciproce ut quadrata temporum.

Corol.

Corol. 4. Unde cum quadrata temporum, cæteris paribus, ſint ut longitudines pendulorum; ſi & tempora & quantitates materiæ æqualia ſunt, pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et univerſaliter, quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus & quadratum temporis directe, & longitudo penduli inverſe.

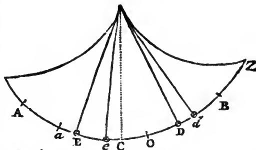
Corol. 6. Sed & in Medio non reſiſtente quantitas materiæ pendulæ eſt ut pondus comparativum & quadratum temporis directe & longitudo penduli inverſe. Nam pondus comparativum eſt vis motrix corporis in Medio quovis gravi, ut ſupra explicui; adeoque idem præſtat in tali Medio non reſiſtente atque pondus abſolutum in vacuo.

Corol. 7. Et hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter ſe, quoad quantitatem materiæ in ſingulis; tum comparandi pondera ejuſdem corporis in diverſis locis, ad cognoſcendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratiſſimis inveni ſemper quantitatem materiæ in corporibus ſingulis eorum ponderi proportionalem eſſe.

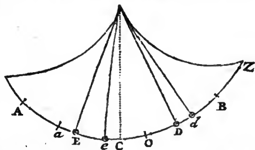
PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora Funependula quibus, in Medio quovis, reſiſtitur in ratione momentorum temporis, & corpora Funependula quæ in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente moventur, oſcillationes in Cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales ſimul deſcribunt.

Sit AB Cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in Medio non reſiſtente oſcillando deſcribit. Biſecetur idem in C, ita ut C ſit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix qua corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut longitudo arcus CD vel Cd vel CE. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum reſiſtentia ſit ut momentum temporis, adeoque detur, exponatur



tur eadem per datam arcus Cycloidis partem *CO*, & sumatur arcus *Od* in ratione ad arcum *CD* quam habet arcus *OB* ad arcum *CB*: & vis qua corpus in *d* urgetur in Medio resistente, cum sit excessus vis *Cd* supra resistentiam *CO*, exponetur per arcum *Od*, adeoque erit ad vim qua corpus *D* urgetur in Medio non resistente, in loco *D*, ut arcus *Od* ad arcum *CD*; & propterea etiam in loco *B* ut arcus *OB* ad arcum *CB*. Proinde si corpora duo, *D*, *d* exeant de loco *B*, & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus *CB* & *OB*, erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eadem ratione. Sunto arcus illi *BD* & *Bd*, & arcus reliqui *CD*, *Od* erunt in eadem ratione. Proinde vires, ipsis *CD*, *Od* proportionales, manebunt in eadem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eadem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui *CD*, *Od* semper erunt ut arcus toti *CB*, *OB*, & propterea arcus illi reliqui simul describentur. Quare corpora duo *D*, *d* simul pervenient ad loca *C* & *O*, alterum quidem in Medio non resistente ad locum *C*,



& alterum in Medio resistente ad locum *O*. Cum autem velocitates in *C* & *O* sint ut arcus *CB*, *OB*; erunt arcus quos corpora ulterius pergendo simul describunt, in eadem ratione. Sunto illi *CE* & *Oe*. Vis qua corpus *D* in Medio non resistente retardatur in *E* est ut *CE*, & vis qua corpus *d* in Medio resistente retardatur in *e* est ut summa vis *Ce* & resistentiæ *CO*, id est ut *Oe*; ideoque vires, quibus corpora retardantur, sunt ut arcubus *CE*, *Oe* proportionales arcus *CB*, *OB*; proindeque velocitates, in data illa ratione retardatæ, manent in eadem illa data ratione. Velocitates igitur & arcus iisdem descripti semper sunt ad invicem in data illa ratione arcuum *CB* & *OB*; & propterea si sumantur arcus toti *AB*, *aB* in eadem ratione, corpora *D*, *d* simul describent hos arcus, & in locis *A* & *a* motum omnem simul amittent. Isochronæ sunt igitur oscillationes totæ, & arcubus totis *BA*, *Ba* proportionales sunt arcuum partes quælibet *BD*, *Bd* vel *BE*, *Be* quæ simul describuntur. *Q. E. D.*

Corol.

Corol. Igitur motus velocissimus in Medio resistente non incidit in punctum infimum *C*, sed reperitur in puncto illo *O*, quo arcus totus descriptus *aB* bisecatur. Et corpus subinde pergendo ad *a*, iisdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in descensu suo a *B* ad *O*.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

Corporum Funependulorum quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in Cycloide sunt Isochronæ.

Nam si corpora duo, a centris suspensionum æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus toti: resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus a gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eadem arcuum ratione, cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eadem ratione. Sed in principio motus, ubi corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si Corporibus Funependulis resistitur in duplicata ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in Medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ Medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales, quam proxime.

Nam pendulis æqualibus in Medio resistente describantur arcus inæquales, A, B; & resistentia corporis in arcu A, erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B, in duplicata ratione velocitatum, id est, ut AA ad BB, quam proxime. Si resi-

ſtentia in arcu B eſſet ad reſiſtentiam in arcu A ut AB ad AA; tempora in arcubus A & B forent æqualia, per Propoſitionem ſuperiorem. Ideoque reſiſtentia AA in arcu A, vel AB in arcu B, efficit exceſſum temporis in arcu A ſupra tempus in Medio non reſiſtente: & reſiſtentia BB efficit exceſſum temporis in arcu B ſupra tempus in Medio non reſiſtente. Sunt autem exceſſus illi ut vires efficientes AB & BB quam proxime, id eſt, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol 1. Hinc ex oſcillationum temporibus, in Medio reſiſtente, in arcubus inæqualibus factarum, cognoſci poſſunt tempora oſcillationum in ejuſdem gravitatis ſpecificæ Medio non reſiſtente. Nam differentia temporum erit ad exceſſum temporis in arcu minore ſupra tempus in Medio non reſiſtente, ut differentia arcuum ad arcum minorem.

Corol. 2. Oſcillationes breviores ſunt magis Iſochronæ, & breviſſimæ iiſdem temporibus peraguntur ac in Medio non reſiſtente, quam proxime. Earum vero quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora ſunt paulo majora, propterea quod reſiſtentia in deſcenſu corporis qua tempus producitur, major ſit pro ratione longitudinis in deſcenſu deſcriptæ, quam reſiſtentia in aſcenſu ſubſequente qua tempus contrahitur. Sed & tempus oſcillationum tam brevium quam longarum nonnihil produci videtur per motum Medii. Nam corporibus tardeſcentibus paulo minus reſiſtitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulo magis quam iis quæ uniformiter progrediuntur: id adeo quia Medium, eo quem a corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore caſu magis agitatur; in poſteriore minus; ac proinde magis vel minus cum corporibus motis conſpirat. Pendulis igitur in deſcenſu magis reſiſtit, in aſcenſu minus quam pro ratione velocitatis, & ex utraque cauſa tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si Corpori Funependulo in Cycloide oſcillanti reſiſtitur in ratione momentorum temporis, erit ejus reſiſtentia ad vim gravitatis ut exceſſus arcus deſcenſu toto deſcripti ſupra arcum aſcenſu ſubſequente deſcriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

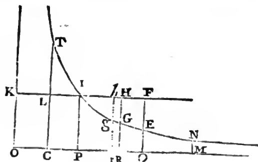
Deſignet *BC* arcum deſcenſu deſcriptum, *Ca* arcum aſcenſu deſcriptum, & *Aa* differentiam arcuum: & ſtantibus quæ in Propoſitione

sitione xxv. constructa & demonstrata sunt, erit vis qua corpus oscillans urgetur in loco quovis D, ad vim resistentiæ ut arcus CD ad arcum CO, qui semissis est differentiæ illius Aa. Ideoque vis qua corpus oscillans urgetur in Cycloidis principio seu puncto altissimo, id est, vis gravitatis, erit ad resistentiam ut arcus Cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum C ad arcum CO; id est (si arcus duplicentur) ut Cycloidis totius arcus, seu dupla penduli longitudo, ad arcum Aa. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod Corpori in Cycloide oscillanti resistitur in duplicata ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit Ba (Fig. Prop. xxv.) arcus oscillatione integra descriptus, sitque C infimum Cycloidis punctum, & CZ semissis arcus Cycloidis totius, longitudini Penduli æqualis; & quæratur resistentia cor-



poris in loco quovis D. Secetur recta infinita OQ in punctis O, C, P, Q, ea lege ut (si erigantur perpendicula OK, CT, PI, QE, centroque O & Asymptotis OK, OQ describatur Hyperbola $TIGE$ secans perpendicula CT, PI, QE in T, I & E, & per punctum I agatur KF parallela Asymptoto OQ occurrens Asymptoto OK in K, & perpendiculis CT & QE in L & F) fuerit area Hyperbolica $PIEQ$ ad aream Hyperbolicam $PITC$ ut arcus BC descensu corporis descriptus ad arcum Ca ascensu descriptum, & area IEF ad

 aream

aream ILT ut OQ ad OC. Dein perpendiculo MN abscindatur area Hyperbolica $PINM$ quæ sit ad aream Hyperbolicam $PIEQ$ ut arcus CZ ad arcum BC descensu descriptum. Et si perpendiculo RG abscindatur area Hyperbolica $PIGR$, quæ sit ad aream $PIEQ$ ut arcus quilibet CD ad arcum BC descensu toto descriptum: erit resistentia in loco D ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ ad aream $PIENM$.

Nam cum vires a gravitate oriundæ quibus corpus in locis Z, B, D, a urgetur, sint ut arcus CZ, CB, CD, Ca, & arcus illi sint ut areæ $PINM$, $PIEQ$, $PIGR$, $PITC$; exponantur tum arcus tum vires per has areas respective. Sit insuper Dd spatium quam minimum a corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam $RGgr$ parallelis RG, rg comprehensam; & producatur rg ad h, ut sint $GHhg$, & $RGgr$ contemporanea arearum IGH, $PIGR$ decrementa. Et areæ $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ incrementum $GHhg-\frac{Rr}{OQ}IEF$, seu $Rr\times HG-\frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ seu $Rr\times RG$, ut $HG-\frac{IEF}{OQ}$ ad RG; adeoque ut $OR\times HG-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR\times GR$ seu $OP\times PI$, hoc est (ob æqualia $OR\times HG$, $OR\times HR-OR\times GR$, $ORHK-OPIK$, $PIHR$ & $PIGR+IGH$) ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ dicatur

dicatur Y, atque areæ *PIGR* decrementum *RGgr* detur, erit incrementum areæ Y ut *PIGR*—Y.

Quod si V designet vim a gravitate oriundam, arcui describendo *CD* proportionalem, qua corpus urgetur in *D*: & R pro resistentia ponatur: erit V—R vis tota qua corpus urgetur in *D*. Est itaque incrementum velocitatis ut V—R & particula illa temporis in qua factum est conjunctim: Sed & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directe & particula eadem temporis inverse. Unde, cum resistentia (per Hypothesin) sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (per Lem. II.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id est, ut momentum spatii & V—R conjunctim; atque adeo, si momentum spatii detur, ut V—R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens *PIGR*, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut *PIGR*—*Z*.

Igitur area *PIGR* per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione *PIGR*—Y, & area *Z* in ratione *PIGR*—*Z*. Et propterea si areæ Y & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id adeo quia si resistentia Z augeatur, velocitas una cum arcu illo *Ca*, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis una cum resistentia cessat propius accedente ad punctum *C*, resistentia citius evanescet quam area Y. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur.

Jam vero area Z incipit definitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio & fine motus, ubi arcus *CD*, *CD* arcubus *CB* & *Ca* æquantur, adeoque ubi recta *RG* incidit in rectas *QE* & *CT*. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ incipit definitque ubi nulla est, adeoque ubi $\frac{OR}{OQ}IEF$ & IGH æqualia sunt: hoc est (per constructionem) ubi recta *RG* incidit in rectas *QE* & *CT*. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream *PINM* per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol.

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ} IEF$ ad aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - Y$) evadit nullum.

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicata ratione resistentiæ, & ipso motus initio æquatur velocitati corporis in eadem Cycloide absque omni resistentia oscillantis.

Cæterum ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc Propositionem inveniendæ sunt, visum est Propositionem sequentem subjungere, quæ & generalior sit & ad usus Philosophicos abunde satis accurata.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta aB *æqualis sit Cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* DK, *quæ sint ad longitudinem Penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum, & arcum ascensu toto subsequente descriptum, ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit areæ* BKaB *a perpendiculis omnibus* DK *occupatæ.*

Exponatur enim tum Cycloidis arcus, oscillatione integra descriptus, per rectam illam sibi æqualem aB, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem AB. Bisecetur AB in C, & punctum C repræsentabit infimum Cycloidis punctum, & erit CD ut vis a gravitate oriunda, qua corpus in D secundum tangentem Cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem Penduli quam habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem CD, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & si in DE capiatur DK in ea ratione ad longitudinem penduli

penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit DK exponens resistentiæ. Centro C & intervallo CA vel CB construatur Semicirculus $BEeA$. Describat autem corpus tempore quam minimo spatium Dd, & erectis perpendiculis DE, de circumferentiæ occurrentibus in E & e, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo a puncto B, acquireret in locis D & d. Patet hoc per Prop. LII. Lib. I. Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa DE, de; sitque DF velocitas quam acquirit in D cadendo de B in Medio resistente. Et si centro C & intervallo CF describatur Circulus FfM occurrens rectis de & AB in f & M, erit M locus ad quem deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & df velocitas quam acquireret in d. Unde etiam si Fg designet velocitatis momentum quod corpus D, describendo spatium quam minimum Dd, ex resistentia Medii amittit; & sumatur CN æqualis Cg: erit N locus ad quem corpus deinceps absque ulteriore resistentia ascenderet, & MN erit decrementum ascensus ex velocitatis illius amissione oriundum. Ad df demittatur perpendiculum Fm, & velocitatis DF decrementum Fg a resistentia DK genitum, erit ad velocitatis ejusdem incrementum fm a vi CD genitum, ut vis generans DK ad vim generantem CD. Sed & ob similia triangula Fmf, Fhg, FDC, est fm ad Fm seu Dd, ut CD ad DF; & ex æquo Fg ad Dd ut DK ad DF. Item Fh ad Fg ut DF ad CF; & ex æquo perturbate, Fh seu MN ad Dd ut DK ad CF seu CM; ideoque summa omnium $MN \times CM$ æqualis erit summæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile M erigi semper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu descriptum sive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ æquabitur summæ omnium $MN \times CM$, adeoque summæ omnium $Dd \times DK$, id est, areæ $BKkVTa$. Q. E. D.

Corol. Hinc ex lege resistentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa, colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proxime.

Nam si uniformis sit resistentia DK, Figura $aBKkT$ rectangulum erit sub Ba & DK; & inde rectangulum sub $\frac{1}{2}$ Ba & Aa erit æquale rectangulo sub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2}$ Aa. Quare cum DK sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2}$ Aa ad longitudinem Penduli; omnino ut in Prop. XXVIII. demonstratum est.

Si resistentia sit ut velocitas, Figura $aBKkT$ Ellipsis erit quam proxime. Nam si corpus, in Medio non resistente, oscillatione integra describeret longitudinem BA, velocitas in loco quovis D foret ut Circuli diametro AB descripti ordinatim applicata DE. Proinde cum Ba in Medio resistente, & BA in Medio non resistente, æqualibus circiter temporibus describantur; adeoque velocitates in singulis ipsius Ba punctis, sint quam proxime ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis BA, ut est Ba ad BA; erit velocitas DK in Medio resistente ut Circuli vel Ellipseos super diametro Ba descripti ordinatim applicata; adeoque Figura $BKVTa$ Ellipsis, quam proxime. Cum resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit OV exponens resistentiæ in puncto Medio O; & Ellipsis $aBRVS$, centro O, semiaxibus OB, OV descripta, Figuram $aBKVT$, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproxime. Est igitur $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut area Ellipseos hujus ad $OV \times BO$: id est, Aa ad OV ut area semicirculi ad quadratum radii, sive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11}$ Aa ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia DK sit in duplicata ratione velocitatis, Figura $BKVTa$ Parabola erit verticem habens V & axem OV, ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}$ Ba & OV quam proxime. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}$ Ba & Aa æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}$ Ba & OV, adeoque OV æqualis $\frac{3}{4}$ Aa: & propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ Aa ad longitudinem Penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abunde satis accuratas esse censeo. Nam cum Ellipsis vel Parabola $BRVSa$ congruat cum

cum Figura $BKVTa$ in puncto medio V, hæc si ad partem alterutram BRV vel VSa excedit Figuram illam, deficiet ab eadem ad partem alteram, & sic eidem æquabitur proxime.

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

Si Corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in data ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eadem ratione.

Oritur enim differentia illa ex retardatione Penduli per resistentiam Medii, adeoque est ut retardatio tota eique proportionalis resistentia retardans. In superiore Propositione rectangulum sub recta $\frac{1}{2}\,aB$ & arcuum illorum CB, Ca differentia Aa, æqualis erat areæ BKT. Et area illa, si maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK; hoc est, in ratione resistentiæ, adeoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2}\,aB$ est ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia arcuum in eodem Medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicata ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicata ratione arcus totius: & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicata vel alia quavis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcus totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicata, differentia erit partim in ratione arcus totius & partim in ejus ratione duplicata: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcus.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successive describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcus descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his Propoſitionibus, per oſcillationes Pendulorum in Mediis quibuſcunque, invenire licet reſiſtentiam Mediorum. Aeris vero reſiſtentiam inveſtigavi per Experimenta ſequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinenſium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco ſatis firmo ſuſpendi, ita ut inter uncum & centrum oſcillationis Globi diſtantia eſſet pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & uncia una a centro ſuſpenſionis diſtans; & e regione puncti illius collocavi Regulam in digitos diſtinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum a Pendulo deſcriptas. Deinde numeravi oſcillationes quibus Globus octavam motus ſui partem amitteret. Si pendulum deducebatur a perpendiculo ad diſtantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto ſuo deſcenſu deſcriberet arcum duorum digitorum, totaque oſcillatione prima, ex deſcenſu & aſcenſu ſubſequente compoſita, arcum digitorum fere quatuor: idem oſcillationibus 164 amiſit octavam motus ſui partem, ſic ut ultimo ſuo aſcenſu deſcriberet arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 121, ita ut aſcenſu ultimo deſcriberet arcum digitorum $3\frac{3}{8}$. Si primo deſcenſu deſcripſit arcum digitorum octo, ſexdecim, triginta duorum vel ſexaginta quatuor; amiſit octavam motus partem oſcillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, reſpective. Igitur differentia inter arcus deſcenſu primo & aſcenſu ultimo deſcriptos, erat in caſu primo, ſecundo, tertio, quarto, quinto, ſexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 reſpective. Dividantur eæ differentiæ per numerum oſcillationum in caſu unoquoque, & in oſcillatione una mediocri, qua arcus digitorum $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 deſcriptus fuit, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti reſpective. Hæ autem in majoribus oſcillationibus ſunt in duplicata ratione arcuum deſcriptorum quam proxime, in minoribus vero paulo majores quam in ea ratione: & propterea (per Corol. 2. Prop. XXXI Libri hujus) reſiſtentia Globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicata ratione velocitatis quam proxime; ubi tardius, paulo major quam in ea ratione.

Deſignet

Designet jam V velocitatem maximam in oscillatione quavis, sintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum sit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Cum velocitates maximæ sint in Cycloide ut semisses arcuum oscillando descriptorum, in Circulo vero ut semissium arcuum illorum chordæ, adeoque paribus arcubus majores sint in Cycloide quam in Circulo, in ratione semissium arcuum ad eorundem chordas; tempora autem in Circulo sint majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciproca; patet arcuum differentias (quæ sunt ut resistentia & quadratum temporis conjunctim) easdem fore, quamproxime, in utraque Curva: deberent enim differentiæ illæ in Cycloide augeri, una cum resistentia, in duplicata circiter ratione arcus ad chordam, ob velocitatem in ratione illa simplici auctam; & diminui, una cum quadrato temporis, in eadem duplicata ratione. Itaque ut reductio fiat ad Cycloidem, eædem sumendæ sunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in Circulo observatæ, velocitates vero maximæ ponendæ sunt arcubus dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto & sexto numeros 1, 4 & 16 pro V, & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in casu secundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in casu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in casu sexto. Et ex his æquationibus, per debitam collationem & reductionem Analyticam, fit $A = 0,0000916$, $B = 0,0010847$, & $C = 0,0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0,0000916\,V + 0,0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0029558\,V^2$: & propterea cum (per Corollarium Propositionis XXX) resistentia Globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem Penduli; si pro A, B & C scribantur numeri inventi, fiet resistentia Globi ad ejus pondus, ut $0,0000583\,V + 0,0007546\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0022169\,V^2$ ad longitudinem Penduli inter centrum suspensionis & Regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cum V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus Globi in casu secundo ut 0,0030298 ad 121, in quarto ut 0,0417402 ad 121, in sexto ut 0,61675 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cum radius esset 121 digitorum, & longitudo Penduli inter punctum suspensionis

& centrum Globi eſſet 126 digitorum, arcus quem centrum Globi deſcripſit erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oſcillantis velocitas maxima, ob reſiſtentiam Aeris, non incidit in punctum infimum arcus deſcripti, ſed in medio fere loco arcus totius verſatur: hæc eadem erit circiter ac ſi Globus deſcenſu ſuo toto in Medio non reſiſtente deſcriberet arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{3}{62}$, idque in Cycloide, ad quam motum Penduli ſupra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam Globus, perpendiculariter cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem arcus illius ſinui verſo æqualem, acquirere poſſet. Eſt autem ſinus ille verſus in Cycloide ad arcum iſtum $62\frac{3}{62}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipſa eſt quam corpus cadendo & caſu ſuo ſpatium 15, 278 digitorum deſcribendo acquirere poſſet. Tali igitur cum velocitate Globus reſiſtentiam patitur, quæ ſit ad ejus pondus ut 0, 61675 ad 121, vel (ſi reſiſtentiæ pars illa ſola ſpectetur quæ eſt in velocitatis ratione duplicata) ut 0, 56752 ad 121.

Experimento autem Hydroſtatico inveni quod pondus Globi hujus lignei eſſet ad pondus Globi aquei magnitudinis ejuſdem, ut 55 ad 97: & propterea cum 121 ſit ad 213, 4 in eadem ratione, erit reſiſtentia Globi aquei præfata cum velocitate progredientis ad ipſius pondus, ut 0, 56752 ad 213, 4 id eſt, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cum pondus Globi aquei, quo tempore Globus cum velocitate uniformiter continuata deſcribat longitudinem digitorum 30, 556 velocitatem illam omnem in Globo cadente generare poſſet, manifeſtum eſt quod vis reſiſtentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere poſſet velocitatem minorem in ratione 1 ad 376 ', hoc eſt, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$. Et propterea quo tempore Globus, ea cum velocitate uniformiter continuata, longitudinem ſemidiametri ſuæ, ſeu digitorum $3\frac{7}{16}$, deſcribere poſſet, eodem amitteret motus ſui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oſcillationes quibus Pendulum quartam motus ſui partem amiſit. In ſequente Tabula numeri ſupremi denotant longitudinem arcus deſcenſu primo deſcripti, in digitis & partibus digiti expreſſam: numeri medii ſignificant longitudinem arcus aſcenſu ultimo deſcripti; & loco infimo ſtant numeri oſcillationum. Experimentum deſcripſi tanquam magis accuratum quam cum motus pars tantum octava amitteretur. Calculum tentet qui volet.

Deſcen-

Descensus primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea Globum plumbeum, diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$, suspendi filo eodem, sic ut inter centrum Globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motus pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motus totius cessavit; secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30
Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In Tabula priore seligendo ex observationibus tertiam, quintam & septimam, & exponendo velocitates maximas in his observationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 respective, & generaliter per quantitatem V ut supra: emerget in observatione tertia $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quinta $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, in septima $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Hæ vero æquationes reductæ dant $A = 0,001414$, $B = 0,000297$, $C = 0.000879$. Et inde prodit resistentia Globi cum velocitate V moti, in ea ratione ad pondus suum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0,0009V + 0,000207V^{\frac{3}{2}} + 0,000659V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et si spectemus eam solummodo resistentiæ partem quæ est in duplicata ratione velocitatis, hæc erit ad pondus Globi ut $0,000659V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars resistentiæ in experimento primo ad pondus Globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$, ut $0,002217V^2$ ad 121: & inde fit resistentia Globi lignei ad resistentiam Globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in 0,002217 ad $26\frac{1}{4}$ in 0,000659, id est, ut $7\frac{3}{8}$ ad 1. Diametri Globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproxime. Ergo resistentiæ Globorum æquivelocium erant in minore ratione quam duplicata diametrorum. At nondum consideravimus resi-

stentiam

ſtentiam fili, quæ certe permagna erat, ac de pendulorum inventa reſiſtentia ſubduci debet. Hanc accurate definire non potui, ſed majorem tamen inveni quam partem tertiam reſiſtentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod reſiſtentiæ Globorum, dempta fili reſiſtentia, ſunt quam proxime in duplicata ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, ſeu $10\frac{1}{2}$ ad 1, non longe abeſt a diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cum reſiſtentia fili in Globis majoribus minoris ſit momenti, tentavi etiam experimentum in Globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$ inter punctum ſuſpenſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu a nodo deſcriptus, 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus, 28. dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus, 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri a nodo deſcriptus, ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri a centro Globi deſcriptum: & ita differentia $\frac{2}{5}$ ad differentiam novam 0, 4475. Si longitudo penduli, manente longitudine arcus deſcripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oſcillationis augeretur & velocitas penduli diminueretur in ratione illa ſubduplicata, maneret vero arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum differentia 0, 4475. Deinde ſi arcus deſcriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia illa 0,4475 augeretur in duplicata illa ratione, adeoque evaderet 1, 5295. Hæc ita ſe haberent, ex hypotheſi quod reſiſtentia Penduli eſſet in duplicata illa ratione velocitatis. Ergo ſi pendulum deſcriberet arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis eſſet 126 digitorum, differentia arcuum deſcenſu & ſubſequente aſcenſu deſcriptorum foret 1,5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus Globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rurſus ubi pendulum ſuperius ex Globo ligneo conſtructum, centro oſcillationis, quod a puncto ſuſpenſionis digitos 126 diſtabat, deſcribebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum deſcenſu & aſcenſu deſcriptum fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta in pondus Globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49, 396. Duxi autem differentias haſce in pondera Globorum ut invenirem eorum reſiſtentias. Nam differentiæ oriuntur

untur ex resistentiis, suntque ut resistentiæ directe & pondera inverse. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318, 136 & 49, 396. Pars autem resistentiæ Globi minoris, quæ est in duplicata ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam, ut 0, 56752 ad 0, 61675, id est, ut 45, 453 ad 49, 396; & pars resistentiæ Globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; adeoque partes illæ sunt ut 318, 136 & 45,453 quamproxime, id est, ut 7 & 1. Sunt autem Globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7, 438 & 1, id est, ut Globorum resistentiæ 7 & 1 quamproxime. Differentia rationum haud major est quam quæ ex fili resistentia oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus Globis, ut quadrata velocitatum; sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum Globorum.

Cæterum Globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfecte Sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratia neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minime sollicitus. Optarim itaque (cum demonstratio Vacui ex his dependeat) ut experimenta cum Globis & pluribus & majoribus & magis accuratis tentarentur. Si Globi sumantur in proportione Geometrica, puta quorum diametri sint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progressione experimentorum colligetur quid in Globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam vero conferendo resistentias diversorum Fluidorum inter se tentavi sequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aqua fontana, fecique ut immersa pendula in medio aquæ oscillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum, movebatur ut in Tabula sequente descripsimus, existente videlicet longitudine penduli a puncto suspensionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oscillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oscillationum in aere	$85\frac{1}{2}$		287	535					

De Motu Corporum.

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aqua amissi sunt. Erant quidem oscillationes in aere paulo celeriores quam in aqua. At si oscillationes in aqua in ea ratione accelerarentur ut motus pendulorum in Medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aqua, quibus motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eadem ratione illa duplicata. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aqua oscillationibus $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; ideoque resistentia penduli in aqua est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum a Globo, in Aere cum velocitate maxima V moto; & cum velocitas maxima, in casu columnæ quartæ, sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum, in casu columnæ quartæ, ad differentiam in casu columnæ primæ ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{3}{14}$ & $A = 21\frac{2}{7}$: atque adeo resistentia, cum sit ut $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ seu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco resistentia penduli in aqua est ad resistentiæ partem illam in aere quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{5}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aqua oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aere oscillantis resistentia illa quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate, in aqua oscillantis, ut 800 vel 900 ad 1 circiter; hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aqua, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis pluf-

plusquam duplicata. Ejus rei causam investigando, in hanc incidi, quod Arca nimis angusta esset pro magnitudine Globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustia sua nimis impediebat. Nam si Globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Id tentabam construendo pendulum ex Globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aqua, superior & major proxime supra aquam filo affixus esset, & in Aere oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut in Tabula sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum	$3\frac{1}{3}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{5}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias Mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter Globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proxime supra Mercurium affixus erat Globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aqua communi, ut pendulo in Fluido utroque successive oscillante, invenirem proportionem resistentiarum: & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ, ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi Globum pendulum paulo majorem adhibebam, puta cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argenti vivi in ea ratione ad resistentiam aquæ quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis Vas nimis angustum fuit pro magnitudine Globi immersi. Ampliato Globo, deberet etiam Vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum Metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati Fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proxime.

Non dico accurate. Nam Fluida tenaciora, pari densitate, procul-

 dubio

dubio magis resistunt quam liquidiora, ut Oleum frigidum quam calidum, calidum quam aqua pluvialis, aqua quam Spiritus Vini. Verum in liquoribus qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in Aere, in Aqua seu dulci seu salsa, in Spiritibus Vini, Terebinthi & Salium, in Oleo a fæcibus per destillationem liberato & calefacto, Oleoque Vitrioli & Mercurio, ac Metallis liquefactis, & siqui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrime in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accurate obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Denique cum receptissima Philosophorum ætatis hujus opinio sit, Medium quoddam æthereum & longe subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrime permeet; a tali autem Medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externa superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis, ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concava, ut annulus arcu suo superiore aciei innixus liberrime moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam a perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare, ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accurate notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissime invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, una cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. (Nam filum tensum dimidio ponderis sui pendulum a perpendiculo digressum semper urget.) Huic ponderi addebam pondus Aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat qua pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum

tallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam pyxidis vacuæ quam 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insita pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque adeo completis semper oscillationibus 78 ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externa, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit 78 B resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: adeoque pyxidis vacuæ resistentia tota $A+B$ erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam $A+78B$ ut 77 ad 78, & divisim $A+B$ ad $77B$, ut 77 ad 1, indeque $A+B$ ad B ut 77×77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externa superficie, & amplius. Sic vero disputamus ex Hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab alia aliqua causa latente oriatur, sed ab actione sola Fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quæ memoria exciderunt, omittere compulsus sum. Nam omnia denuo tentare non vacat. Prima vice, cum unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quærendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

SECTIO VII.

De Motu Fluidorum & Resistentia Projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum Systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno Systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, (eæ inter se quæ in uno sunt Systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt Systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant vel fugent se mutuo, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe: dico quod Systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri.

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: puta si particulæ unius Systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales Figurarum similium partes a particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi Systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem inceptorum motuum, pergent similiter moveri usque donec sibi mutuo occurrant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter in lineis rectis per motus Leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inverse & quadrata velocitatum directe; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per Legum Corollarium secun-

secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: & propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. Hæc ita se habebunt per Corol. 1, & 8. Prop. IV. Lib. I. si modo centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter Systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque ad occursus suos primos, & propterea similes occursus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se, donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad Systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum Systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et si similes & similiter positæ Systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque Systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcunque moveri incipiant: hæ similes in reliquis Systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque adeo spatia diametris suis proportionalia describere.

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iisdem positis, dico quod Systematum partes majores, resistunt in ratione composita ex duplicata ratione velocitatum suarum & duplicata ratione diametrorum & ratione densitatis partium Systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ Systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris

Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices a quibus oriuntur, id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (per Hypothesin) ut quadrata velocitatum directe & distantiæ particularum correspondentium inverse & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directe: ideoque (cum distantiæ particularum Systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in Systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum) resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium Systematum. *Q. E. D.* Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directe, & spatia inter earum reflexiones inverse. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si Systemata illa sint Fluida duo Elastica ad modum Aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ Fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inverse, & quadrata velocitatum directe: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in Fluidis, & spatia similia ac diametris suis proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem Fluido projectile velox resistentiam patitur quæ est in duplicata ratione velocitatis quamproxime. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant, augerentur in duplicata ratione velocitatis, resistentia foret in eadem ratione duplicata accurate: ideoque in Medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicata ratione velocitatis accurate. Sunto igitur Media tria A, B, C ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispo-

dispositis constantia. Partes Mediorum *A* & *B* fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut *T* & *V*, illæ Medii *C* ejusmodi viribus omnino destituantur. Et si corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his Mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; sitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G*, in subduplicata ratione virium *T* ad vires *V*: resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *E*, & resistentia corporis *F* ad resistentiam corporis *G*, in velocitatum ratione duplicata; & propterea resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *F* ut resistentia corporis *E* ad resistentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quacunque, ac diminuendo vires particularum Medii *B* in eadem ratione duplicata, accedet Medium *B* ad formam & conditionem Medii *C* pro lubitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium *E* & *G* in his Mediis, perpetuo accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cum resistentiæ corporum *D* & *F* sint ad invicem ut resistentiæ corporum *E* & *G*, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur *D* & *F*, ubi velocissime moventur, resistentiæ sunt æquales quam proxime: & propterea cum resistentia corporis *F* sit in duplicata ratione velocitatis, erit resistentia corporis *D* in eadem ratione quam proxime.

Corol. 3. Igitur corporis in Fluido quovis Elastico velocissime moti eadem fere est resistentia ac si partes Fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo Fluidi vis Elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur & velocitas adeo magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cum resistentiæ similium & æquivelocium corporum in Medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium & celerrime motorum corporum resistentiæ in Fluido Elastico ut quadrata diametrorum quam proxime.

Corol. 5. Et cum corpora similia, æqualia & æquivelocia, in Mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vicissim

cissim (per motus Legem tertiam) æqualem ab eadem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifestum est etiam quod in ejusdem densitatis Fluidis Elasticis, ubi velocissime moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proxime; sive Fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex Medii subtilitate resistentia projectilium celerrime motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in Fluidis, quorum vis Elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar Lanæ vel ramorum Arborum, aut ex alia quavis causa, qua motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem Medii fluiditatem, erit major quam in superioribus Corollariis.

PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

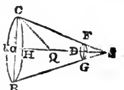
Si Globus, & Cylindrus æqualibus diametris descripti, in Medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constante, secundum plagam axis Cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia Globi duplo minor quam resistentia Cylindri.

Nam quoniam actio Medii in corpus eadem est (per Legum Corol. 5.) sive corpus in Medio quiescente moveatur, sive Medii particulæ eadem cum velocitate impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur a Medio movente. Designet igitur $ABKI$ corpus Sphæricum centro C semidiametro CA descriptum, & incidant particulæ Medii data cum velocitate in corpus illud Sphæricum, secundum rectas ipsi AC parallelas: Sitque FB ejusmodi recta. In ea capiatur LB semidiametro CB æqualis, & ducatur $B\mathcal{D}$ quæ Sphæram tangat in B. In KC & $B\mathcal{D}$ demittantur

mittantur perpendiculares BE, DL, & vis qua particula Medii, fecundum rectam FB oblique incidendo, Globum ferit in B, erit ad vim qua particula eadem Cylindrum $ONGQ$ axe ACI circa Globum defcriptum perpendiculariter feriret in b, ut LD ad LB vel BE ad BC. Rurfus efficacia hujus vis ad movendum Globum fecundum incidentiæ fuæ plagam FB vel AC, eft ad ejufdem efficaciam ad movendum Globum fecundum plagam determinationis fuæ, id eft, fecundum plagam rectæ BC qua Globum directe urget, ut BE ad BC. Et conjunctis rationibus, efficacia particulæ, in Globum fecundum rectam FB oblique incidentis, ad movendum eundem fecundum plagam incidentiæ fuæ, eft ad efficaciam particulæ ejufdem fecundum eandem rectam in Cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipfum movendum in plagam eandem, ut BE quadratum ad BC quadratum. Quare fi ad Cylindri bafem circularem NAO erigatur perpendiculum bHE, & fit bE æqualis radio AC, & bH æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit bH ad bE ut effectus particulæ in Globum ad effectum particulæ in Cylindrum. Et propterea folidum quod a rectis omnibus bH occupatur erit ad folidum quod a rectis omnibus bE occupatur, ut effectus particularum omnium in Globum ad effectum particularum omnium in Cylindrum. Sed folidum prius eft parabolois vertice C, axe CA & latere recto CA defcriptum, & folidum pofterius eft Cylindrus Paraboloidi circumfcriptus: & notum eft quod Parabolois fit femiffis Cylindri circumfcripti. Ergo vis tota Medii in Globum eft duplo minor quam ejufdem vis tota in Cylindrum. Et propterea fi particulæ Medii quiefcerent, & Cylindrus ac Globus æquali cum velocitate moverentur, foret refiftentia Globi duplo minor quam refiftentia Cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

Eadem methodo Figuræ aliæ inter fe quoad refiftentiam comparari poffunt, eæque inveniri quæ ad motus fuos in Mediis refiftentibus continuandos aptiores funt. Ut fi bafe circulari $CEBH$, quæ centro O, radio OC defcribitur, & altitudine OD, conftruendum fit fruftum Coni $CBGF$, quod omnium eadem bafi & altitudine conftructorum & fecundum plagam



 axis

axis sui versus D progredientium frustorum minime resistatur: biseca altitudinem OD in Q & produc OQ ad S ut sit QS æqualis QC, & erit S vertex Coni cujus frustum quæritur.

Unde obiter, cum angulus CSB semper sit acutus, consequens est, quod si solidum $ADBE$ convolutione figuræ Ellipticæ vel Ovalis $ADBE$ circa axem AB facta generetur, & tangatur figura generans a rectis tribus FG, GH, HI in punctis F, B & I, ea lege ut GH sit perpendicularis ad axem in puncto contactus B, & FG, HI cum eadem GH contineant angulos FGB, BHI graduum 135: solidum, quod convolutione figuræ $ADFGHIE$ circa axem eundem CB generatur, minus resistitur quam solidum prius; si modo utrumque secundum plagam axis sui AB progrediatur, & utriusque terminus B præcedat. Quam quidem propositionem in construendis Navibus non inutilem futuram esse censeo.

Quod si Figura $DNFG$ ejusmodi sit curva ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & a puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum secet in R; fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4\ BR \times GBq$: Solidum quod figuræ hujus revolutione circa axem AB facta describitur, in Medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eadem longitudine & latitudine descriptum Solidum circulare.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si Medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus & ad æquales ab invicem distantias libere dispositis constet: invenire resistentiam Globi in hoc Medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eadem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eadem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem Medio. Et ponamus quod particulæ Medii in quas Glo-

Globus vel Cylindrus incidit, vi reflexionis quam maxima resiliant. Et cum resistentia Globi (per Propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia Cylindri, & Globus sit ad Cylindrum ut duo ad tria, & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas ipsasque quam maxime reflectendo, duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: Cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui describit communicabit motum particulis qui sit ad totum Cylindri motum ut densitas Medii ad densitatem Cylindri; & Globus quo tempore totam longitudinem diametri suæ describit, communicabit motum eundem particulis; & quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit communicabit motum particulis qui sit ad totum Globi motum ut densitas Medii ad densitatem Globi. Et propterea Globus resistentiam patitur quæ sit ad vim qua totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, ut densitas Medii ad densitatem Globi.

Cas. 2. Ponamus quod particulæ Medii in Globum vel Cylindrum incidentes non reflectantur; & Cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideoque resistentiam patitur duplo minorem quam in priore casu, & resistentia Globi erit etiam duplo minor quam prius.

Cas. 3. Ponamus quod particulæ Medii vi reflexionis neque maxima neque nulla, sed mediocri aliqua resiliant a Globo; & resistentia Globi erit in eadem ratione mediocri inter resistentiam in primo casu & resistentiam in secundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si Globus & particulæ sint infinite dura, & vi omni elastica & propterea etiam vi omni reflexionis destituta: resistentia Globi erit ad vim qua totus ejus motus vel auferri possit vel generari, quo tempore Globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas Medii ad densitatem Globi.

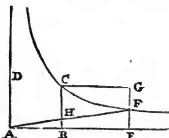
Corol. 2. Resistentia Globi, cæteris paribus, est in duplicata ratione velocitatis.

Corol. 3. Resistentia Globi, cæteris paribus, est in duplicata ratione diametri.

Corol. 4. Resistentia Globi, cæteris paribus, est ut densitas Medii.

Corol. 5. Resistentia Globi est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis & duplicata ratione diametri & ratione densitatis Medii.

Corol. 6. Et motus Globi cum ejus resistentia sic exponi potest. Sit *AB* tempus quo Globus per resistentiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad *AB* erigantur perpendicula *AD*, *BC*. Sitque *BC* motus ille totus, & per punctum *C* Asymptotis *AD*, *AB* describatur Hyperbola *CF*. Producatur *AB* ad punctum quodvis *E*. Erigatur perpendiculum *EF* Hyperbolæ occurrens in *F*. Compleatur parallelogrammum *CBEG*, & agatur *AF* ipsi *BC* occurrens in *H*. Et si Globus tempore quovis *BE*, motu suo primo *BC* uniformiter continuato, in Medio non resistente describat spatium *CBEG* per aream parallelogrammi expositum, idem in Medio resistente describet spatium *CBEF* per aream Hyperbolæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per Hyperbolæ ordinatam *EF*, amissa motus ejus parte *FG*. Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem *BH*, amissa resistentiæ parte *CH*. Patent hæc omnia per Corol. 1. Prop. v. Lib. II.



Corol. 7. Hinc si Globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M: idem Globus tempore t in Medio resistente, per resistentiam R in duplicata velocitatis ratione decrescentem, amittet motus sui M partem $\frac{tM}{T+t}$, manente parte $\frac{TM}{T+t}$, & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore t descriptum, ut Logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$. Nam area Hyperbolica *BCFE* est ad rectangulum *BCGE* in hac proportione.

Scholium.

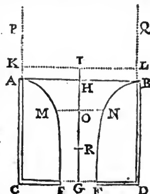
In hac Propositione exposui resistentiam & retardationem Projectilium Sphæricorum in Mediis non continuis, & ostendi quod hæc resistentia sit ad vim qua totus Globi motus vel tolli possit vel generari

generari quo tempore Globus duas tertias diametri suæ partes, velocitate uniformiter continuata describat, ut densitas Medii ad densitatem Globi, si modo Globus & particulæ Medii sint summe elastica & vi maxima reflectendi polleant: quodque hæc vis sit duplo minor ubi Globus & particulæ Medii sunt infinite dura & vi reflectendi prorsus destituta. In Mediis autem continuis qualia sunt Aqua, Oleum calidum, & Argentum vivum, in quibus Globus non incidit immediate in omnes fluidi particulas resistentiam generantes, sed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, resistentia est adhuc duplo minor. Globus utique in hujusmodi Mediis fluidissimis resistentiam patitur quæ est ad vim qua totus ejus motus vel tolli possit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas Medii ad densitatem Globi. Id quod in sequentibus conabimur ostendere.

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vase Cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit $ACDB$ vas cylindricum, AB ejus orificium superius, CD fundum horizonti parallelum, EF foramen circulare in medio fundi, G centrum foraminis, & GH axis cylindri horizonti perpendicularis. Et concipe cylindrum glaciei $APQB$ ejusdem esse latitudinis cum cavitate vasis, & axem eundem habere, & uniformi cum motu perpetuo descendere, & partes ejus quam primum attingunt superficiem AB liquescere, & in aquam conversas gravitate sua defluere in vas, & cataractam vel columnam aquæ $ABNFEM$ cadendo formare, & per foramen EF transire, idemque adæquate implere. Ea vero sit uniformis velocitas glaciei descendentis ut & aquæ contiguæ in circulo AB, quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IH acquirere potest; & jaceant IH & HG in directum, & per punctum I ducatur recta KL horizonti parallela lateribus glaciei.



ciei occurrens in K & L. Et velocitas aquæ effluentis per foramen EF ea erit quam aqua cadendo ab I & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest. Ideoque per Theoremata *Galilæi* erit IG ad IH in duplicata ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo AB, hoc est, in duplicata ratione circuli AB ad circulum EF; nam hi circuli sunt reciproce ut velocitates aquarum quæ per ipsos, eodem tempore & æquali quantitate, adæquate transeunt. De velocitate aquæ horizontem versus hic agitur. Et motus horizonti parallelus quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cum non oriatur a gravitate, nec motum horizonti perpendicularem a gravitate oriundum mutet, hic non consideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohæreant, & per cohæsionem suam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur: sed motum horizonti parallelum, a cohæsione illa oriundum, hic non consideramus.

Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis $ABNFEM$, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantum non tangat vel, quod perinde est, si tangat & per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrime & sine omni resistentia labatur; hæc defluet per foramen EF eadem velocitate ac prius, & pondus totum columnæ aquæ $ABNFEM$ impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liquescat jam glacies in vase; & effluxus aquæ quoad velocitatem, idem manebit ac prius. Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quam prius. Nam particulæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter, sed a lateribus vasis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; & cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quam in ipso foramine, existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proxime, si modo

modo diametros recte dimensus sum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur angustior, hanc laminam non fundo sed lateri vasis affixi sic, ut vena illa egrederetur secundum lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquæ plenum esset, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti a foramine quam accuratissime mensurata, prodiit partium viginti & unius quadragesimarum digiti. Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quamproxime. Per experimenta vero constat quod quantitas aquæ quæ per foramen circulare in fundo vasis factum effluit, ea est quæ, pro diametro venæ, cum velocitate prædicta effluere debet.

In sequentibus igitur, plano foraminis parallelum duci intelligatur planum aliud superius ad distantiam diametro foraminis æqualem vel paulo majorem & foramine majore pertusum, per quod utique vena cadat quæ adæquate impleat foramen inferius EF, atque adeo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio Problematis postulat quamproxime. Spatium vero quod planis duobus & vena cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio Problematis simplicior sit & magis Mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, &

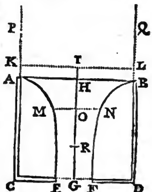
fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & e vase per foramen EF egrediebatur, motum suum perpetuo servet & glacies quietem suam, etiamsi in aquam fluidam resolvatur.

Cas. 2. Si foramen EF non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eadem cum velocitate ac prius, si modo eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore descendit ad eandem profunditatem per lineam obliquam quam per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem

 dem velocitatem acquirit in utroque casu, ut *Galilæus* demonstravit.

Cas. 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, ut intervallum inter superficies *AB* & *KL* quoad sensum evanescat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram Parabolicam efformet: ex latere recto hujus Parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aqua in vase stagnantis altitudine *HG* vel *IG* cadendo acquirere potuisset. Facto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum & altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incideret in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter a perpendiculo quod in planum illud a foramine demittebatur captam. Nam sine resistentia vena incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ Parabolicæ latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quinetiam aqua effluens, si sursum feratur, eadem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem *GH* vel *GI*, nisi quatenus ascensus ejus ab aeris resistentia aliquantulum impediatur; ac proinde ea effluit cum velocitate quam ab altitudine illa cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter, per Prop. XIX. Lib. II, & pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem & inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem qua aqua effluit, eam esse quam in hac Propositione assignavimus, non solum ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.



Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas sive figura foraminis sit circularis sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet a figura foraminis sed ab ejus altitudine infra planum *KL*.

Cas. 6. Si vasis *ABDC* pars inferior in aquam stagnantem immergatur,

mergatur, & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit GR: velocitas quacum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen EF in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IR acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minime accelerabit. Patebit etiam & hic Caſus per Experimenta, menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

Corol. 1. Hinc ſi aquæ altitudo CA producatur ad K, ut ſit AK ad CK in duplicata ratione areæ foraminis in quavis fundi parte facti, ad aream circuli AB; velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem KC acquirere poteſt.

Corol. 2. Et vis qua totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi Cylindricæ columnæ aquæ cujus baſis eſt foramen EF, & altitudo $2\,GI$ vel $2\,CK$. Nam aqua exiliens quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine GI cadendo, velocitatem ſuam qua exilit, acquirere poteſt.

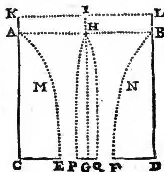
Corol. 3. Pondus aquæ totius in vaſe $ABDC$, eſt ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut ſumma circulorum AB & EF, ad duplum circulum EF. Sit enim IO media proportionalis inter IH & IG; & aqua per foramen EF egrediens, quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poſſet altitudinem IG, æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus EF, & altitudo eſt $2\,IG$, id eſt, Cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt $2\,IO$, nam circulus EF eſt ad circulum AB in ſubduplicata ratione altitudinis IH ad altitudinem IG, hoc eſt, in ſimplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta cadendo ab I deſcribere poteſt altitudinem IH, aqua egrediens æqualis erit Cylindro cujus baſis eſt circulus AB & altitudo eſt $2\,IH$: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G deſcribit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, id eſt, aqua tota in ſolido $ABNFEM$ æqualis erit differentiæ Cylindrorum, id eſt, Cylindro cujus baſis eſt AB & altitudo $2\,HO$. Et propterea aqua tota in vaſe $ABDC$ eſt ad aquam totam cadentem in ſolido $ABNFEM$ ut HG ad $2\,HO$, id eſt, ut $HO+OG$ ad $2\,HO$, ſeu $IH+IO$ ad $2\,IH$. Sed pondus aquæ totius in ſolido $ABNFEM$ in aquæ defluxum impenditur: ac proinde pon-

 dus aquæ totius in vase est ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2\,IH$, atque adeo ut summa circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

Corol. 4. Et hinc pondus aquæ totius in vase $ABDC$, est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circulorum AB & EF, ad differentiam eorundem circulorum.

Corol. 5. Et ponderis pars quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum AB & EF, ad duplum circulum minorem EF, sive ut area fundi ad duplum foramen.

Corol. 6. Ponderis autem pars qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad summam circulorum AB & EF, sive ut circulus AB ad excessum dupli circuli AB supra fundum. Nam ponderis pars qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circulorum AB & EF, ad summam eorundem circulorum, per Cor. 4; & pondus aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad differentiam circulorum AB & EF. Itaque ex æquo perturbate, ponderis pars qua sola fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus AB ad summam circulorum AB & EF vel excessum dupli circuli AB supra fundum.



Corol. 7. Si in medio foraminis EF locetur Circellus PQ centro G descriptus & horizonti parallelus; pondus aquæ quam circellus ille sustinet, majus est pondere tertiæ partis Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est GH. Sit enim $ABNFEM$ cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens GH ut supra, & congelari intelligatur aqua omnis in vase, tam in circuitu cataractæ quam supra circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum non requiritur. Et sit PHQ columna aquæ supra circellum congelata, verticem habens H & altitudinem GH. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata $AMEC$, $BNFD$ convexa est in superficie interna AME, BNF versus cataractam cadentem, sic etiam hæc columna PHQ con-

convexa erit versus cataractam, & propterea major Cono cujus basis est circellus ille PQ & altitudo GH, id est, major tertia parte Cylindri eadem base & altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere Coni seu tertiæ partis Cylindri illius majus est.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, minor est pondere duarum tertiarum partium Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est HG. Nam stantibus jam positis, describi intelligatur dimidium Sphæroidis cujus basis est circellus ille & semiaxis sive altitudo est HG. Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus Cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ PHQ cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maxime directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi PQ in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua cadendo perpetuo acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cum angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes jacebit intra dimidium Sphæroidis. Eadem vero sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem Sphæroidis sit infinite velocior quam ejus motus horizontem versus. Et quo minor est circellus PQ, eo acutior erit vertex columnæ; & circello in infinitum diminuto, angulus PHQ in infinitum diminuetur, & propterea columna jacebit intra dimidium Sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio Sphæroidis, seu duabus tertiis partibus Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo GH. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cum pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, æquale est ponderi Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} GH$ quamproxime. Nam pondus hocce est medium Arithmeticum inter pondera Coni & Hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen EF: hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est GH.

Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} GH$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$, sive ut circulus EF ad excessum circuli hujus supra semissem circelli PQ quamproxime.

LEMMA IV.

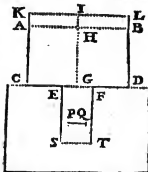
Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia ex aucta vel diminuta ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentia Circuli eadem diametro descripti & eadem velocitate secundum lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

Nam latera Cylindri motui ejus minime opponuntur: & Cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminuta, in Circulum vertitur.

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progeditur, resistentia quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, est ad vim qua totus ejus motus interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri quamproxime.

Nam si vas *ABDC* fundo suo *CD* superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem Cylindricum *EFTS* horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem Circellus *PQ* horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur *CA* ad *K*, ut sit *AK* ad *CK* in duplicata ratione quam habet excessus orificii canalis *EF* supra circellum *PQ* ad circulum *AB*: manifestum est (per Cas. 5, Cas. 6, & Cor. 1. Prop. XXXVI.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem *KC* vel *IG* acquirere potest.



Et

Et (per Cor. 10. Prop. XXXVI.) si vasis latitudo sit infinita, ut lineola HI evanescat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}$ IG, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}\,PQq$ quam proxime. Nam vis aquæ, uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quacunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & ascendat circellus in fluido undique compresso & ascensu suo cogat aquam superiorem descendere per spatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli ascendentis erit ad velocitatem aquæ descendentis ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ, & velocitas circelli ascendentis ad summam velocitatum, hoc est, ad velocitatem relativam aquæ descendentis qua præterfluit circellum ascendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, sive ut $EFq - PQq$ ad EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati qua supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest: & vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius, per Legum Cor. 5. id est, Resistentia circelli ascendentis erit ad pondus Cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2}$ IG ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ quam proxime. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq.

Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq - \frac{1}{2}PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea Velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest, Resistentia vero ejus æqualis evadet ponderi Cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo dimidium est altitudinis IG, a qua Cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; & hac velocitate Cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem Cylindri, hac velocitate secundum longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentia circelli per Lemma IV; ideoque æqualis est Vi qua motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, generari potest quamproxime.

Si

Si longitudo Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & tempus quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augebitur vel minuetur in eadem ratione; adeoque vis illa qua motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ Cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per Lemma IV.

Si denſitas Cylindri augeatur vel minuatur: motus ejus ut & Vis qua motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eadem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque Cylindri cujuſcunque erit ad Vim qua totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas Medii ad denſitatem Cylindri quamproxime. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, continuum vero eſſe & non elaſticum ut preſſio omnis quæ ab ejus compreſſione oritur propagetur in inſtanti &, in omnes moti corporis partes æqualiter agendo, reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique quæ a motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & Reſiſtentiam creat. Preſſio autem quæ oritur a compreſſione fluidi, utcunque fortis ſit, ſi propagetur in inſtanti, nullum generat motum in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque reſiſtentiam nec auget nec minuit. Certe Actio fluidi, quæ ab ejus compreſſione oritur, fortior eſſe non poteſt in partes poſticas corporis moti quam in ejus partes anticas, ideoque reſiſtentiam in hac Propoſitione deſcriptam minuere non poteſt: & fortior non erit in partes anticas quam in poſticas, ſi modo propagatio ejus infinite velocior ſit quam motus corporis preſſi. Infinite autem velocior erit & propagabitur in inſtanti, ſi modo fluidum ſit continuum & non elaſticum.

Corol. 1. Cylindrorum, qui ſecundum longitudines ſuas in Mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, reſiſtentiæ ſunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatum & duplicata ratione diametrorum & ratione denſitatis Mediorum.

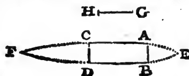
Corol. 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, ſed Cylindrus in Medio quieſcente incluſo ſecundum longitudinem ſuam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: Reſiſtentia ejus erit ad vim qua totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ſemel

semel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione densitatis Medii ad densitatem Cylindri.

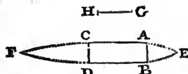
Corol. 3. Iisdem positis, & quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis Cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq semel, & ratione $EFq - PQq$ ad EFq bis: resistentia Cylindri erit ad vim qua totus ejus motus, interea dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas Medii ad densitatem Cylindri.

Scholium.

In hac Propositione resistentiam investigavimus quæ oritur a sola magnitudine transversæ sectionis Cylindri, neglecta resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo Propositionis XXXVI. obliquitas motuum quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen: sic in hac Propositione, obliquitas motuum quibus partes aquæ ab anteriore Cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes Cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur & resistentiam auget, idque in ea fere ratione qua effluxum aquæ e vase diminuit, id est, in ratione duplicata 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in Propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maxima copia transirent per foramen EF, ponendo quod aqua omnis in vase quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret sine motu: sic in hac Propositione, ut obliquitas motuum tollatur, & partes aquæ motu maxime directo & brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum Cylindro, & sola maneat resistentia quæ oritur a magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum Cylindri, concipiendum est quod partes fluidi quarum motus sunt obliqui & inutiles & resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque Cylindri terminum, & cohæreant & Cylindro jungantur. Sit $ABCD$ rectangulum, & sint AE & BE arcus duo Parabolici axe AB descripti, latere autem recto quod sit ad spa-



tium HG, describendum à Cylindro cadente dum velocitatem suam acquirit, ut HG ad $\frac{1}{2}$ AB. Sint etiam CF & DF arcus alii duo Parabolici, axe CD & latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem EF generetur solidum cujus media pars $ABDC$ sit Cylindrus de quo agimus, & partes extremæ ABE & CDF contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ Cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi $EACFDB$, secundum longitudinem axis sui FE in partes versus E progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hac Propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim qua totus Cylindri motus, interea dum longitudo 4 AC motu illo uniformiter continuato describatur, vel tolli possit vel generari, quam densitas Fluidi habet ad densitatem Cylindri quamproxime. Et hac vi Resistentia minor esse non potest quam in ratione 2 ad 3, per Corol. 7. Prop. XXXVI.



LEMMA V.

Si Cylindrus, Sphæra & Sphærois, quorum latitudines sunt æquales, in medio canalis Cylindrici ita locentur successive ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

Nam spatia inter Canalem & Cylindrum, Sphæram, & Sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab aqua per canalem fluente.

Patet per Lemma V & Motus Legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, & corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex Lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scholium.

Eadem est ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri potest; sed in his Lemmatis corpora esse politissima supponimus, & Medii tenacitatem & frictionem esse nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus suis obliquis & superfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare possunt, quiescant inter se tanquam gelu constrictæ, & corporibus ad ipsorum partes anticas & posticas adhæreant, perinde ut in Scholio Propositionis præcedentis exposui. Agitur enim in sequentibus de resistentia omnium minima quam corpora rotunda, datis maximis sectionibus transversis descripta, habere possunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam ascendat, ad posticam subsidat, præsertim si figura sint obtusa; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Et corpora in fluidis elasticis mota, si ante & post obtusa sint, fluidum paulo magis condensant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad posticam; & inde resistentiam paulo majorem sentiunt quam si capite & cauda sint acutis. Sed nos in his Lemmatis & Propositionibus non agimus de fluidis elasticis, sed de non elasticis; non de insidentibus fluido, sed de alte immersis. Et ubi resistentia corporum in fluidis non elasticis innotescit, augenda erit hæc resistentia aliquantulum tam in fluidis elasticis, qualis est Aer, quam in superficiebus fluidorum stagnantium, qualia sunt maria & paludes.

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in Fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim qua totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit, vel generari, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi quamproxime.

Nam Globus est ad Cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea Vis illa, quæ tollere possit motum omnem Cylindri interea dum Cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, Globi motum omnem tollet interea dum Globus describit duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem Cylindri est ad hanc Vim quamproxime ut densitas Fluidi ad densitatem Cylindri vel Globi, per Prop. XXXVII.; & Resistentia Globi æqualis est Resistentiæ Cylindri, per Lem. V, VI, VII. *Q. E. D.*

Corol. 1. Globorum, in Mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicata ratione velocitatis, & duplicata ratione diametri, & ratione densitatis Mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quacum Globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest Globus idem, eodem pondere, absque resistentia cadendo & casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas Globi ad densitatem Fluidi. Nam Globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisita, describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas Globi ad densitatem Fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit quo tempore Globus octo tertias diametri suæ eadem velocitate describit, ut densitas Fluidi ad densitatem Globi: ideoque per hanc Propositionem, vis ponderis æqualis erit vi Resistentiæ, & propterea Globum accelerare non potest.

Corol. 3. Data & densitate Globi & velocitate ejus sub initio motus, ut & densitate fluidi compressi quiescentis in qua Globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas Globi & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum, per Corol. 7. Prop. XXXV.

Corol.

Corol. 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem Corol. 7.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per Fluidum in canali Cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim qua totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi Globi, & ratione duplicata orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum Globi, & ratione densitatis Fluidi ad densitatem Globi quamproxime.

Patet per Corol. 2. Prop. XXXVII; procedit vero demonstratio quemadmodum in Propositione præcedente.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi in Medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per Phænomena.

Sit A pondus Globi in vacuo, B pondus ejus in Medio resistente, D diameter Globi, F spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ D ut densitas Globi ad densitatem Medii, id est, ut A ad A—B, G tempus quo Globus pondere B absque resistentia cadendo describit spatium F, & H velocitas quam Globus hocce casu suo acquirit. Et erit H velocitas maxima quacum Globus, pondere suo B, in Medio resistente potest descendere, per Corol. 2. Prop. XXXVIII; & resistentia quam Globus ea cum velocitate descendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: resistentia vero quam patitur in alia quacunque velocitate, erit ad pondus B in duplicata ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, per Corol. 1. Prop. XXXVIII.

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ab inertia materiæ Fluidi. Ea vero quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, ſic inveſtigabitur.

Demittatur Globus ut pondere ſuo B in Fluido deſcendat; & ſit P tempus cadendi, idque in minutis ſecundis ſi tempus G in minutis ſecundis habeatur. Inveniatur numerus abſolutus N qui congruit Logarithmo 0,4342944819 $\frac{2P}{G}$, ſitque L Logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquiſita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem deſcripta erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611\, F + 4,605170186\, LF$. Si Fluidum ſatis profundum ſit, negligi poteſt terminus 4,605170186 LF; & erit $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611\, F$ altitudo deſcripta quamproxime. Patent hæc per Libri ſecundi Propoſitionem nonam & ejus Corollaria, ex Hypotheſi quod Globus nullam aliam patiatur reſiſtentiam niſi quæ oritur ab inertia materiæ. Si vero aliam inſuper reſiſtentiam patiatur, deſcenſus erit tardior, & ex retardatione innoteſcet quantitas hujus reſiſtentiæ.

Ut corporis in Fluido cadentis velocitas & deſcenſus facilius innoteſcant, compoſui Tabulam ſequentem, cujus columna prima denotat tempora deſcenſus, ſecunda exhibet velocitates cadendo acquiſitas exiſtente velocitate maxima 100000000, tertia exhibet ſpatia temporibus illis cadendo deſcripta, exiſtente 2 F ſpatio quod corpus tempore G cum velocitate maxima deſcribit, & quarta exhibet ſpatia iiſdem temporibus cum velocitate maxima deſcripta. Numeri in quarta columna ſunt $\frac{2P}{G}$, & ſubducendo numerum 1,3862944 — 4,6051702 L, inveniuntur numeri in tertia columna, & multiplicandi ſunt hi numeri per ſpatium F ut habeantur ſpatia cadendo deſcripta. Quinta his inſuper adjecta eſt columna, quæ continet ſpatia deſcripta iiſdem temporibus a corpore, vi ponderis ſui comparativi B, in vacuo cadente.

Tempora

Tempora P	*Velocitates cadentis in fluido.*	*Spatia cadendo descripta in fluido.*	*Spatia motu maximo descripta.*	*Spatia cadendo descripta in vacuo.*
0,001G	99999$\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,02F	0,0001F
0,1G	9966799	1,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16,6137057F	18F	81F
10G	99999999$\frac{3}{5}$	18,6137056F	20F	100F

Scholium.

Ut resistentias Fluidorum investigarem per Experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine interna digitorum novem pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aqua pluviali; & globis ex cera & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus seu grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132,645

132,645 in Medio aeris, vel grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus in aqua.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aqua, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

Pondus globi in vacuo est $156\frac{13}{17}$ *gran.*, & excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua est $72\frac{13}{17}$ *gran.* Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi in vacuo, ita densitas aquæ ad densitatem globi, & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad spatium $2F$, quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{13}{17}$, cadendo in vacuo describet digitos $193\frac{1}{3}$; & pondere granorum 77, eodem tempore, absque resistentia cadendo in aqua describet digitos 95,219; & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicata ratione spatii F seu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* describet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quacum potest in aqua descendere. Est igitur tempus G 0″,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illa maxima H, globus describet spatium $2F$ digitorum 4,4256; ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. Subducatur spatium $1,3862944F$ seu 3,0676 *dig.* & manebit spatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aqua, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, minui debet in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum orificii hujus supra semicirculum maximum globi & ex simplici ratione orificii ejusdem ad excessum ejus supra circulum maximum globi, id est, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur spatium 112,08 digitorum, quod Globus cadendo in aqua in hoc vase ligneo tempore minutorum quatuor secundorum per Theoriam describere debuit quamproxime. Descripsit vero digitos 112 per Experimentum.

Exper. 2. Tres Globi æquales, quorum pondera seorsim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aqua, successive demittebantur; & unusquisque cecidit in aqua tempore minutorum secundorum quindecim, casu suo describens altitudinem digitorum 112.

Com-

Computum ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{31}$ *gran.*, excessus hujus ponderis supra pondus in aqua $71\frac{4}{31}$ *gran.*, diameter globi 0, 81296 *dig.*, octo tertiæ partes hujus diametri 2, 16789 *dig.*, spatium 2 F 2, 3217 *dig.*, spatium quod globus pondere $5\frac{1}{31}$ *gran.*, tempore 1″, absque resistentia cadendo describat 12, 808 *dig.*, & tempus G 0″, 301056. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest in aqua vi ponderis $5\frac{1}{31}$ *gran.* descendere, tempore 0″. 301056 describet spatium 2, 3217 *dig.* & tempore 15″ spatium 115, 678 *dig.* Subducatur spatium 1, 3862944 F seu 1, 609 *dig.* & manebit spatium 114, 069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vase latissimo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0, 895 *dig.* circiter. Et sic manebit spatium 113, 174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15″ describere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero digitos 112. per Experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aqua, successive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, describentes altitudinem digitorum 112.

Per Theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter. Quod tardius ciciderunt, vel bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus globum demittentis, vel erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aqua, vel denique minori proportioni resistentiæ quæ a vi inertiæ in tardis motibus oritur ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis, tribuendum esse puto. Ideoque pondus globi in aqua debet esse plurium granorum ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cæpi ut investigarem resistentias fluidorum antequam Theoria, in propositionibus proxime præcedentibus exposita, mihi innotesceret. Postea, ut Theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine interna digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cera & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{4}$ granorum in aqua. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua, & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per

frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne pondere partis alicujus ex aqua extantis descensus eorum sub initio acceleraretur. Et ubi penitus immersi quiescebant, demittebantur quam cautissime, ne impulsum aliquem a manu demittente acciperent. Ceciderunt autem successive temporibus oscillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempestas jam paulo frigidior erat quam cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oscillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Et experimento sæpius capto, Globi ceciderunt maxima ex parte temporibus oscillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, suspicor eosdem retardatos fuisse impingendo in latera vasis.

Jam computum per Theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{7}$ granorum. Excessus hujus ponderis supra pondus globi in aqua $132\frac{11}{42}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{42}$ granorum, tempore minuti unius secundi absque resistentia cadendo describit 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maxima quacum potest in aqua vi ponderis $7\frac{1}{42}$ granorum descendere, tempore 0″,376843 describit spatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ spatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ seu oscillationum 50 spatium 186,1915 *dig.* Subducatur spatium 1,386294 F, seu 1,9454 *dig.* & manebit spatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vase latissimo describet. Ob angustiam vasis nostri, minuatur hoc spatium in ratione quæ componitur ex subduplicata ratione orificii vasis ad excessum hujus orificii supra semicirculum maximum globi, & simplici ratione ejusdem orificii ad excessum ejus supra circulum maximum globi; & habebitur spatium 181, 86 digitorum, quod globus in hoc vase tempore oscillationum 50 describere debuit per Theoriam quamproxime. Descripsit vero spatium 182. digitorum tempore oscillationum $49\frac{1}{2}$ vel 50 per Experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aqua, sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproxime.

Exper.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproxime.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{1}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aqua sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum semisse.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproxime.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi, ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset, primum descendente, & motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas, globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; & communicando, amittit partem motus proprii quo descendere deberet, & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recedit semper a latere suo quod per oscillationem descendit, & recedendo appropinquat lateribus vasis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, & in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cera & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; & globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maxima ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor pondere granorum $273\frac{1}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aqua, sæpius demissi, ceciderunt temporibus oscillationum

 non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per Theoriam vero hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{3}$ quamproxime.

Exper. 10. Globi quatuor pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aqua, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{1}{2}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, describentes altitudinem digitorum $181\frac{1}{2}$. Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsum eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per Theoriam vero cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{5}{9}$ quamproxime.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aqua, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maxima ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{5}{8}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aqua, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64 & 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per Theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproxime.

Per hæc Experimenta manifestum est quod, ubi globi tarde ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi recte exhibentur per Theoriam: at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, resistentia paulo major extitit quam in duplicata ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum; & hæc oscillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motus languorem cito cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motus fortitudinem diutius durat, & non nisi post plures oscillationes ab aqua ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur a fluido ad posticas suas partes; & si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem a tergo relinquent, nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (per Prop. XXXII & XXXIII) augeri in duplicata ratione velocitatis, ut resistentia sit in eadem duplicata ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulo minus premuntur a tergo, & defectu pressionis, resistentia eorum fit paulo major quam in duplicata ratione velocitatis.

Con-

Congruit igitur Theoria cum phænomenis corporum cadentium in Aqua, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in Aere.

Exper. 13. A culmine Ecclesiæ *Sti. Pauli*, in urbe *Londini*, globi duo vitrei simul demittebantur, unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum *Londinensium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo huic Tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum, ut Tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum ferreum a pessulo ad imam Ecclesiæ partem tendens, demitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in Tabula sequente.

Globorum mercurio plenorum.			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	8″½
983	0,8	4—	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	8½
808	0,75	4	483	5,0	8⅛
784	0,75	4+	641	5,2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per Theoriam *Galilæi*) minutis quatuor secundis describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum 3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tarda sua devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbebant Tabulæ prope medium ejus, & paulo quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui Tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto, tempora quibus globi sex majores cecidere, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 conſtructus cecidit, tempore 8″ 12‴, deſcribendo altitudinem pedum 220. Pondus aquæ huic globo æqualis, eſt 16600 granorum; & pondus aëris eidem æqualis eſt $\frac{16600}{860}$ *gran.* ſeu $19\frac{3}{10}$ *gran.*; ideoque pondus globi in vacuo eſt $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus eſt ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita ſunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id eſt, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto ſuo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi deſcribit digitos $193\frac{1}{3}$ ut ſupra, & pondere 483 *gran.* deſcribit digitos 185, 905, & eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo deſcribit ſpatium F ſeu 14 *ped.* $5\frac{1}{6}$ *dig.* tempore 57‴ 58⁗, & velocitatem maximam acquirit quacum poſſit in aere deſcendere. Hac velocitate globus, tempore 8″ 12‴, deſcribit ſpatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1, 3863 F ſeu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc ſpatium igitur globus, tempore 8″ 12‴, cadendo deſcribere debuit per Theoriam. Deſcripſit vero ſpatium 220 pedum per experimentum. Differentia inſenſibilis eſt.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci Tabulam ſequentem.

Globorum ponderi.	*Diametri*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.*		*Spatia deſcribenda per Theoriam,*		*Exceſſus.*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	8″	12‴	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Globorum igitur tam in Aere quam in Aqua motorum reſiſtentia prope omnis per Theoriam noſtram recte exhibetur, ac denſitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus proportionalis eſt.

In

In Scholio quod Sectioni sextæ subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in Aere, Aqua, & Argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. Idem hic ostendimus magis accurate per experimenta corporum cadentium in Aere & Aqua. Nam pendula singulis oscillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, & resistentia ab hoc motu oriunda, ut & resistentia fili quo pendulum suspendebatur, totam Penduli resistentiam majorem reddiderunt quam resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in Scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum Aqua, describendo longitudinem semidiametri suæ in Aere, amittere deberet motus sui partem $\frac{1}{3342}$. At per Theoriam in hac septima Sectione expositam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, amittere deberet motus sui partem tantum $\frac{1}{4586}$, posito quod densitas Aquæ sit ad densitatem Aeris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob causas jam descriptas) quam per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cum pendulorum in Aere, Aqua, & Argento vivo oscillantium resistentiæ a causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his Mediis, tam per experimenta pendulorum, quam per experimenta corporum cadentium, satis recte exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motus sui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproxime. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus sub initio motus, & T tempus quo globus velocitate V in vacuo describet spatium quod sit ad spatium $\frac{8}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t, amittet velocitatis suæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & describet spatium quod sit ad spatium uniformi velocitate V eodem tempore descriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 est ad numerum $\frac{t}{T}$, per

Corol.

Corol. 7. Prop. xxxv. In motibus tardis resistentia potest esse paulo minor, propterea quod figura Globi paulo aptior sit ad motum quam figura Cylindri eadem diametro descripti. In motibus velocibus resistentia potest esse paulo major, propterea quod elasticitas & compressio fluidi non augeantur in duplicata ratione velocitatis. Sed hujusmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis Aer, Aqua, Argentum vivum & similia fluida, per divisionem partium in infinitum, subtiliarentur & fierent Media infinite fluida; tamen globis projectis haud minus resisterent. Nam resistentia, de qua agitur in Propositionibus præcedentibus, oritur ab inertia materiæ; & inertia materiæ corporibus essentialis est & quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur a tenacitate & frictione partium, diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ cui resistentia, de qua hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia Cœlestia, per quæ globi Planetarum & Cometarum in omnes partes liberrime & absque omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticas supra pressionem ad ejus partes posticas, & non minor esse potest in Mediis infinite fluidis quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate sua, non tantum motum ciet in fluido, sed etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea resistentia in omni fluido, est motus in fluido a projectili excitatus, nec minor esse potest in Æthere subtilissimo pro densitate Ætheris, quam in Aere, Aqua, & Argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

SECTIO

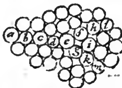
SECTIO VIII.

De Motu per Fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

Pressio non propagatur per Fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ Fluidi in directum jacent.

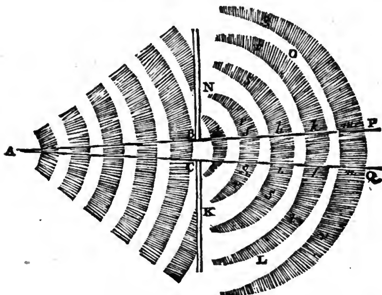
Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in linea recta, potest quidem pressio directe propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas oblique positas *f* & *g* oblique, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur a particulis ulterioribus *h* & *k*; quatenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & oblique propagabitur in infinitum; & postquam incipit oblique propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accurate in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si pressionis, a dato puncto per Fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quaquaversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas & obstaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem Coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit. Planis transversis *de*, *fg*, *hi* distinguatur conus *APQ* in frusta; & interea dum conus *ABC*, pressionem propagando, urget fru-

 stum

 stum conicum ulterius *defg* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fgih* in superficie *fg*, & frustum illud urget frustum tertium, & sic deinceps in infinitum; manifestum est (per motus Legem tertiam) quod frustum primum *defg*, reactione frusti secundi *fghi*, tantum urgebitur & premetur in superficie *fg*, quantum urget & premit frustum illud secundum. Frustum igitur *degf* inter conum *Ade* & frustum *fhig* comprimitur utrinque, & propterea (per Corol. 6. Prop. XIX.) figuram suam servare nequit, nisi vi eadem comprimatur undique.



Eodem igitur impetu quo premitur in superficiebus *de*, *fg*, conabitur cedere ad latera *af*, *eg*; ibique (cum rigidum non sit, sed omnimodo Fluidum) excurret ac dilatabitur, nisi Fluidum ambiens adsit, quo conatus iste cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam Fluidum ambiens ad latera *df*, *eg* quam frustum *fghi* eodem impetu; & propterea pressio non minus propagabitur a lateribus *df*, *eg* in spatia *NO*, *KL* hinc inde, quam propagatur a superficie *fg* versus *P*. *Q*. *Q. E. D.*

PRO-

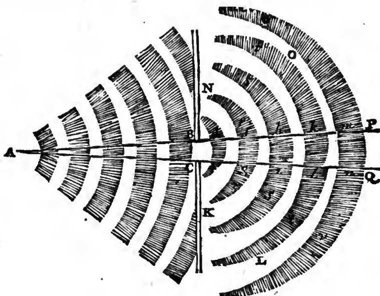
PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per Fluidum propagatus divergit a recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus a puncto *A* per foramen *BC* pergatque (si fieri potest) in spatio conico *BCQP* secundum lineas rectas divergentes a puncto *C*. Et ponamus primo quod motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ. Sintque *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in Fluidi partibus immotis *LK*, *NO*, defluet eadem de jugorum terminis *e*, *g*, *i*, *l*, &c. *d*, *f*, *h*, *k*, &c. hinc inde, versus *KL* & *NO*: & quoniam in undarum vallibus depressior est quam in Fluidi partibus immotis *KL*, *NO*; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus *KL* & *NO*. Et quoniam motus undarum ab *A* versus *PQ* fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, adeoque celerior non est quam pro celeritate descensus; & descensus aquæ, hinc inde, versus *KL* & *NO* eadem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum, hinc inde, versus *KL* & *NO*, eadem velocitate qua undæ ipsæ ab *A* versus *PQ* recta progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde, versus *KL* & *NO*, ab undis dilatatis *rfgr*, *shis*, *tklt*, *vmnv*, occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita se habere quilibet in aqua stagnante experiri potest.

Cas. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn*, designent pulsus a puncto *A*, per Medium Elasticum, successive propagatos. Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones Medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphæricam occupet superficiem circa centrum *A* descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedant intervalla. Designent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. densissimas pulsuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam Medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus *KL* & *NO*, dilatabit sese tam versus spatia illa *KL*, *NO* utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervalla;

 eoque pacto rarius semper evadens e regione intervallorum ac densius e regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur a perpetua relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora; & pulsus eadem fere celeritate sese in Medii partes quiescentes *KL*, *NO* hinc inde relaxare debent; pulsus illi eadem fere celeritate sese dilatabunt undique in spatia immota *KL*, *NO*, qua propagantur directe a centro *A*; adeoque spatium totum *KLON* occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in Sonis, qui vel monte interposito audiuntur, vel in cubiculum per fenestram admissi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi a parietibus oppositis, quam a fenestra directe propagati, quantum ex sensu judicare licet.



Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab *A* per foramen *BC*: & quoniam propagatio ista non fit, nisi quatenus partes Medii centro *A* propiores urgent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quaquaversum in regiones ubi minus premuntur: recedent

cedent eædem versus Medii partes omnes quiescentes, tam laterales *KL* & *NO*, quam anteriores *PQ*, eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* transiit, dilatari incipiet & abinde, tanquam a principio & centro, in partes omnes directe propagari. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in Medio Elastico propagabit motum pulsuum undique in directum, in Medio vero non Elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes Medii sibi proximas, & urgendo compriment easdem & condensabunt, dein reditu suo sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes Medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & qua ratione partes corporis hujus agitabant hasce Medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur: sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt, idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatæ, ob motum suum progressivum quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi a corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per Medium propagati sese dilatabunt ad latera, per Propositionem præcedentem; & a corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus

in Undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas Undarum supplet locum vis Elasticæ.

Cas. 2. Quod si Medium non sit Elasticum: quoniam ejus partes a corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi Medium facillime cedit, hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas a tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in Medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus relinquit a tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, Medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, Medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit Medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut Medium, recedendo a partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.*

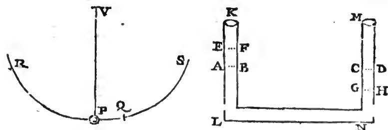
Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium Flammæ ad pressionem, per Medium ambiens, secundum lineas rectas propagandam conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione sola partium Flammæ, sed a totius dilatatione derivari.

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in Canalis cruribus erectis* KL, MN *vicibus alternis ascendat & descendat; construatur autem Pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis æquetur semissi longitudinis aquæ in Canali: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus Pendulum oscillatur.

Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando; & resistentiam aquæ quæ oritur

oritur ab attritu canalis, hic non considero. Designent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure utroque; & ubi aqua in crure KL ascendit ad altitudinem EF descenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus pendulum, VP filum, V punctum suspensionis, $SPQR$ Cyclois quam Pendulum describat, P ejus punctum infimum, PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, qua motus aquæ alternis vicibus acceleratur



& retardatur, est excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure KL ascendit ad EF, & in crure altero descendit ad GH, vis illa est pondus duplicatum aquæ $EABF$, & propterea est ad pondus aquæ totius ut AE seu PQ ad VP seu PR. Vis etiam, qua pondus P in loco quovis Q acceleratur & retardatur in Cycloide, (per Corol. Prop. LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus distantia PQ a loco infimo P, ad Cycloidis longitudinem PR. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia AE, PQ describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; ideoque, si aqua & pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur aquæ ascendentis & descendentis, sive motus intensior sit sive remissior, vices omnes sunt Isochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali sit pedum *Parisiensium* $6\frac{1}{9}$; aqua tempore minuti unius secundi descendet, & tempore minuti alterius secundi ascendet; & sic deinceps vicibus alternis in infinitum. Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis, tempore minuti unius secundi oscillatur.

Corol.

Corol. 3. Aucta autem vel diminuta longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione subduplicata.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas est in subduplicata ratione latitudinum.

Consequitur ex constructione Propositionis sequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem Undarum.

Constituatur Pendulum cujus longitudo, inter punctum suspensionis & centrum oscillationis, æquetur latitudini Undarum: & quo tempore pendulum illud oscillationes singulas peragit, eodem Undæ progrediendo latitudinem suam propemodum conficient.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam, quæ vel vallibus imis, vel summis culminibus interjacet. Designet *ABCDEF* superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem; sintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc altissimæ sunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, qua partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges observabit: & propterea (per Prop. XLIV.) si distantiæ inter undarum loca altissima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F* æquentur duplæ penduli longitudini; partes altissimæ *A*, *C*, *E*, tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum Undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, Unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur, sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, adeoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. *Q. E. I.*

Corol. 1. Igitur Undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; adeoque tempore minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproxime.

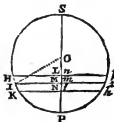
Corol. 2.

Corol. 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicata ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod partes aquæ recta ascendunt vel recta descendunt; sed ascensus & descensus ille verius fit per circulum, ideoque tempus hac Propositione non nisi quamproxime definitum esse affirmo.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

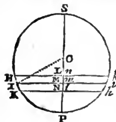
Pulsibus per Fluidum propagatis, singulæ Fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis Penduli.

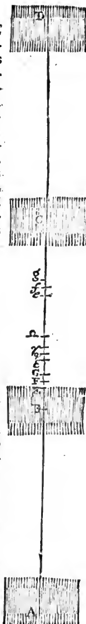


Designent AB, BC, CD, &c. pulsuum successivorum æquales distantias; ABC plagam motus pulsuum ab A versus B propagati; E, F, G puncta tria Physica Medii quiescentis, in recta AC ad æquales ab invicem distantias sita; Ee, Ff, Gg, spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco singulis vibrationibus eunt & redeunt; ϵ, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & EF, FG lineolas Physicas seu Medii partes lineares punctis illis interjectas, & successive translatas in loca $\epsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ & ef, fg. Rectæ Ee æqualis ducatur recta PS. Bisecetur eadem in O, centroque O & intervallo OP describatur circulus $SIPi$. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus proportionalibus; sic ut completo tempore quovis PH vel $PHSh$, si demittatur ad PS perpendiculum HL vel hl, & capiatur $E\epsilon$ æqualis PL vel Pl, punctum Physicum E reperiatur in

De Motu Corporum, in ϵ. Hac lege punctum quodvis E, eundo ab E per ϵ ad e, & inde redeundo per ϵ ad E, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget cum oscillante Pendulo. Probandum est quod singula Medii puncta Physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur Medium tali motu a causa quacunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentia $PHSh$ capiantur æquales arcus HI, IK vel hi, ik, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulsuum intervallum totum BC. Et demissis perpendiculis IM, KN vel im, kn; quoniam puncta E, F, G motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur a B ad C; si PH vel $PHSh$ sit tempus ab initio motus puncti E, erit PI vel $PHSi$ tempus ab initio motus puncti F, & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motus puncti G; & propterea $E\epsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ erunt ipsis PL, PM, PN in itu punctorum, vel ipsis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, æquales respective. Unde $\epsilon\gamma$ seu $EG + G\gamma - E\epsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG - LN$, in reditu autem æqualis $EG + ln$. Sed $\epsilon\gamma$ latitudo est seu expansio partis Medii EG in loco $\epsilon\gamma$; & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem, ut $EG - LN$ ad EG; in reditu autem ut $EG + ln$ seu $EG + LN$ ad EG. Quare cum sit LN ad KH ut IM ad radium OP, & KH ad EG ut circumferentia $PHShP$ ad BC, id est (si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum BC) ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG, ut IM ad V: erit expansio partis EG punctive Physici F in loco $\epsilon\gamma$, ad expansionem





pansionem mediocrem quam pars illa habet in loco suo primo EG, ut $V - IM$ ad V in itu, utque $V + im$ ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco $\epsilon\gamma$, est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu vero ut $\frac{1}{V + im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elasticæ punctorum Physicorum E & G in itu, sunt ut $\frac{1}{V - HL}$ & $\frac{1}{V - KN}$ ad $\frac{1}{V}$; & virium differentia ad Medii vim elasticam mediocrem, ut $\frac{HL - KN}{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc est, ut $\frac{HL - KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, sive ut $HL - KN$ ad V, si modo (ob angustos limites vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V. Quare cum quantitas V detur, differentia virium est ut $HL - KN$, hoc est (ob proportionales $HL - KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, datasque HK & OP) ut OM; id est, si Ff bisecetur in Ω, ut $\Omega\phi$. Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum Physicorum ϵ & γ, in reditu lineolæ Physicæ $\epsilon\gamma$ est ut $\Omega\phi$. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ϵ supra vim elasticam puncti γ,) est vis qua interjecta Medii lineola Physica $\epsilon\gamma$ acceleratur; & propterea vis acceleratrix lineolæ Physicæ $\epsilon\gamma$, est ut ipsius distantia a medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (per Prop. XXXVIII. Lib. I.) recte exponitur per arcum PI; & Medii pars linearis $\epsilon\gamma$ lege præscripta movetur, id est, lege oscillantis Penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus Medium totum componitur. *Q. E. D.*

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola Physica $\epsilon\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui a corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus a corpore tremulo propagari desinunt.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsuum in Fluido Elastico propagatorum velocitates, sunt in ratione composita ex subduplicata ratione vis Elasticæ directe & subduplicata ratione densitatis inverse; si modo Fluidi vis Elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si Media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his Mediis æquentur inter se, sed motus in uno Medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verum tamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro Physice accurata haberi potest. Sunt autem vires Elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes, itus & reditus suos per spatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ sunt ut spatia, simul peragent: & propterea pulsus, qui tempore itus & reditus unius latitudinem suam progrediendo conficiunt, & in loca pulsuum proxime præcedentium semper succedunt, ob æqualitatem distantiarum, æquali cum velocitate in Medio utroque progredientur.

Cas. 2. Sin pulsuum distantiæ seu longitudines sint majores in uno Medio quam in altero; ponamus quod partes correspondentes spatia latitudinibus pulsuum proportionalia singulis vicibus eundo & redeundo describant: & æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque si Media sint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ Elasticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda, est ut pulsuum latitudo; & in eadem ratione est spatium per quod singulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. Estque tempus itus & reditus unius in ratione composita ex ratione subduplicata materiæ & ratione subduplicata spatii, atque adeo ut spatium. Pulsus autem temporibus itus & reditus unius eundo latitudines suas conficiunt, hoc est, spatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea sunt æquiveloces.

Cas. 3. In Mediis igitur densitate & vi Elastica paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si Medii vel densitas vel vis Elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis Elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; tempus quo motus

tus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicata ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicata ratione vis Elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione composita ex ratione subduplicata densitatis Medii inverse & ratione subduplicata vis Elasticæ directe. *Q. E. D.*

Hæc Propositio ulterius patebit ex constructione sequentis.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis Medii densitate & vi Elastica, invenire velocitatem pulsuum.

Fingamus Medium ab incumbente pondere, pro more Aeris nostri comprimi; sitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate Medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur Pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis sit A: & quo tempore Pendulum illud oscillationem integram ex itu & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio A descripti æquale.

Nam stantibus quæ in Propositione XLVII constructa sunt, si linea quævis Physica EF, singulis vibrationibus describendo spatium PS, urgeatur in extremis itus & reditus cujusque locis P & S, a vi Elastica quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in Cycloide, cujus perimeter tota longitudini PS æqualis est, oscillari posset: id adeo quia vires æquales æqualia corpuscula per æqualia spatia simul impellent. Quare cum oscillationum tempora sint in subduplicata ratione longitudinis Pendulorum, & longitudo Penduli æquetur dimidio arcui Cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oscillationis Penduli cujus longitudo est A, in subduplicata ratione longitudinis $\frac{1}{2}PS$ seu PO ad longitudinem A. Sed vis Elastica qua lineola Physica EG, in locis suis extremis P, S existens, urgetur, erat (in demonstratione Propositionis XLVII.) ad ejus vim totam Elasticam ut $HL-KN$ ad V, hoc est (cum punctum K jam incidat in P) ut HK ad V: & vis illa tota, hoc est pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur, est ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolæ longitudinem EG; adeoque ex æquo, vis qua lineola EG in locis suis P & S urgetur, est ad lineolæ illius pondus ut $HK \times A$ ad $V \times EG$, sive ut $PO \times A$ ad VV, nam HK erat ad EG ut PO ad V. Quare cum tempora,

pora, quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa Elastica, ad tempus vibrationis urgente vi ponderis, in subduplicata ratione VV ad $PO \times A$, atque adeo ad tempus oscillationis Penduli cujus longitudo est A, in subduplicata ratione VV ad $PO \times A$, & subduplicata ratione PO ad A conjunctim: id est, in ratione integra V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compositæ, pulsus progrediendo conficit latitudinem suam *BC*. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium *BC*, est ad tempus oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut V ad A, id est, ut *BC* ad circumferentiam circuli cujus radius est A. Tempus autem, quo pulsus percurret spatium *BC*, est ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in eadem ratione; ideoque tempore talis oscillationis pulsus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulsuum ea est quam acquirunt Gravia, æqualiter accelerato motu cadendo, & casu suo describendo dimidium altitudinis A. Nam tempore casus hujus, cum velocitate cadendo acquisita, pulsus percurret spatium quod erit æquale toti altitudini A, adeoque tempore oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, percurret spatium æquale circumferentiæ circuli radio A descripti: est enim tempus casus ad tempus oscillationis ut radius circuli ad ejusdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A sit ut Fluidi vis Elastica directe & densitas ejusdem inverse; velocitas pulsuum erit in ratione composita ex subduplicata ratione densitatis inverse & subduplicata ratione vis Elasticæ directe.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus Vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scholium.

Spectant propositiones novissimæ ad motum Lucis & Sonorum. Lux enim cum propagetur secundum lineas rectas, in actione sola

(per

(per Prop. XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni vero propterea quod a corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aeris pulsus propagati, per Prop. XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni Tympanorum. Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cum pondera specifica Aquæ pluvialis & Argenti vivi sint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi Mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus specificum Aeris & aquæ pluvialis sint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: erunt pondera specifica aeris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi sit 30 digitorum, altitudo aeris uniformis cujus pondus aerem nostrum subjectum comprimere posset, erit 356700 digitorum, seu pedum *Anglicorum* 29725. Estque hæc altitudo illa ipsa quam in constructione superioris Problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum descripti circumferentia est pedum 186768. Et cum Pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum, oscillationem ex itu & reditu compositam, tempore minutorum duorum secundorum, uti notum est, absolvat; Pendulum pedes 29725, seu digitos 356700 longum, oscillationem consimilem tempore minutorum secundorum $190\frac{3}{4}$ absolvere debebit. Eo igitur tempore sonus progrediendo conficiet pedes 186768, adeoque tempore minuti unius secundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio crassitudinis solidarum particularum aeris per quam sonus utique propagatur in instanti. Cum pondus aeris sit ad pondus aquæ ut 1 ad 870, & sales sint fere duplo densiores quam aqua; si particulæ aeris ponantur esse ejusdem circiter densitatis cum particulis vel aquæ vel salium, & raritas aeris oriatur ab intervallis particularum: diameter particulæ aeris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979 quos sonus tempore minuti unius secundi juxta calculum superiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$ seu 109 circiter, ob crassitudinem particularum aeris: & sic sonus tempore minuti unius secundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aere latentes, cum sint alterius elateris & alterius toni, vix aut ne vix quidem participant motum aeris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus

 tus ille celerius propagabitur per solum aerem verum ; idque in subduplicata ratione minoris materiæ. Ut si Atmosphæra constet ex decem partibus aeris veri & una parte vaporum , motus sonorum celerior erit in subduplicata ratione 11 ad 10 , vel in integra circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aeris veri: ideoque motus sonorum supra inventus, augendus erit in hac ratione. Quo pacto sonus , tempore minuti unius secundi , conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore verno & autumnali , ubi aer per calorem temperatum rarescit & ejus vis elastica nonnihil intenditur. At hyberno tempore , ubi aer per frigus condensatur , & ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicata ratione densitatis ; & vicissim æstivo tempore debet esse velocior.

Constat autem per experimenta quod soni tempore minuti unius secundi eundo, conficiunt pedes *Londinenses* plus minus 1142 , *Parisienses* vero 1070.

Cognita sonorum velocitate innotescunt etiam intervalla pulsuum. Invenit utique *D. Sauveur* (factis a se experimentis) quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum *Parisiensium* plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ tempore minuti unius secundi centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum *Parisiensium* 1070 , quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit ; adeoque pulsus unus occupat spatium pedum *Parisiensium* quasi $10\frac{7}{10}$, id est , duplam circiter longitudinem fistulæ. Unde verisimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis , æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Porro cur soni cessante motu corporis sonori statim cessant, neque diutius audiuntur ubi longissime distamus a corporibus sonoris, quam cum proxime absumus , patet ex Corollario Propositionis XLVII Libri hujus. Sed & cur soni in Tubis stenterophonicis valde augentur , ex allatis principiis manifestum est. Motus enim omnis reciprocus singulis recursibus a causa generante augeri solet. Motus autem in Tubis dilatationem sonorum impedientibus , tardius mittitur & fortius recurrit, & propterea a motu novo singulis recursibus impresso, magis augetur. Et hæc sunt præcipua Phænomena Sonorum.

SECTIO

SECTIO IX.

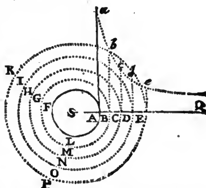
De Motu Circulari Fluidorum.

HYPOTHESIS.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium Fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes Fluidi separantur ab invicem.

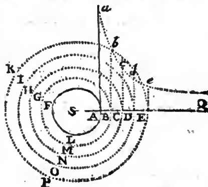
PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si Cylindrus solidus infinite longus in Fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem, perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium Fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe Cylindri.



Sit AFL Cylindrus uniformiter circa axem S in orbem actus, & circulis concentricis BGM, CHN, DIO, EKP, &c. distinguatur Fluidum in Orbes Cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuo factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte

 parte convexa; prævalebit impressio fortior, & motum Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut superficierum distantiæ ab axe. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiæ inverse; hoc est (conjunctis rationibus) ut quadrata distantiarum inverse. Quare si ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciproce proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur linea curva Hyperbolica; erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*: id est, si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, Orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ Hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et tempora motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis *D* reciproce ut area *DdQ*, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut distantia *SD*. *Q. E. D.*



Corol. 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reciproce ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum

tionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo; erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quam retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi Systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus, revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum Corollario quarto definitum acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliqua extrinsecus impressa motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in Aqua profunda stagnante experiri licet.

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

Si Sphæra solida, in Fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur Fluidum in orbem; perseveret autem Fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium Fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro Sphæræ.

Cas. 1. Sit *AFL* Sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distin-

De Motu Corporum. distinguatur Fluidum in Orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem Orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est Fluidum, impressiones contiguorum Orbium in se mutuo factæ, erunt (per Hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in Orbem aliquem major est vel minor ex parte concava quam ex parte convexa; prævalebit impressio fortior, & velocitatem Orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut Orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utraque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cum impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inverse ut superficies, hoc est, inverse ut quadrata distantiarum superficierum a centro. Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directe & distantiæ inverse; hoc est (conjunctis rationibus) ut cubi distantiarum inverse. Quare si ad rectæ infinitæ $SABCDEQ$, partes singulas erigantur perpendicula Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. cubis reciproce proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum Aa, Bb; Cc, Dd, Ee: id est (si ad constituendum Medium uniformiter fluidum, numerus Orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ Hyperbolicæ his summis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciproce proportionalia, erunt etiam his areis reciproce proportionalia. Est igitur tempus periodicum Orbis cujusvis DIO reciproce ut area DdQ, hoc est, (per notas Curvarum quadraturas) directe ut quadratum distantiæ SD. Id quod volui primo demonstrare.

Cas. 2. A centro Sphæræ ducantur infinitæ rectæ quam plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes, & his rectis circa axem revolutis concipe Orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet a Globo

Globo in infinitum recta pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quatenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hac lege facto, attritus annulorum ad latera nullus est; neque adeo motum, quo minus hac lege fiat, impediet. Si annuli, qui a centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius juxta polos quam juxta æquatorem; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casus primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum a centro Globi. Quod volui secundo demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolute & uniformiter fluidam, & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motus circularis, sed ad constitutionem Fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cum motus circularis, & abinde orta vis centrifuga, major sit ad Eclipticam quam ad Polos; debebit causa aliqua adesse qua particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia quæ ad Eclipticam est, recedat semper a centro & per exteriora Vorticis migret ad Polos, indeque per axem ad Eclipticam circulatione perpetua revertatur.

Corol. 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro globi, & velocitates absolutæ reciproce ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem Vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum a centro globi.

Corol. 3. Quoniam Vorticis partes interiores ob majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis ea actio-

 ne-

 ne perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eaque actione servant quantitatem motus sui plane invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur a centro ad circumferentiam Vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies Vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quod motum omnem a materia interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem Vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, a quo globus eandem semper quantitatem motus accipiat, quam imprimit in materiam Vorticis. Absque tali principio necesse est ut globus & Vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic Vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliqua constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in Vorticem; & primo revolveretur hic Vortex novus & exiguus una cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur in infinitum, ad modum Vorticis primi. Et eadem ratione qua hujus globus raperetur motu Vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus Mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in Corol. 3. & 4. assignatam) & Vortices tandem conquiescerent.

Corol. 9. Si globi plures datis in locis circum axes positione datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent Vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli, eadem ratione qua unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde Vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones Vorticum in se mutuo, perpetuo movebuntur de locis suis, uti in Corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se

positionem

positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in Corollario tertio & quarto assignatam, paulatim requiescet & in Vortices agi desinet.

Corol. 7. Si fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in Vorticem, globus autem & vas in eandem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quam sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum a centro Vorticis. Alia nulla Vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum inclusum & globus servent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quam acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum a centro globi.

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem, data cum velocitate quacunque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si Systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per Corol. 8. Et motus isti per Corol. 9. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum & vas accelerari, quam sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod si vas vi aliqua detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet Medium paulatim ad statum motus in Corollariis 8. 9. & 10. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde vero si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis

motibus

 motibus revolvebantur, permittatur Systema totum Legibus Mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quam eorum tempora periodica æquentur inter se, & Systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scholium.

In his omnibus suppono fluidum ex materia quoad densitatem & fluiditatem uniformi constare. Tale est in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus similes & æquales, ad æquales semper a se distantias, ubivis in fluido constitutis, propagare possit. Conatur quidem materia per motum suum circularem recedere ab axe Vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Ex hac pressione fit attritus partium fortior & separatio ab invicem difficilior; & per consequens diminuitur materiæ fluiditas. Rursus si partes fluidi sunt alicubi crassiores seu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores superficies in quibus partes separentur ab invicem. In hujusmodi casibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliave aliqua conditione restitui suppono. Hoc nisi fiat, materia ubi minus fluida est magis cohærebit & segnior erit, adeoque motum tardius recipiet, & longius propagabit quam pro ratione superius assignata. Si figura vasis non sit Sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum a centro quamproxime. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores, neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi a centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quam augebitur per incrementum velocitatis. Pergendo a spatiis angustioribus in latiora recedent paulo longius a centro, sed isto recessu tardescent, & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur; & sic per vices tardescent & accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio Vorticum innotescit per Propositionis hujus Corollarium sextum.

Proprietates autem Vorticum hac Propositione investigare conatus sum, ut pertentarem siqua ratione Phænomena cœlestia per Vorti-

Vortices explicari possint. Nam Phænomenon est, quod Planetarum circa Jovem revolventium tempora periodica sunt in ratione sesquiplicata distantiarum a centro Jovis; & eadem Regula obtinet in Planetis qui circa Solem revolvuntur. Obtinent autem hæ Regulæ in Planetis utrisque quam accuratissime, quatenus observationes Astronomicæ hactenus prodidere. Ideoque si Planetæ illi a Vorticibus circa Jovem & Solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi Vortices eadem lege revolvi. Verum tempora periodica partium Vorticis prodierunt in ratione duplicata distantiarum a centro motus; neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquiplicatam reduci, nisi vel materia Vorticis eo fluidior sit quo longius distat a centro, vel resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, ex aucta velocitate qua partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majori ratione quam ea est in qua velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ (nisi graves sint in centrum) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi Demonstrationum gratia Hypothesin talem initio Sectionis hujus proposuerim ut Resistentia velocitati proportionalis esset, tamen Resistentia in minori sit ratione quam ea velocitatis est. Quo concesso, tempora periodica partium Vorticis erunt in majori quam duplicata ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si Vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. Viderint itaque Philosophi quo pacto Phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per Vortices explicari possit.

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora quæ in Vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum Vortice, & eadem lege cum ipsius partibus (quoad velocitatem & cursus determinationem) moventur.

Nam si Vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eadem lege ac prius: &

 contra,

 contra, si Vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo Vortice, & resolvatur in fluidum; movebitur hæc eadem lege ac prius, nisi quatenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum Vorticis partium a centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in Fluidum resolutum fit pars Vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materia Vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materia proxime ambiente relative quiescens. Sin densius sit, jam magis conabitur recedere a centro Vorticis quam prius; adeoque Vorticis vim illam, qua prius in Orbita sua tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet a centro & revolvendo describet Spiralem, non amplius in eundem Orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem Orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eadem lege cum partibus fluidi a centro Vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

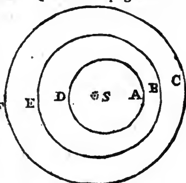
Corol. 1. Ergo solidum quod in Vortice revolvitur & in eundem Orbem semper redit, relative quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si Vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet a centro Vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet Planetas a Vorticibus corporeis non deferri. Nam Planetæ secundum Hypothesin *Copernicæam* circa Solem delati revolvuntur in Ellipsibus umbilicum habentibus in Sole, & radiis ad Solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes Vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent *AD*, *BE*, *CF*, Orbes tres circa Solem *S* descriptos, quorum extimus *CF* circulus sit Soli concentricus, & interiorum duorum Aphelia sint *A*, *B* & Perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in Orbe *CF*, radio ad Solem ducto areas temporibus proportionales describendo, movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, secundum leges Astronomicas; cum tamen secundum leges Mechanicas materia Vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C* velocius

velocius moveri debeat quam in ſpatio latiore inter *D* & *F*; id eſt, in Aphelio velocius quam in Perihelio. Quæ duo repugnant inter



ſe. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam verſatur, diſtantia inter orbes Martis & Veneris eſt ad diſtantiam eorundem orbium in principio Signi Piſcium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piſcium debet eſſe velocior quam in principio Virginis in ratione trium ad duo. Nam quo anguſtius eſt ſpatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore tranſit, eo majori cum velocitate tranſire debet. Igitur ſi Terra in hac Materia cœleſti relative quieſcens ab ea deferretur, & una circa Solem revolveretur, foret hujus velocitas in principio Piſcium ad ejuſdem velocitatem in principio Virginis in ratione ſeſquialtera. Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quam minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quam minutorum quadraginta & octo: cum tamen (experientia teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quam in principio Virginis, & propterea Terra velocior in Principio Virginis quam in Principio Piſcium. Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quam ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo vero motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peragantur intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.

DE MUNDI SYSTEMATE

LIBER TERTIUS.

IN Libris præcedentibus principia Philosophiæ tradidi, non tamen Philosophica sed Mathematica tantum, ex quibus videlicet in rebus Philosophicis disputari possit. Hæc sunt motuum & virium leges & conditiones, quæ ad Philosophiam maxime spectant. Eadem tamen, ne sterilia videantur, illustravi Scholiis quibusdam Philosophicis, ea tractans quæ generalia sunt, & in quibus Philosophia maxime fundari videtur, uti corporum densitatem & resistentiam, spatia corporibus vacua, motumque Lucis & Sonorum. Superest ut ex iisdem principiis doceamus constitutionem Systematis Mundani. De hoc argumento composueram Librum tertium methodo populari, ut a pluribus legeretur. Sed quibus Principia posita satis intellecta non fuerint, ii vim consequentiarum minime percipient, neque præjudicia deponent quibus a multis retro annis insueverunt: & propterea ne res in disputationes trahatur, summam libri illius transtuli in Propositiones, more Mathematico, ut ab iis solis legantur qui Principia prius evolverint. Veruntamen quoniam Propositiones ibi quam plurimæ occurrunt, quæ Lectoribus etiam Mathematice doctis moram nimiam injicere possint, auctor esse nolo ut quisquam eas omnes evolvat; suffecerit siquis Definitiones, Leges motuum & sectiones tres priores Libri primi sedulo legat, dein transeat ad hunc Librum de Mundi Systemate, & reliquas Librorum priorum Propositiones hic citatas pro lubitu consulat.

REGULÆ

REGULÆ PHILOSOPHANDI.

REGULA I.

Causas rerum naturalium non plures admitti debere, quam quæ & veræ sint & earum Phænomenis explicandis sufficiant.

Dicunt utique Philosophi: Natura nihil agit frustra, & frustra fit per plura quod fieri potest per pauciora. Natura enim simplex est & rerum causis superfluis non luxuriat.

REGULA II.

Ideoque Effectuum naturalium ejusdem generis eædem sunt Causæ.

Uti respirationis in Homine & in Bestia; descensus lapidum in *Europa* & in *America*; Lucis in Igne culinari & in Sole; reflexionis Lucis in Terra & in Planetis.

REGULA III.

Qualitates corporum quæ intendi & remitti nequeunt, quæque corporibus omnibus competunt in quibus experimenta instituere licet, pro qualitatibus corporum universorum habendæ sunt.

Nam qualitates corporum non nisi per experimenta innotescunt, ideoque generales statuendæ sunt quotquot cum experimentis generaliter quadrant; & quæ minui non possunt, non possunt auferri. Certe contra experimentorum tenorem somnia temere confingenda non sunt, nec a Naturæ analogia recedendum est, cum

De Mundi Systemate. ea ſimplex eſſe ſoleat & ſibi ſemper conſona. Extenſio corporum non niſi per ſenſus innoteſcit, nec in omnibus ſentitur: ſed quia ſenſibilibus omnibus competit, de univerſis affirmatur. Corpora plura dura eſſe experimur. Oritur autem durities totius a duritie partium, & inde non horum tantum corporum quæ ſentiuntur, ſed aliorum etiam omnium particulas indiviſas eſſe duras merito concludimus. Corpora omnia impenetrabilia eſſe non ratione ſed ſenſu colligimus. Quæ tractamus, impenetrabilia inveniuntur, & inde concludimus impenetrabilitatem eſſe proprietatem corporum univerſorum. Corpora omnia mobilia eſſe, & viribus quibuſdam (quas vires inertiæ vocamus) perſeverare in motu vel quiete, ex hiſce corporum viſorum proprietatibus colligimus. Extenſio, durities, impenetrabilitas, mobilitas & vis inertiæ totius, oritur ab extenſione, duritie, impenetrabilitate, mobilitate & viribus inertiæ partium; & inde concludimus omnes omnium corporum partes minimas extendi & duras eſſe & impenetrabiles & mobiles & viribus inertiæ præditas. Et hoc eſt fundamentum Philoſophiæ totius. Porro corporum partes diviſas & ſibi mutuo contiguas ab invicem ſeparari poſſe, ex Phænomenis novimus, & partes indiviſas in partes minores ratione diſtingui poſſe ex Mathematica certum eſt. Utrum vero partes illæ diſtinctæ & nondum diviſæ per vires Naturæ dividi & ab invicem ſeparari poſſint, incertum eſt. At ſi vel unico conſtaret experimento quod particula aliqua indiviſa, frangendo corpus durum & ſolidum, diviſionem pateretur: concluderemus vi hujus Regulæ, quod non ſolum partes diviſæ ſeparabiles eſſent, ſed etiam quod indiviſæ in infinitum dividi poſſent.

Denique ſi corpora omnia in circuitu Terræ gravia eſſe in Terram, idque pro quantitate materiæ in ſingulis, & Lunam gravem eſſe in Terram pro quantitate materiæ ſuæ, & viciſſim mare noſtrum grave eſſe in Lunam, & Planetas omnes graves eſſe in ſe mutuo, & Cometarum ſimilem eſſe gravitatem, per experimenta & obſervationes Aſtronomicas univerſaliter conſtet: dicendum erit per hanc Regulam quod corpora omnia in ſe mutuo gravitant. Nam & fortius erit argumentum ex Phænomenis de gravitate univerſali, quam de corporum impenetrabilitate: de qua utique in corporibus Cœleſtibus nullum experimentum, nullam prorſus obſervationem habemus.

PHÆNO-

PHÆNOMENA.

PHÆNOMENON I.

Planetas Circumjoviales, radiis ad centrum Jovis ductis, areas describere temporibus proportionales, eorumque tempora periodica esse in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.

Constat ex observationibus Astronomicis. Orbes horum Planetarum non differunt sensibiliter a circulis Jovi concentricis, & motus eorum in his circulis uniformes deprehenduntur. Tempora vero periodica esse in sesquiplicata ratione semidiametrorum Orbium consentiunt Astronomi; & idem ex Tabula sequente manifestum est.

Satellitum Jovialium tempora periodica.

$1^d. 18^h. 27'. 34''.$ $3^d. 13^h. 13'. 42''.$ $7^d. 3^h. 42'. 36''.$ $16^d. 16^h. 32'. 9''.$

Distantiæ Satellitum a centro Jovis.

Ex observationibus	1	2	3	4	
Borelli	$5\frac{2}{3}$	$8\frac{2}{3}$	14	$24\frac{2}{3}$	Semidiam. Jovis.
Townlei *per Microm.*	5,52	8,78	13,47	24,72	
Cassini *per Telescop.*	5	8	13	23	
Cassini *per Eclips. Satell.*	$5\frac{2}{3}$	9	$14\frac{23}{60}$	$25\frac{3}{10}$	
Ex temporibus periodicis.	5,667	9,017	14,384	25,299	

PHÆNOMENON II.

Planetas Circumsaturnios, radiis ad Saturnum ductis, areas describere temporibus proportionales, & eorum tempora periodica esse in ratione sesquiplicata distantiarum ab ipsius centro.

Cassinus utique ex observationibus suis distantias eorum a centro Saturni & periodica tempora hujusmodi esse statuit.

Satelli-

Satellitum Saturniorum tempora periodica.

$1^d. 21^h. 19'.$ $2^d. 17^h. 41'.$ $4^d. 13^h. 47'.$ $15^d. 22^h. 41'.$ $79^d. 22^h. 4'.$

Distantiæ Satellitum a centro Saturni in semidiametris Annuli.

Ex observationibus	$1\frac{19}{20}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	8.	24.
Ex temporibus periodicis	1,95.	2,5.	3,52.	8,09.	23.71.

PHÆNOMENON III.

Planetas quinque primarios Mercurium, Venerem, Martem, Jovem & Saturnum Orbibus suis Solem cingere.

Mercurium & Venerem circa Solem revolvi ex eorum phasibus lunaribus demonstratur. Plena facie lucentes ultra Solem siti sunt, dimidiata e regione Solis, falcata cis Solem; per discum ejus ad modum macularum nonnunquam transeuntes. Ex Martis quoque plena facie prope Solis conjunctionem, & gibbosa in quadraturis, certum est quod is Solem ambit. De Jove etiam & Saturno idem ex eorum phasibus semper plenis demonstratur.

PHÆNOMENON IV.

Planetarum quinque primariorum, & (vel Solis circa Terram vel) Terræ circa Solem tempora periodica esse in ratione sesquiplicata mediocrium distantiarum à Sole.

Hæc a *Keplero* inventa ratio in confesso est apud omnes. Eadem utique sunt tempora periodica, eædemque orbium dimensiones, sive Sol circa Terram, sive Terra circa Solem revolvatur. Ac de mensura quidem temporum periodicorum convenit inter Astronomos universos. Magnitudines autem Orbium *Keplerus* & *Bullialdus* omnium diligentissime ex Observationibus determinaverunt: & distantiæ mediocres, quæ temporibus periodicis respondent, non differunt sensibiliter a distantiis quas illi invenerunt, suntque inter ipsas ut plurimum intermediæ; uti in Tabula sequente videre licet.

Plane-

Planetarum ac Telluris distantiæ mediocres à Sole.

	♄	♃	♂	♀	♀	☿
Secundum *Keplerum*	951000.	519650.	152350.	100000.	72400.	38806.
Secundum *Bullialdum*	954198.	522520.	152350.	100000.	72398.	38585.
Secundum tempora periodica	953806.	520116.	152399.	100000.	72333.	38710.

De distantiis Mercurii & Veneris a Sole disputandi non est locus, cum hæ per eorum Elongationes à Sole determinentur. De distantiis etiam superiorum Planetarum à Sole tollitur omnis disputatio per Eclipses Satellitum Jovis. Etenim per Eclipses illas determinatur positio umbræ quam Jupiter projicit, & eo nomine habetur Jovis longitudo Heliocentrica. Ex longitudinibus autem Heliocentrica & Geocentrica inter se collatis determinatur distantia Jovis.

PHÆNOMENON V.

Planetas primarios, radiis ad Terram ductis, areas describere temporibus minime proportionales; at radiis ad Solem ductis, areas temporibus proportionales percurrere.

Nam respectu Terræ nunc progrediuntur, nunc stationarii sunt, nunc etiam regrediuntur: At Solis respectu semper progrediuntur, idque propemodum uniformi cum motu, sed paulo celerius tamen in Periheliis ac tardius in Apheliis, sic ut arearum æquabilis sit descriptio. Propositio est Astronomis notissima, & in Jove apprime demonstratur per Eclipses Satellitum, quibus Eclipsibus Heliocentricas Planetæ hujus longitudines & distantias à Sole determinari diximus.

PHÆNOMENON VI.

Lunam radio ad centrum Terræ ducto, aream tempori proportionalem describere.

Patet ex Lunæ motu apparente cum ipsius diametro apparente collato. Perturbatur autem motus Lunaris aliquantulum à vi Solis, sed errorum insensibiles minutias in hisce Phænomenis negligo.

PROPOSITIONES.

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Vires, quibus Planetæ Circumjoviales perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis & in Orbibus suis retinentur, respicere centrum Jovis, & esse reciproce ut quadrata distantiarum locorum ab eodem centro.

Patet pars prior Propositionis per Phænomenon primum, & Propositionem secundam vel tertiam Libri primi: & pars posterior per Phænomenon primum, & Corollarium sextum Propositionis quartæ ejusdem Libri.

Idem intellige de Planetis qui Saturnum comitantur, per Phænomenon secundum.

PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Vires, quibus Planetæ primarii perpetuo retrahuntur à motibus rectilineis, & in Orbibus suis retinentur, respicere Solem, & esse reciproce ut quadrata distantiarum ab ipsius centro.

Patet pars prior Propositionis per Phænomenon quintum, & Propositionem secundam Libri primi: & pars posterior per Phænomenon quartum, & Propositionem quartam ejusdem Libri. Accuratissime autem demonstratur hæc pars Propositionis per quietem Apheliorum. Nam aberratio quam minima à ratione duplicata (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) motum Apsidum in singulis revolutionibus notabilem, in pluribus enormem efficere deberet.

PRO-

PROPOSITIO III. PROBLEMA III.

Vim qua Luna retinetur in Orbe suo respicere Terram, & esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Patet assertionis pars prior per Phænomenon sextum, & Propositionem secundam vel tertiam Libri primi: & pars posterior per motum tardissimum Lunaris Apogæi. Nam motus ille, qui singulis revolutionibus est graduum tantum trium & minutorum trium in consequentia, contemni potest. Patet enim (per Corol. 1. Prop. XLV. Lib. I.) quod si distantia Lunæ a centro Terræ sit ad semidiametrum Terræ ut D ad 1; vis a qua motus talis oriatur sit reciproce ut $D^{2\frac{4}{243}}$, id est, reciproce ut ea ipsius D dignitas cujus index est $2\frac{4}{243}$, hoc est, in ratione distantiæ paulo majore quam duplicata inverse, sed quæ partibus $59\frac{3}{4}$ propius ad duplicatam quam ad triplicatam accedit. Oritur vero ab actione Solis (uti posthac dicetur) & propterea hic negligendus est. Actio Solis quatenus Lunam distrahit a Terra, est ut distantia Lunæ a Terra quamproxime; ideoque (per ea quæ dicuntur in Corol. 2. Prop. XLV. Lib. I.) est ad Lunæ vim centripetam ut 2 ad 357,45 circiter, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Et neglecta Solis vi tantilla, vis reliqua qua Luna retinetur in Orbe erit reciproce ut D^2. Id quod etiam plenius constabit conferendo hanc vim cum vi gravitatis, ut fit in Propositione sequente.

Corol. Si vis centripeta mediocris qua Luna retinetur in Orbe, augeatur primo in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, deinde etiam in ratione duplicata semidiametri Terræ ad mediocrem distantiam centri Lunæ a centro Terræ: habebitur vis centripeta Lunaris ad superficiem Terræ, posito quod vis illa descendendo ad superficiem Terræ, perpetuo augeatur in reciproca altitudinis ratione duplicata.

PROPOSITIO IV. THEOREMA IV.

Lunam gravitare in Terram, & vi gravitatis retrahi semper a motu rectilineo, & in Orbe suo retineri.

Lunæ distantia mediocris a Terra in Syzygiis est semidiametrorum terrestrium, secundum plerosque Astronomorum 59, secundum *Vendelinum* 60, secundum *Copernicum* $60\frac{1}{3}$, & secundum *Ty-*

chonem $56\frac{1}{2}$. Ast *Tycho*, & quotquot ejus Tabulas refractionum sequuntur, constituendo refractiones Solis & Lunæ (omnino contra naturam Lucis) majores quam Fixarum, idque scrupulis quasi quatuor vel quinque, auxerunt parallaxin Lunæ scrupulis totidem, hoc est, quasi duodecima vel decima quinta parte totius parallaxeos. Corrigatur iste error, & distantia evadet quasi $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium, fere ut ab aliis assignatum est. Assumamus distantiam mediocrem sexaginta semidiametrorum; & Lunarem periodum respectu Fixarum compleri diebus 27, horis 7, minutis primis 43, ut ab Astronomis statuitur; atque ambitum Terræ esse pedum Parisiensium 123249600, uti a *Gallis* mensurantibus definitum est: Et si Luna motu omni privari fingatur ac dimitti ut, urgente vi illa omni qua in Orbe suo retinetur, descendat in Terram; hæc spatio minuti unius primi cadendo describet pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$. Colligitur hoc ex calculo vel per Propositionem XXXVI Libri primi, vel (quod eodem recidit) per Corollarium nonum Propositionis quartæ ejusdem Libri, confecto. Nam arcus illius quem Luna tempore minuti unius primi, medio suo motu, ad distantiam sexaginta semidiametrorum terrestrium describat, sinus versus est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$ circiter. Unde cum vis illa accedendo ad Terram augeatur in duplicata distantiæ ratione inversa, adeoque ad superficiem Terræ major sit partibus 60×60 quam ad Lunam; corpus vi illa in regionibus nostris cadendo, describere deberet spatio minuti unius primi pedes Parisienses $60 \times 60 \times 15\frac{1}{12}$, & spatio minuti unius secundi pedes $15\frac{1}{12}$. Atqui corpora in regionibus nostris vi gravitatis cadendo, describunt tempore minuti unius secundi pedes Parisienses $15\frac{1}{12}$, uti *Hugenius* factis pendulorum experimentis & computo inde inito, demonstravit: & propterea (per Reg. I. & II.) vis qua Luna in orbe suo retinetur, illa ipsa est quam nos Gravitatem dicere solemus. Nam si Gravitas ab ea diversa est, corpora viribus utrisque conjunctis Terram petendo, duplo velocius descendent, & spatio minuti unius secundi cadendo describent pedes Parisienses $30\frac{1}{6}$: omnino contra Experientiam.

Calculus hic fundatur in hypothesi quod Terra quiescit. Nam si Terra & Luna circum Solem moveantur, & interea quoque circum commune gravitatis centrum revolvantur: distantia centrorum Lunæ ac Terræ ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum terrestrium; uti computationem (per Prop. LX. Lib. I.) ineunti patebit.

PRO-

PROPOSITIO V. THEOREMA V.

Planetas Circumjoviales gravitare in Jovem, Circumsaturnios in Saturnum, & Circumsolares in Solem, & vi gravitatis suæ retrahi semper à motibus rectilineis, & in Orbibus curvilineis retineri.

Nam revolutiones Planetarum Circumjovialium circa Jovem, Circumsaturniorum circa Saturnum, & Mercurii ac Veneris reliquorumque Circumsolarium circa Solem sunt Phænomena ejusdem generis cum revolutione Lunæ circa Terram; & propterea per Reg. 11. à causis ejusdem generis dependent: præsertim cum demonstratum sit quod vires, à quibus revolutiones illæ dependent, respiciant centra Jovis, Saturni ac Solis, & recedendo à Jove, Saturno & Sole decrescant eadem ratione ac lege, qua vis gravitatis decrescit in recessu à Terra.

Corol. 1. Gravitas igitur datur in Planetas universos. Nam Venerem, Mercurium, cæterosque esse corpora ejusdem generis cum Jove & Saturno, nemo dubitat. Et cum attractio omnis (per motus Legem tertiam) mutua sit, Jupiter in Satellites suos omnes, Saturnus in suos, Terraque in Lunam, & Sol in Planetas omnes primarios gravitabit.

Corol. 2. Gravitatem, quæ Planetam unumquemque respicit, esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum ab ipsius centro.

Corol. 3. Graves sunt Planetæ omnes in se mutuo per Corol. 1. & 2. Et hinc Jupiter & Saturnus prope conjunctionem se invicem attrahendo, sensibiliter perturbant motus mutuos, Sol perturbat motus Lunares, Sol & Luna perturbant Mare nostrum, ut in sequentibus explicabitur.

PROPOSITIO VI. THEOREMA VI.

Corpora omnia in Planetas singulos gravitare, & pondera eorum in eundem quemvis Planetam, paribus distantiis à centro Planetæ, proportionalia esse quantitati materiæ in singulis.

Descensus gravium omnium in Terram (dempta saltem inæquali retardatione quæ ex Aeris perexigua resistentia oritur) æqualibus tempo-

De Mundi Systemate. temporibus fieri, jamdudum observarunt alii; & accuratissime quidem notare licet æqualitatem temporum in Pendulis. Rem tentavi in Auro, Argento, Plumbo, Vitro, Arena, Sale communi, Ligno, Aqua, Tritico. Comparabam pyxides duas ligneas rotundas & æquales. Unam implebam Ligno, & idem Auri pondus suspendebam (quam potui exacte) in alterius centro oscillationis. Pyxides ab æqualibus pedum undecim filis pendentes, constituebant Pendula, quoad pondus, figuram, & aeris resistentiam omnino paria: Et paribus oscillationibus, juxta positæ, ibant una & redibant diutissime. Proinde copia materiæ in Auro (per Corol. 1. & 6. Prop. XXIV. Lib. II.) erat ad copiam materiæ in Ligno, ut vis motricis actio in totum Aurum ad ejusdem actionem in totum Lignum; hoc est, ut pondus ad pondus. Et sic in cæteris. In corporibus ejusdem ponderis differentia materiæ, quæ vel minor esset quam pars millesima materiæ totius, his experimentis manifesto deprehendi potuit. Jam vero naturam gravitatis in Planetas eandem esse atque in Terram, non est dubium. Elevari enim fingantur corpora hæc Terrestria ad usque Orbem Lunæ, & una cum Luna motu omni privata demitti, ut in Terram simul cadant; & per jam ante ostensa certum est quod temporibus æqualibus describent æqualia spatia cum Luna, adeoque quod sunt ad quantitatem materiæ in Luna, ut pondera sua ad ipsius pondus. Porro quoniam Satellites Jovis temporibus revolvuntur quæ sunt in ratione sesquiplicata distantiarum à centro Jovis, erunt eorum gravitates acceleratrices in Jovem reciproce ut quadrata distantiarum à centro Jovis; & propterea in æqualibus a Jove distantiis, eorum gravitates acceleratrices evaderent æquales. Proinde temporibus æqualibus ab æqualibus altitudinibus cadendo, describerent æqualia spatia; perinde ut fit in gravibus, in hac Terra nostra. Et eodem argumento Planetæ circumsolares ab æqualibus à Sole distantiis demissi, descensu suo in Solem æqualibus temporibus æqualia spatia describerent. Vires autem, quibus corpora inæqualia æqualiter accelerantur, sunt ut corpora; hoc est, pondera ut quantitates materiæ in Planetis. Porro Jovis & ejus Satellitum pondera in Solem proportionalia esse quantitatibus materiæ eorum, patet ex motu Satellitum quam maxime regulari; per Corol. 3. Prop. LXV. Lib. I. Nam si horum aliqui magis traherentur in Solem, pro quantitate materiæ suæ, quam cæteri: motus Satellitum (per Corol. 2. Prop. LXV. Lib. I.) ex inæqualitate attractionis perturbarentur. Si (paribus à Sole distantiis) Satelles aliquis gravior esset in Solem pro quantitate

titate materiæ suæ, quam Jupiter pro quantitate materiæ suæ, in ratione quacunque data, puta *d* ad *e*: distantia inter centrum Solis & centrum Orbis Satellitis, major semper foret quam distantia inter centrum Solis & centrum Jovis in ratione subduplicata quam proxime; uti calculis quibusdam initis inveni. Et si Satelles minus gravis esset in Solem in ratione illa *d* ad *e*, distantia centri Orbis Satellitis à Sole minor foret quam distantia centri Jovis à Sole in ratione illa subduplicata. Igitur si in æqualibus à Sole distantiis, gravitas acceleratrix Satellitis cujusvis in Solem major esset vel minor quam gravitas acceleratrix Jovis in Solem, parte tantum millesima gravitatis totius; foret distantia centri Orbis Satellitis à Sole major vel minor quam distantia Jovis à Sole parte $\frac{1}{2000}$ distantiæ totius, id est, parte quinta distantiæ Satellitis extimi à centro Jovis: Quæ quidem Orbis eccentricitas foret valde sensibilis. Sed Orbes Satellitum sunt Jovi concentrici, & propterea gravitates acceleratrices Jovis & Satellitum in Solem æquantur inter se. Et eodem argumento pondere Saturni & Comitum ejus in Solem, in æqualibus à Sole distantiis, sunt ut quantitates materiæ in ipsis: Et pondera Lunæ ac Terræ in Solem vel nulla sunt, vel earum massis accurate proportionalia. Aliqua autem sunt per Corol. 1. & 3. Prop. v.

Quinetiam pondera partium singularum Planetæ cujusque in alium quemcunque, sunt inter se ut materia in partibus singulis. Nam si partes aliquæ plus gravitarent, aliæ minus, quam pro quantitate materiæ: Planeta totus, pro genere partium quibus maxime abundet, gravitaret magis vel minus quam pro quantitate materiæ totius. Sed nec refert utrum partes illæ externæ sint vel internæ. Nam si verbi gratia corpora Terrestria, quæ apud nos sunt, in Orbem Lunæ elevari fingantur, & conferantur cum corpore Lunæ: Si horum pondera essent ad pondera partium externarum Lunæ ut quantitates materiæ in iisdem, ad pondera vero partium internarum in majori vel minori ratione, forent eadem ad pondus Lunæ totius in majori vel minori ratione: contra quam supra ostensum est.

Corol. 1. Hinc pondera corporum non pendent ab eorum formis & texturis. Nam si cum formis variari possent; forent majora vel minora, pro varietate formarum, in æquali materia: omnino contra Experientiam.

Corol.

Corol. 2. Corpora universa quæ circa Terram sunt, gravia sunt in Terram; & pondera omnium, quæ æqualiter à centro Terræ distant, sunt ut quantitates materiæ in iisdem. Hæc est qualitas omnium in quibus experimenta instituere licet, & propterea per Reg. III. de universis affirmanda est. Si Æther aut corpus aliud quodcunque vel gravitate omnino destitueretur, vel pro quantitate materiæ suæ minus gravitaret: quoniam id (ex mente *Aristotelis*, *Cartesii* & aliorum) non differt ab aliis corporibus nisi in forma materiæ, posset idem per mutationem formæ gradatim transmutari in corpus ejusdem conditionis cum iis quæ, pro quantitate materiæ, quam maxime gravitant, & vicissim corpora maxime gravia, formam illius gradatim induendo, possent gravitatem suam gradatim amittere. Ac proinde pondera penderent à formis corporum, possentque cum formis variari, contra quam probatum est in Corollario superiore.

Corol. 3. Spatia omnia non sunt æqualiter plena. Nam si spatia omnia æqualiter plena essent, gravitas specifica fluidi quo regio aeris impleretur, ob summam densitatem materiæ, nil cederet gravitati specificæ argenti vivi, vel auri, vel corporis alterius cujuscunque densissimi; & propterea nec aurum neque aliud quodcunque corpus in aere descendere posset. Nam corpora in fluidis, nisi specifice graviora sint, minime descendunt. Quod si quantitas materiæ in spatio dato per rarefactionem quamcunque diminui possit, quidni diminui possit in infinitum?

Corol. 4. Si omnes omnium corporum particulæ solidæ sint ejusdem densitatis, neque absque poris rarefieri possint, Vacuum datur. Ejusdem densitatis esse dico, quarum vires inertiæ sunt ut magnitudines.

Corol. 5. Vis gravitatis diversi est generis à vi magnetica. Nam attractio magnetica non est ut materia attracta. Corpora aliqua magis trahuntur, alia minus, plurima non trahuntur. Et vis magnetica in uno & eodem corpore intendi potest & remitti, estque nonnunquam longe major pro quantitate materiæ quam vis gravitatis, & in recessu à Magnete decrescit in ratione distantiæ non duplicata, sed fere triplicata, quantum ex crassis quibusdam observationibus animadvertere potui.

PRO-

PROPOSITIO VII. THEOREMA VII.

Gravitatem in corpora universa fieri, eamque proportionalem esse quantitati materiæ in singulis.

Planetas omnes in se mutuo graves esse jam ante probavimus, ut & gravitatem in unumquemque seorsim spectatum esse reciproce ut quadratum distantiæ locorum à centro Planetæ. Et inde consequens est, (per Prop. LXIX. Lib. I. & ejus Corollaria) gravitatem in omnes proportionalem esse materiæ in iisdem.

Porro cum Planetæ cujusvis *A* partes omnes graves sint in Planetam quemvis *B*, & gravitas partis cujusque sit ad gravitatem totius, ut materia partis ad materiam totius, & actioni omni reactio (per motus Legem tertiam) æqualis sit; Planeta *B* in partes omnes Planetæ *A* vicissim gravitabit, & erit gravitas sua in partem unamquamque ad gravitatem suam in totum, ut materia partis ad materiam totius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Oritur igitur & componitur gravitas in Planetam totum ex gravitate in partes singulas. Cujus rei exempla habemus in attractionibus Magneticis & Electricis. Oritur enim attractio omnis in totum ex attractionibus in partes singulas. Res intelligetur in gravitate, concipiendo Planetas plures minores in unum Globum coire & Planetam majorem componere. Nam vis totius ex viribus partium componentium oriri debebit. Siquis objiciat quod corpora omnia, quæ apud nos sunt, hac lege gravitare deberent in se mutuo, cum tamen ejusmodi gravitas neutiquam sentiatur: Respondeo quod gravitas in hæc corpora, cum sit ad gravitatem in Terram totam ut sunt hæc corpora ad Terram totam, longe minor est quam quæ sentiri possit.

Corol. 2. Gravitatio in singulas corporis particulas æquales est reciproce ut quadratum distantiæ locorum à particulis. Patet per Corol. 3. Prop. LXXIV. Lib. I.

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VIII.

Si Globorum duorum in se mutuo gravitantium materia undique, in regionibus quæ a centris æqualiter distant, homogenea sit: erit pondus Globi alterutrius in alterum reciproce ut quadratum distantiæ inter centra.

Postquam invenissem gravitatem in Planetam totum oriri & componi ex gravitatibus in partes; & esse in partes singulas reciproce proportionalem quadratis distantiarum à partibus: dubitabam an reciproca illa proportio duplicata obtineret accurate in vi tota ex viribus pluribus composita, an vero quam proxime. Nam fieri posset ut proportio, quæ in majoribus distantiis satis accurate obtineret, prope superficiem Planetæ ob inæquales particularum distantias & situs dissimiles, notabiliter erraret. Tandem vero, per Prop. LXXV. & LXXVI. Libri primi & ipsarum Corollaria, intellexi veritatem Propositionis de qua hic agitur.

Corol. 1. Hinc inveniri & inter se comparari possunt pondera corporum in diversos Planetas. Nam pondera corporum æqualium circum Planetas in circulis revolventium sunt (per Corol. 2. Prop. IV. Lib. I.) ut diametri circulorum directe & quadrata temporum periodicorum inverse; & pondera ad superficies Planetarum, aliasve quasvis à centro distantias, majora sunt vel minora (per hanc Propositionem) in duplicata ratione distantiarum inversa. Sic ex temporibus periodicis Veneris circum Solem dierum 224 & horarum $16\frac{3}{4}$, Satellitis extimi circumjovialis circum Jovem dierum 16 & horarum $16\frac{8}{15}$, Satellitis Hugeniani circum Saturnum dierum 15 & horarum $22\frac{2}{3}$, & Lunæ circum Terram dierum 27, hor. 7. min. 43, collatis cum distantia mediocri Veneris a Sole & cum elongationibus maximis heliocentricis Satellitis extimi circumjovialis a centro Jovis 8′. $21\frac{1}{2}$″, Satellitis Hugeniani a centro Saturni 3′. 20″, & Lunæ a Terra 10′, computum ineundo inveni quod corporum æqualium & a Sole, Jove, Saturno ac Terra æqualiter distantium pondera in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram forent ad invicem ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective. Est enim parallaxis Solis ex observationibus novissimis quasi 10″, & *Halleius* noster per emersiones Jovis & Satellitum e parte obscura Lunæ,

Lunæ, determinavit quod elongatio maxima heliocentrica Satellitis extimi Jovialis a centro Jovis in mediocri Jovis a Sole distantia sit 8′. 21½″, & diameter Jovis 41″. Ex duratione Eclipseon Satellitum in umbram Jovis incidentium prodit hæc diameter quasi 40″, atque adeo semidiameter 20″. Mensuravit autem *Hugenius* elongationem maximam heliocentricam Satellitis a se detecti 3′. 20″ a centro Saturni, & hujus elongationis pars quarta, nempe 50″, est diameter annuli Saturni e Sole visi, & diameter Saturni est ad diametrum annuli ut 4 ad 9, ideoque semidiameter Saturni e Sole visi est 11″. Subducatur lux erratica quæ haud minor esse solet quam 2″. vel 3″: Et manebit semidiameter Saturni quasi 9″. Ex hisce autem & Solis semidiametro mediocri 16′. 6″ computum ineundo prodeunt veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ semidiametri ad invicem ut 10000, 1077, 889 & 104. Unde, cum pondera æqualium corporum a centris Solis, Jovis, Saturni ac Terræ æqualiter distantium, sint in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram, ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$ & $\frac{1}{227512}$ respective, & auctis vel diminutis distantiis pondera diminuantur vel augeantur in duplicata ratione: pondera æqualium corporum in Solem, Jovem, Saturnum ac Terram in distantiis 10000, 1077, 889, & 104 ab eorum centris, atque adeo in eorum superficiebus, erunt ut 10000, 835, 525, & 410 respective. Quanta sint pondera corporum in superficie Lunæ dicemus in sequentibus.

Corol. 2. Innotescit etiam quantitas materiæ in Planetis singulis. Nam quantitates materiæ in Planetis sunt ut eorum vires in æqualibus distantiis ab eorum centris, id est, in Sole, Jove, Saturno ac Terra sunt ut 1, $\frac{1}{1033}$, $\frac{1}{2411}$, & $\frac{1}{227512}$ respective. Si parallaxis Solis statuatur major vel minor quam 10″, debebit quantitas materiæ in Terra augeri vel diminui in triplicata ratione.

Corol. 3. Innotescunt etiam densitates Planetarum. Nam pondera corporum æqualium & homogeneorum in Sphæras homogeneas sunt in superficiebus Sphærarum ut Sphærarum diametri, per Prop. LXXII. Lib. I. ideoque Sphærarum heterogenearum densitates sunt ut pondera illa applicata ad Sphærarum diametros. Erant autem veræ Solis, Jovis, Saturni ac Terræ diametri ad invicem ut 10000, 1077, 889, & 104, & pondera in eosdem ut 10000, 835, 525, & 410, & propterea densitates sunt ut 100, 78, 59, & 396. Densitas Terræ quæ prodit ex hoc computo non pendet a parallaxi Solis, sed determinatur per parallaxin Lunæ, & prop-

terea hic recte definitur. Est igitur Sol paulo densior quam Jupiter, & Jupiter quam Saturnus, & Terra quadruplo densior quam Sol. Nam per ingentem suum calorem Sol rarescit. Luna vero densior est quam Terra, ut in sequentibus patebit.

Corol. 4. Densiores igitur sunt Planetæ qui sunt minores, cæteris paribus. Sic enim vis gravitatis in eorum superficiebus ad æqualitatem magis accedit. Sed & densiores sunt Planetæ, cæteris paribus, qui sunt Soli propiores; ut Jupiter Saturno, & Terra Jove. In diversis utique distantiis a Sole collocandi erant Planetæ ut quilibet pro gradu densitatis calore Solis majore vel minore frueretur. Aqua nostra, si Terra locaretur in orbe Saturni, rigesceret, si in orbe Mercurii in vapores statim abiret. Nam lux Solis, cui calor proportionalis est, septuplo densior est in orbe Mercurii quam apud nos: & Thermometro expertus sum quod septuplo Solis æstivi calore aqua ebullit. Dubium vero non est quin materia Mercurii ad calorem accommodetur, & propterea densior sit hac nostra; cum materia omnis densior ad operationes Naturales obeundas majorem calorem requirat.

PROPOSITIO IX. THEOREMA IX.

Gravitatem pergendo a superficiebus Planetarum deorsum decrescere in ratione distantiarum a centro quam proxime.

Si materia Planetæ quoad densitatem uniformis esset, obtineret hæc Propositio accurate: per Prop. LXXIII. Lib. I. Error igitur tantus est, quantus ab inæquabili densitate oriri possit.

PROPOSITIO X. THEOREMA X.

Motus Planetarum in Cœlis diutissime conservari posse.

In Scholio Propositionis XL. Lib. II. ostensum est quod globus Aquæ congelatæ in Aere nostro, libere movendo & longitudinem semidiametri suæ describendo, ex resistentia Aeris amitteret motus sui partem $\frac{1}{4586}$. Obtinet autem eadem proportio quam proxime in globis utcunque magnis & velocibus. Jam vero Globum Terræ nostræ densiorem esse quam si totus ex Aqua constaret, sic colligo. Si Globus hicce totus esset aqueus, quæcunque rariora essent quam aqua, ob minorem specificam gravitatem emergerent & supernatarent.

rent. Eaque de Caufa Globus terreus aquis undique coopertus, fi rarior effet quam aqua, emergeret alicubi, & aqua omnis inde defluens congregaretur in regione oppofita. Et par eft ratio Terræ noftræ maribus magna ex parte circumdatæ. Hæc fi denfior non effet, emergeret ex maribus, & parte fui pro gradu levitatis extaret ex Aqua, maribus omnibus in regionem oppofitam confluentibus. Eodem argumento maculæ Solares leviores funt quam materia lucida Solaris cui fupernatant. Et in formatione qualicumque Planetarum, materia omnis gravior, quo tempore maffa tota fluida erat, centrum petebat. Unde cum Terra communis fuprema quafi duplo gravior fit quam aqua, & paulo inferius in fodinis quafi triplo vel quadruplo aut etiam quintuplo gravior reperiatur: verifimile eft quod copia materiæ totius in Terra quafi quintuplo vel fextuplo major fit quam fi tota ex aqua conftaret; præfertim cum Terram quafi quintuplo denfiorem effe quam Jovem jam ante oftenfum fit. Igitur fi Jupiter paulo denfior fit quam aqua, hic fpatio dierum triginta, quibus longitudinem 459 femidiametrorum fuarum defcribit, amitteret in Medio ejufdem denfitatis cum Aere noftro motus fui partem fere decimam. Verum cum refiftentia Mediorum minuatur in ratione ponderis ac denfitatis, fic ut aqua, quæ partibus $13\frac{2}{3}$ levior eft quam argentum vivum, minus refiftat in eadem ratione; & aer, qui partibus 850 levior eft quam aqua, minus refiftat in eadem ratione: fi afcendatur in cœlos ubi pondus Medii, in quo Planetæ moventur, diminuitur in immenfum, refiftentia prope ceffabit.

HYPOTHESIS I.

Centrum Syftematis Mundani quiefcere.

Hoc ab omnibus conceffum eft, dum aliqui Terram alii Solem in centro Syftematis quiefcere contendant. Videamus quid inde fequatur.

PROPOSITIO XI. THEOREMA XI.

Commune centrum gravitatis Terræ, Solis & Planetarum omnium quiefcere.

Nam centrum illud (per Legum Corol. 4.) vel quiefcet vel progredietur uniformiter in directum. Sed centro illo femper

Aaa 3 pro-

De Mundi Systemate. progrediente, centrum Mundi quoque movebitur contra Hypothesin.

PROPOSITIO XII. THEOREMA XII.

Solem motu perpetuo agitari, sed nunquam longe recedere a communi gravitatis centro Planetarum omnium.

Nam cum (per Corol. 2. Prop. VIII.) materia in Sole sit ad materiam in Jove ut 1033 ad 1, & distantia Jovis a Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo majore; incidet commune centrum gravitatis Jovis & Solis in punctum paulo supra superficiem Solis. Eodem argumento cum materia in Sole sit ad materiam in Saturno ut 2411 ad 1, & distantia Saturni a Sole sit ad semidiametrum Solis in ratione paulo minore; incidet commune centrum gravitatis Saturni & Solis in punctum paulo infra superficiem Solis. Et ejusdem calculi vestigiis insistendo si Terra & Planetæ omnes ex una Solis parte consisterent, commune omnium centrum gravitatis vix integra Solis diametro a centro Solis distaret. Aliis in casibus distantia centrorum semper minor est. Et propterea cum centrum illud gravitatis perpetuo quiescit, Sol pro vario Planetarum situ in omnes partes movebitur, sed à centro illo nunquam longe recedet.

Corol. Hinc commune gravitatis centrum Terræ, Solis & Planetarum omnium pro centro Mundi habendum est. Nam cum Terra, Sol & Planetæ omnes gravitent in se mutuo, & propterea, pro vi gravitatis suæ, secundum leges motus perpetuo agitentur: perspicuum est quod horum centra mobilia pro Mundi centro quiescente haberi nequeunt. Si corpus illud in centro locandum esset in quod corpora omnia maxime gravitant (uti vulgi est opinio) privilegium istud concedendum esset Soli. Cum autem Sol moveatur, eligendum erit punctum quiescens, a quo centrum Solis quam minime discedit; & a quo idem adhuc minus discederet, si modo Sol densior esset & major, ut minus moveretur.

PRO-

PROPOSITIO XIII. THEOREMA XIII.

Planetæ moventur in Ellipsibus umbilicum habentibus in centro Solis, & radiis ad centrum illud ductis areas describunt temporibus proportionales.

Disputavimus supra de his motibus ex Phænomenis. Jam cognitis motuum principiis, ex his colligimus motus cœlestes a priori. Quoniam pondera Planetarum in Solem sunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro Solis; si Sol quiesceret & Planetæ reliqui non agerent in se mutuo; forent orbes eorum Elliptici, Solem in umbilico communi habentes, & areæ describerentur temporibus proportionales (per Prop. I. & XI, & Corol. I. Prop. XIII. Lib. I.) Actiones autem Planetarum in se mutuo perexiguæ sunt (ut possint contemni) & motus Planetarum in Ellipsibus circa Solem mobilem minus perturbant (per Prop. LXVI. Lib. I.) quam si motus isti circa Solem quiescentem peragerentur.

Actio quidem Jovis in Saturnum non est omnino contemnenda. Nam gravitas in Jovem est ad gravitatem in Solem (paribus distantiis) ut 1 ad 1033; adeoque in conjunctione Jovis & Saturni, quoniam distantia Saturni a Jove est ad distantiam Saturni a Sole fere ut 4 ad 9, erit gravitas Saturni in Jovem ad gravitatem Saturni in Solem ut 81 ad 16×1033 seu 1 ad 204 circiter. Et hinc oritur perturbatio orbis Saturni in singulis Planetæ hujus cum Jove conjunctionibus adeo sensibilis ut ad eandem Astronomi hæreant. Pro vario situ Planetæ in his conjunctionibus, Eccentricitas ejus nunc augetur nunc diminuitur, Aphelium nunc promovetur nunc forte retrahitur, & medius motus per vices acceleratur & retardatur. Error tamen omnis in motu ejus circum Solem a tanta vi oriundus (præterquam in motu medio) evitari fere potest constituendo umbilicum inferiorem Orbis ejus in communi centro gravitatis Jovis & Solis (per Prop. LXVII. Lib. I.) & propterea ubi maximus est, vix superat minuta duo prima. Et error maximus in motu medio vix superat minuta duo prima annuatim. In conjunctione autem Jovis & Saturni gravitates acceleratrices Solis in Saturnum, Jovis in Saturnum & Jovis in Solem sunt fere ut 16, 81 & $\frac{16 \times 81 \times 2411}{25}$ seu 124986, adeoque differentia gravitatum Solis in Saturnum & Jovis in Saturnum est ad gravitatem

Jovis

 Jovis in Solem ut 65 ad 124986 seu 1 ad 1923. Huic autem differentiæ proportionalis est maxima Saturni efficacia ad perturbandum motum Jovis, & propterea perturbatio orbis Jovialis longe minor est quam ea Saturnii. Reliquorum orbium perturbationes sunt adhuc longe minores, præterquam quod Orbis Terræ sensibiliter perturbatur a Luna. Commune centrum gravitatis Terræ & Lunæ, Ellipsin circum Solem in umbilico positum percurrit, & radio ad Solem ducto areas in eadem temporibus proportionales describit, Terra vero circum hoc centrum commune motu menstruo revolvitur.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XIV.

Orbium Aphelia & Nodi quiescunt.

Aphelia quiescunt, per Prop. XI. Lib. I. ut & Orbium plana, per ejusdem Libri Prop. I. & quiescentibus planis quiescunt Nodi. Attamen a Planetarum revolventium & Cometarum actionibus in se invicem orientur inæqualitates aliquæ, sed quæ ob parvitatem hic contemni possunt.

Corol. 1. Quiescunt etiam Stellæ fixæ, propterea quod datas ad Aphelia Nodosque positiones servant.

Corol. 2. Ideoque cum nulla sit earum parallaxis sensibilis ex Terræ motu annuo oriunda, vires earum ob immensam corporum distantiam nullos edent sensibiles effectus in regione Systematis nostri. Quinimo Fixæ in cœli partes æqualiter dispersæ contrariis attractionibus vires mutuas destruunt, per Prop. LXX. Lib. I.

Scholium.

Cum Planetæ Soli propiores (nempe Mercurius, Venus, Terra, & Mars) ob corporum parvitatem parum agant in se invicem: horum Aphelia & Nodi quiescent, nisi quatenus a viribus Jovis, Saturni, & corporum superiorum turbentur. Et inde colligi potest per theoriam gravitatis, quod horum Aphelia moventur aliquantulum in consequentia respectu fixarum, idque in proportione sesquiplicata distantiarum horum Planetarum a Sole. Ut si Aphelium Martis in annis centum conficiat 35′ in consequentia respectu fixarum; Aphelia Terræ, Veneris, & Mercurii in annis centum conficient 18′, 36″, 11′. 27″, & 4′. 29″ respective. Et hi motus, ob parvitatem, negliguntur in hac Propositione.

PRO-

PROPOSITIO XV. PROBLEMA I.

Invenire Orbium principales diametros.

Capiendæ sunt hæ in ratione subsesquiplicata temporum periodicorum, per Prop. xv. Lib. I. deinde sigillatim augendæ in ratione summæ massarum Solis & Planetæ cujusque revolventis ad primam duarum medie proportionalium inter summam illam & Solem, per Prop. LX. Lib. I.

PROPOSITIO XVI. PROBLEMA II.

Invenire Orbium Eccentricitates & Aphelia.

Problema consit per Prop. XVIII. Lib. I.

PROPOSITIO XVII. THEOREMA XV.

Planetarum motus diurnos uniformes esse, & librationem Lunæ ex ipsius motu diurno oriri.

Patet per motus Legem I. & Corol. 22. Prop. LXVI. Lib. I. Quoniam vero Lunæ, circa axem suum uniformiter revolventis, dies menstruus est; hujus facies eadem ulteriorem umbilicum orbis ipsius semper respiciet, & propterea pro situ umbilici illius deviabit hinc inde a Terra. Hæc est libratio in longitudinem. Nam libratio in latitudinem orta est ex inclinatione axis Lunaris ad planum orbis. Porro hæc ita se habere, ex Phænomenis manifestum est.

PROPOSITIO XVIII. THEOREMA XVI.

Axes Planetarum diametris quæ ad eosdem axes normaliter ducuntur minores esse.

Planetæ sublato omni motu circulari diurno figuram Sphæricam, ob æqualem undique partium gravitatem, affectare deberent. Per motum illum circularem fit ut partes ab axe recedentes juxta æquatorem ascendere conentur. Ideoque materia si fluida sit

De Mundi Systemate. ascensu suo ad æquatorem diametros adaugebit, axem vero descensu suo ad polos diminuet. Sic Jovis diameter (consentientibus Astronomorum observationibus) brevior deprehenditur inter polos quam ab oriente in occidentem. Eodem argumento, nisi Terra nostra paulo altior esset sub æquatore quam ad polos, Maria ad polos subsiderent, & juxta æquatorem ascendendo, ibi omnia inundarent.

PROPOSITIO XIX. PROBLEMA III.

Invenire proportionem axis Planetæ ad diametros eidem perpendiculares.

Picartus mensurando arcum gradus unius & 22′. 55″ inter *Ambianum* & *Malvoisinam*, invenit arcum gradus unius esse hexapedarum Parisiensium 57060. Unde ambitus Terræ est pedum Parisiensium 123249600, ut supra. Sed cum error quadringentesimæ partis digiti, tam in fabrica instrumentorum quam in applicatione eorum ad observationes capiendas, sit insensibilis, & in Sectore decempedali quo *Galli* observarunt Latitudines locorum respondeat minutis quatuor secundis, & in singulis observationibus incidere possit tam ad centrum Sectoris quam ad ejus circumferentiam, & errores in minoribus arcubus sint majoris momenti: * ideo *Cassinus* jussu Regio mensuram Terræ per majora locorum intervalla aggressus est, & subinde per distantiam inter Observatorium Regium *Parisiense* & villam *Colioure* in *Roussillon* & Latitudinum differentiam 6gr. 18′, supponendo quod figura Terræ sit Sphærica, invenit gradum unum esse hexapedarum 57292, prope ut *Norwoodus* noster antea invenerat. Hic enim circa annum 1635, mensurando distantiam pedum Londinensium 905751 inter *Londinum* & *Eboracum*, & observando differentiam Latitudinum 2gr. 28′, collegit mensuram gradus unius esse pedum Londinensium 367196, id est, hexapedarum Parisiensium 57300. Ob magnitudinem intervalli a *Cassino* mensurati, pro mensura gradus unius in medio intervalli illius, id est, inter Latitudines 45gr. & 46gr. usurpabo hexapedas 57292. Unde, si Terra sit Sphærica, semidiameter ejus erit pedum Parisiensium 19695539.

* Vide Historiam Academiæ Regiæ scientiarum anno 1700.

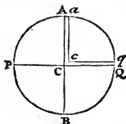
Penduli-

Penduli in Latitudine *Lutetiæ Parisiorum* ad minuta secunda oscillantis longitudo est pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{1}{2}$. Et longitudo quod grave tempore minuti unius secundi cadendo describit, est ad dimidiam longitudinem penduli hujus, in duplicata ratione circumferentiæ circuli ad diametrum ejus (ut indicavit *Hugenius*) ideoque est pedum Parisiensium 15, dig. 1, lin. $2\frac{1}{18}$, seu linearum $2174\frac{1}{18}$.

Corpus in circulo, ad distantiam pedum 19695539 a centro, singulis diebus sidereis horarum 23. 56′. 4″ uniformiter revolvens, tempore minuti unius secundi describit arcum pedum 1436,223, cujus sinus versus est pedum 0,05236558, seu linearum 7,54064. Ideoque vis qua gravia descendunt in Latitudine *Lutetiæ*, est ad vim centrifugam corporum in Æquatore, a Terræ motu diurno oriundam, ut $2174\frac{1}{18}$ ad 7,54064.

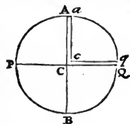
Vis centrifuga corporum in Æquatore, est ad vim centrifugam qua corpora directe tendunt a Terra in Latitudine *Lutetiæ* graduum 48. 50′, in duplicata ratione Radii ad sinum complementi Latitudinis illius, id est, ut 7,54064 ad 3,267. Addatur hæc vis ad vim qua gravia descendunt in Latitudine *Lutetiæ*, & corpus in Latitudine *Lutetiæ* vi tota gravitatis cadendo, tempore minuti unius secundi describeret lineas 2177,32, seu pedes Parisienses 15, dig. 1, & lin. 5,32. Et vis tota gravitatis in Latitudine illa, erit ad vim centrifugam corporum in Æquatore Terræ, ut 2177,32 ad 7,54064, seu 289 ad 1.

Unde si *APBQ* figuram Terræ designet jam non amplius Sphæricam sed revolutione Ellipseos circum axem minorem *PQ* genitam, sitque *ACQqca* canalis aquæ plena, a polo *Qq* ad centrum *Cc*, & inde ad Æquatorem *Aa* pergens: debebit pondus aquæ in canalis crure *ACca*, esse ad pondus aquæ in crure altero *QCcq* ut 289 ad 288, eo quod vis centrifuga ex circulari motu orta partem unam e ponderis partibus 289 sustinebit ac detrahet, & pondus 288 in altero crure sustinebit reliquas. Porro (ex Propositionis XCI. Corollario secundo, Lib. I.) computationem ineundo, invenio quod si Terra constaret ex uniformi materia, motuque omni privaretur, & esset ejus axis *PQ*



 ad

De Mundi Systemate. ad diametrum AB ut 100 ad 101: gravitas in loco Q in Terram, foret ad gravitatem in eodem loco Q in Sphæram centro C radio PC vel QC descriptam, ut 126 ad 125. Et eodem argumento gravitas in loco A in Sphæroidem, convolutione Ellipseos $APBQ$ circa axem AB descriptam, est ad gravitatem in eodem loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ut 125 ad 126. Est autem gravitas in loco A in Terram, media proportionalis inter gravitates in dictam Sphæroidem & Sphæram: propterea quod Sphæra, diminuendo diametrum PQ in ratione 101 ad 100, vertitur in figuram Terræ; & hæc figura diminuendo in eadem ratione diametrum tertiam, quæ diametris duabus AB, PQ perpendicularis est, vertitur in dictam Sphæroidem, & gravitas in A, in casu utroque, diminuitur in eadem ratione quam proxime. Est igitur gravitas in A in Sphæram centro C radio AC descriptam, ad gravitatem in A in Terram ut 126 ad $125\frac{1}{2}$, & gravitas in loco Q in Sphæram centro C radio QC descriptam, est ad gravitatem in loco A in Sphæram centro C radio AC descriptam, in ratione diametrorum (per Prop. LXXII. Lib. I.) id est, ut 100 ad 101. Conjungantur jam hæ tres rationes, 126 ad 125, 126 ad $125\frac{1}{2}$, & 100 ad 101: & fiet gravitas in loco Q in Terram, ad gravitatem in loco A in Terram, ut $126 \times 126 \times 100$ ad $125 \times 125\frac{1}{2} \times 101$, seu ut 501 ad 500.



Jam cum (per Corol. 3. Prop. XCI. Lib. I.) gravitas in canalis crure utrovis $ACca$ vel $QCcq$ sit ut distantia locorum a centro Terræ; si crura illa superficiebus transversis & æquidistantibus distinguantur in partes totis proportionales, erunt pondera partium singularum in crure $ACca$ ad pondera partium totidem in crure altero, ut magnitudines & gravitates acceleratrices conjunctim; id est, ut 101 ad 100 & 500 ad 501, hoc est, ut 505 ad 501. Ac proinde si vis centrifuga partis cujusque in crure $ACca$ ex motu diurno oriunda, fuisset ad pondus partis ejusdem ut 4 ad 505, eo ut de pondere partis cujusque, in partes 505 diviso, partes quatuor detraheret; manerent pondera in utroque crure æqualia, & propterea fluidum consisteret in æquilibrio. Verum vis centrifuga partis cujusque est ad pondus ejusdem ut 1 ad 289, hoc est, vis centrifuga quæ deberet esse ponderis pars $\frac{4}{505}$ est tantum pars $\frac{1}{289}$.

Et

Et propterea dico, secundum Regulam auream, quod si vis centrifuga $\frac{4}{505}$ faciat ut altitudo aquæ in crure *ACca* superet altitudinem aquæ in crure *QCcq* parte centesima totius altitudinis: vis centrifuga $\frac{1}{289}$ faciet ut excessus altitudinis in crure *ACca* sit altitudinis in crure altero *QCcq* pars tantum $\frac{1}{229}$. Est igitur diameter Terræ secundum æquatorem ad ipsius diametrum per polos ut 230 ad 229. Ideoque cum Terræ semidiameter mediocris, juxta mensuram *Cassini*, sit pedum Parisiensium 19695539, seu milliarium 3939 (posito quod milliare sit mensura pedum 5000) Terra altior erit ad Æquatorem quam ad Polos excessu pedum 85820, seu milliarium $17\frac{1}{6}$.

Si Planeta major sit vel minor quam Terra manente ejus densitate ac tempore periodico revolutionis diurnæ, manebit proportio vis centrifugæ ad gravitatem, & propterea manebit etiam proportio diametri inter polos ad diametrum secundum æquatorem. At si motus diurnus in ratione quacunque acceleretur vel retardetur, augebitur vel minuetur vis centrifuga in duplicata illa ratione, & propterea differentia diametrorum augebitur vel minuetur in eadem duplicata ratione quamproxime. Et si densitas Planetæ augeatur vel minuatur in ratione quavis, gravitas etiam in ipsum tendens augebitur vel minuetur in eadem ratione, & differentia diametrorum vicissim minuetur in ratione gravitatis auctæ vel augebitur in ratione gravitatis diminutæ. Unde cum Terra respectu fixarum revolvatur horis 23. 56′, Jupiter autem horis 9. 56′, sintque temporum quadrata ut 29 ad 5, & densitates ut 5 ad 1: differentia diametrorum Jovis erit ad ipsius diametrum minorem ut $\frac{29}{5}\times\frac{5}{1}\times\frac{1}{229}$ ad 1, seu 1 ad 8 quamproxime. Est igitur diameter Jovis ab oriente in occidentem ducta, ad ejus diametrum inter polos ut 9 ad 8 quamproxime, & propterea diameter inter polos est $35\frac{1}{2}''$. Hæc ita se habent ex hypothesi quod uniformis sit Planetarum materia. Nam si materia densior sit ad centrum quam ad circumferentiam; diameter quæ ab oriente in occidentem ducitur, erit adhuc major.

Jovis vero diametrum quæ polis ejus interjacet minorem esse diametro altera *Cassinus* dudum observavit, & Terræ diametrum inter polos minorem esse diametro altera patebit per ea quæ dicentur in Propositione sequente.

PROPOSITIO XX. PROBLEMA IV.

Invenire & inter se comparare Pondera corporum in Terræ hujus regionibus diversis.

Quoniam pondera inæqualium crurum canalis aqueæ *ACQqca* æqualia sunt; & pondera partium, cruribus totis proportionalium & similiter in totis sitarum, sunt ad invicem ut pondera totorum, cruribus similiter sitarum partium reciproce ut crura, id est, reciproce ut 230 ad 229. Et par est ratio homogeneorum & æqualium quorumvis & in canalis cruribus similiter sitorum corporum. Horum pondera sunt reciproce ut crura, id est, reciproce ut distantiæ corporum a centro Terræ. Proinde si corpora in supremis canalium partibus, sive in superficie Terræ consistant; erunt pondera eorum ad invicem reciproce ut distantiæ eorum a centro. Et eodem argumento pondera, in aliis quibuscunque per totam Terræ superficiem regionibus, sunt reciproce ut distantiæ locorum a centro; & propterea, ex Hypothesi quod Terra Sphærois sit, dantur proportione.

Unde tale consit Theorema, quod incrementum ponderis pergendo ab Æquatore ad Polos, sit quam proxime ut sinus versus Latitudinis duplicatæ, vel, quod perinde est, ut quadratum sinus recti Latitudinis. Et in eadem circiter ratione augentur arcus graduum Latitudinis in Meridiano Ideoque cum Latitudo *Lutetiæ Parisiorum* sit 48gr. 50′, ea locorum sub Æquatore 00gr. 00′, & ea locorum ad Polos 90gr. & duplorum sinus versi sint 11334, 00000 & 20000, existente Radio 10000, & gravitas ad Polum sit ad gravitatem sub Æquatore ut 230 ad 229, & excessus gravitatis ad Polum ad gravitatem sub Æquatore ut 1 ad 229: erit excessus gravitatis in Latitudine *Lutetiæ* ad gravitatem sub Æquatore, ut $1 \times \frac{11334}{20000}$ ad 229, seu 5667 ad 2290000. Et propterea gravitates totæ in his locis erunt ad invicem ut 2295667 ad 2290000. Quare cum longitudines pendulorum æqualibus temporibus oscillantium sint ut gravitates, & in Latitudine *Lutetiæ Parisiorum* longitudo penduli singulis minutis secundis oscillantis sit pedum trium Parisiensium & linearum $8\frac{1}{9}$: longitudo penduli sub Æquatore superabitur a longitudine synchroni penduli *Parisiensis*, excessu lineæ unius & 87 partium millesimarum lineæ. Et simili computo consit Tabula sequens.

Latitudo

Latitudo Loci	*Longitudo Penduli*	*Mensura Gradus unius in Meridiano*
Gr.	Ped. Lin.	Hexaped.
0	3 . 7,468	56909
5	3 . 7,482	56914
10	3 . 7,526	56931
15	3 . 7,596	56959
20	3 . 7,692	56996
25	3 . 7,811	57042
30	3 . 7,948	57096
35	3 . 8,099	57155
40	3 . 8,261	57218
1	3 . 8,294	57231
2	3 . 8,327	57244
3	3 . 8,361	57257
4	3 . 8,394	57270
45	3 . 8,428	57283
6	3 . 8,461	57296
7	3 . 8,494	57309
8	3 . 8,528	57322
9	3 . 8,561	57335
50	3 . 8,594	57348
55	3 . 8,756	57411
60	3 . 8,907	57470
65	3 . 9,044	57524
70	3 . 9,162	57570
75	3 . 9,258	57607
80	3 . 9,329	57635
85	3 . 9,372	57652
90	3 . 9,387	57657

Conſtat autem per hanc Tabulam, quod graduum inæqualitas tam parva ſit, ut in rebus Geographicis figura Terræ pro Sphærica haberi poſſit, quodque inæqualitas diametrorum Terræ facilius & certius per experimenta pendulorum deprehendi poſſit vel etiam per Eclipſes Lunæ, quam per arcus Geographice menſuratos in Meridiano.

De Mundi Systemate. Hæc ita se habent ex hypothesi quod Terra ex uniformi materia constat. Nam si materia ad centrum paulo densior sit quam ad superficiem, differentiæ pendulorum & graduum Meridiani paulo majores erunt quam pro Tabula præcedente, propterea quod si materia ad centrum redundans qua densitas ibi major redditur, subducatur & seorsim spectetur, gravitas in Terram reliquam uniformiter densam, erit reciproce ut distantia ponderis a centro; in materiam vero redundantem reciproce ut quadratum distantiæ a materia illa quamproxime. Gravitas igitur sub æquatore minor est in materiam illam redundantem quam pro computo superiore: & propterea Terra ibi, propter defectum gravitatis, paulo altius ascendet, & excessus longitudinum Pendulorum & graduum ad polos paulo majores erunt quam in præcedentibus definitum est.

Jam vero Astronomi aliqui in longinquas regiones ad observationes Astronomicas faciendas missi, invenerunt quod horologia oscillatoria tardius moverentur prope Æquatorem quam in regionibus nostris. Et primo quidem *D. Richer* hoc observavit anno 1672 in insula *Cayennæ*. Nam dum observaret transitum Fixarum per meridianum mense *Augusto*, reperit horologium suum tardius moveri quam pro medio motu Solis, existente differentia 2′. 28″ singulis diebus. Deinde faciendo ut Pendulum simplex ad minuta singula secunda per horologium optimum mensurata oscillaret, notavit longitudinem Penduli simplicis, & hoc fecit sæpius singulis septimanis per menses decem. Tum in *Galliam* redux contulit longitudinem hujus Penduli cum longitudine Penduli *Parisiensis* (quæ erat trium pedum Parisiensium, & octo linearum cum tribus quintis partibus lineæ) & reperit breviorem esse, existente differentia lineæ unius cum quadrante. At ex tarditate horologii oscillatorii in *Cayenna*, differentia Pendulorum colligitur esse lineæ unius cum semisse.

Postea *Halleius* noster circa annum 1677 ad insulam *S^tæ Helenæ* navigans, reperit horologium suum oscillatorium ibi tardius moveri quam *Londini*, sed differentiam non notavit. Pendulum vero brevius reddidit plusquam octava parte digiti, seu linea una cum semisse. Et ad hoc efficiendum, cum longitudo cochleæ in ima parte penduli non sufficeret, annulum ligneum thecæ cochleæ & ponderi pendulo interposuit.

Deinde anno 1682 *D. Varin* & *D. Des Hayes* invenerunt longitudinem Penduli singulis minutis secundis oscillantis in Observatorio

vatorio Regio *Parisiensi* esse ped. 3. lin. $8\frac{5}{9}$. Et in insula *Gorea* eadem methodo longitudinem Penduli synchroni invenerunt esse ped. 3. lin. $6\frac{5}{9}$, existente longitudinum differentia lin. 2. Et eodem anno ad insulas *Guadaloupam* & *Martinicam* navigantes, invenerunt longitudinem Penduli synchroni in his insulis esse ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$.

Posthac *D. Couplet* filius anno 1697 mense *Julio*, horologium suum oscillatorium ad motum Solis medium in Observatorio Regio *Parisiensi* sic aptavit, ut tempore satis longo horologium cum motu Solis congrueret. Deinde *Ulyssipponem* navigans invenit quod mense *Novembri* proximo horologium tardius iret quam prius, existente differentia 2′ 13″ in horis 24. Et mense *Martio* sequente *Paraibam* navigans invenit ibi horologium suum tardius ire quam *Parisiis*, existente differentia 4′ 12″ in horis 24. Et affirmat Pendulum ad minuta secunda oscillans brevius fuisse *Ulyssipponi* lineis $2\frac{1}{2}$ & *Paraibæ* lineis $3\frac{2}{3}$ quam *Parisiis*. Rectius posuisset differentias esse $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{5}{8}$. Nam hæ differentiæ differentiis temporum 2′. 13″, & 4′. 12″ respondent. Crassioribus hujus Observationibus minus fidendum est.

Annis proximis (1699 & 1700) *D. Des Hayes* ad *Americam* denuo navigans, determinavit quod in insulis *Cayennæ* & *Granadæ* longitudo Penduli ad minuta secunda oscillantis, esset paulo minor quam ped. 3. lin. $6\frac{1}{2}$, quodque in insula *S. Christophori* longitudo illa esset ped. 3. lin. $6\frac{3}{4}$, & quod in insula *S. Dominici* eadem esset ped. 3. lin. 7.

Annoque 1704. *P. Feuelleus* invenit in *Porto-belo* in *America* longitudinem Penduli ad minuta secunda oscillantis, esse pedum trium Parisiensium & linearum tantum $5\frac{7}{12}$, id est tribus fere lineis breviorem quam *Lutetiæ Parisiorum*, sed errante Observatione. Nam deinde ad insulam *Martinicam* navigans, invenit longitudinem Penduli isochroni esse pedum tantum trium Parisiensium & linearum $5\frac{10}{12}$.

Latitudo autem *Paraibæ* est $6^{gr.}$ 38′ ad austrum, & ea *Portobeli* $9^{gr.}$ 33′ ad boream, & Latitudines insularum *Cayennæ*, *Goreæ*, *Guadaloupæ*, *Martinicæ*, *Granadæ*, $S^{ti.}$ *Christophori*, $S^{ti.}$ *Dominici* sunt respective $4^{gr.}$ 55′, $14^{gr.}$ 40′, $14^{gr.}$ 00′, $14^{gr.}$ 44′, $12^{gr.}$ 6′, $17^{gr.}$ 19′, & $19^{gr.}$ 48′ ad boream. Et excessus longitudinis Penduli *Parisiensis* supra longitudines Pendulorum isochronorum in his latitudinibus observatas, sunt paulo majores quam pro Tabula longitudinum Penduli superius computata. Et propterea Terra aliquanto altior est sub Æquatore quam pro superiore cal-

Ccc culo,

culo, & denfior ad centrum quam in fodinis prope fuperficiem, nifi forte calores in Zona torrida longitudinem Pendulorum aliquantulum auxerint.

Obfervavit utique *D. Picartus* quod virga ferrea, quæ tempore hyberno ubi gelabant frigora erat pedis unius longitudine, ad ignem calefacta evafit pedis unius cum quarta parte lineæ. Deinde *D. de la Hire* obfervavit quod virga ferrea quæ tempore confimili hyberno fex erat pedum longitudinis, ubi Soli æftivo exponebatur evafit fex pedum longitudinis cum duabus tertiis partibus lineæ. In priore cafu calor major fuit quam in pofteriore, in hoc vero major fuit quam calor externarum partium corporis humani. Nam metalla ad Solem æftivum valde incalefcunt. At virga penduli in horologio ofcillatorio nunquam exponi folet calori Solis æftivi, nunquam calorem concipit calori externæ fuperficiei corporis humani æqualem. Et propterea virga Penduli in horologio tres pedes longa, paulo quidem longior erit tempore æftivo quam hyberno, fed exceffu quartam partem lineæ unius vix fuperante. Proinde differentia tota longitudinis pendulorum quæ in diverfis regionibus ifochrona funt, diverfo calori attribui non poteft. Sed neque erroribus Aftronomorum è *Gallia* mifforum tribuenda eft hæc differentia. Nam quamvis eorum obfervationes non perfecte congruant inter fe, tamen errores funt adeo parvi ut contemni poffint. Et in hoc concordant omnes, quod ifochrona pendula funt breviora fub Æquatore quam in Obfervatorio Regio *Parifienfi*, exiftente differentia duarum circiter linearum feu fextæ partis digiti. Per obfervationes *D. Richer* in *Cayenna* factas, differentia fuit lineæ unius cum femiffe. Error femiffis lineæ facile committitur. Et *D. des Hayes* poftea per obfervationes fuas in eadem infula factas errorem correxit, inventa differentia linearum $2\frac{1}{4}$. Sed & per obfervationes in infulis *Gorea*, *Guadaloupa*, *Martinica*, *Granada*, *S. Chriftophori*, & *S. Dominici* factas & ad Æquatorem reductas, differentia illa prodiit haud minor quam $1\frac{1}{2}$ lineæ, haud major quam $2\frac{1}{2}$ linearum. Et inter hos limites quantitas mediocris eft $2\frac{5}{18}$ linearum. Propter calores locorum in Zona torrida negligamus $\frac{5}{18}$ partes lineæ, & manebit differentia duarum linearum.

Quare cum differentia illa per Tabulam præcedentem, ex hypothefi quod Terra ex materia uniformiter denfa conftat, fit tantum $1\frac{87}{1000}$ lineæ: exceffus altitudinis Terræ ad æquatorem fupra altitudinem ejus ad polos, qui erat milliarium $17\frac{1}{6}$, jam auctus in

ratione

ratione differentiarum, fiet milliarium $31\frac{1}{12}$. Nam tarditas Penduli sub Æquatore defectum gravitatis arguit; & quo levior est materia eo major esse debet altitudo ejus, ut pondere suo materiam sub Polis in æquilibrio sustineat. LIBER TERTIUS.

Hinc figura umbræ Terræ per Eclipses Lunæ determinanda, non erit omnino circularis, sed diameter ejus ab oriente in occidentem ducta major erit quam diameter ejus ab austro in boream ducta, excessu 55″ circiter. Et parallaxis maxima Lunæ in Longitudinem paulo major erit quam ejus parallaxis maxima in Latitudinem. Ac Terræ semidiameter maxima erit pedum Parisiensium 19767630, minima pedum 19609820 & mediocris pedum 19688725 quamproxime.

Cum gradus unus mensurante *Picarto* sit hexapedarum 57060, mensurante vero *Cassino* sit hexapedarum 57292: suspicantur aliqui gradum unumquemque, pergendo per *Gallias* austrum versus majorem esse gradu præcedente hexapedis plus minus 72, seu parte octingentesima gradus unius; existente Terra Sphæroide oblonga cujus partes ad polos sunt altissimæ. Quo posito, corpora omnia ad Polos Terræ leviora forent quam ad Æquatorem, & altitudo Terræ ad polos superaret altitudinem ejus ad æquatorem milliaribus fere 95, & pendula isochrona longiora forent ad Æquatorem quam in Observatorio Regio *Parisiensi* excessu semissis digiti circiter; ut conferenti proportiones hic positas cum proportionibus in Tabula præcedente positis, facile constabit. Sed & diameter umbræ Terræ quæ ab austro in boream ducitur, major foret quam diameter ejus quæ ab oriente in occidentem ducitur, excessu 2′. 46″, seu parte duodecima diametri Lunæ. Quibus omnibus Experientia contrariatur. Certe *Cassinus*, definiendo gradum unum esse hexapedarum 57292, medium inter mensuras suas omnes, ex hypothesi de æqualitate graduum assumpsit. Et quamvis *Picartus* in *Galliæ* limite boreali invenit gradum paulo minorem esse, tamen *Norwoodus* noster in Regionibus magis borealibus, mensurando majus intervallum, invenit gradum paulo majorem esse quam *Cassinus* invenerat. Et *Cassinus* ipse mensuram *Picarti*, ob parvitatem intervalli mensurati, non satis certam & exactam esse judicavit ubi mensuram gradus unius per intervallum longe majus definire aggressus est. Differentiæ vero inter mensuras *Cassini*, *Picarti*, & *Norwoodi* sunt prope insensibiles, & ab insensibilibus observationum erroribus facile oriri potuere, ut Nutationem axis Terræ prætercam.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVII.

Puncta Æquinoctialia regredi, & axem Terræ singulis revolutionibus annuis nutando bis inclinari in Eclipticam & bis redire ad positionem priorem.

Patet per Corol. 20. Prop. LXVI. Lib. I. Motus tamen iste nutandi perexiguus esse debet, & vix aut ne vix quidem sensibilis.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVIII.

Motus omnes Lunares, omnesque motuum inæqualitates ex allatis Principiis consequi.

Planetas majores, interea dum circa Solem feruntur, posse alios minores circum se revolventes Planetas deferre, & minores illos in Ellipsibus, umbilicos in centris majorum habentibus, revolvi debere patet per Prop. LXV. Lib. I. Actione autem Solis perturbabuntur eorum motus multimode, iisque adficientur inæqualitatibus quæ in Luna nostra notantur. Hæc utique (per Corol. 2, 3, 4, & 5. Prop. LXVI.) velocius movetur, ac radio ad Terram ducto describit aream pro tempore majorem, Orbemque habet minus curvum, atque adeo propius accedit ad Terram, in Syzygiis quam in Quadraturis, nisi quatenus impedit motus Eccentricitatis. Eccentricitas enim maxima est (per Corol. 9. Prop. LXVI.) ubi Apogæum Lunæ in Syzygiis versatur, & minima ubi idem in Quadraturis consistit; & inde Luna in Perigæo velocior est & nobis propior, in Apogæo autem tardior & remotior in Syzygiis quam in Quadraturis. Progreditur insuper Apogæum, & regrediuntur Nodi, sed motu inæquabili. Et Apogæum quidem (per Corol. 7. & 8. Prop. LXVI.) velocius progreditur in Syzygiis suis, tardius regreditur in Quadraturis, & excessu progressus supra regressum annuatim fertur in consequentia. Nodi autem (per Corol. 11. Prop. LXVI.) quiescunt in Syzygiis suis, & velocissime regrediuntur in Quadraturis. Sed & major est Lunæ latitudo maxima in ipsius Quadraturis (per Corol. 10. Prop. LXVI.) quam in Syzygiis: & motus medius tardior in Perihelio Terræ (per Corol. 6. Prop.

Prop. LXVI.) quam in ipsius Aphelio. Atque hæ sunt inæqualitates insigniores ab Astronomis notatæ.

Sunt etiam aliæ quædam nondum observatæ inæqualitates, quibus motus Lunares adeo perturbantur, ut nulla hactenus lege ad Regulam aliquam certam reduci potuerint. Velocitates enim seu motus horarii Apogæi & Nodorum Lunæ, & eorundem æquationes, ut & differentia inter Eccentricitatem maximam in Syzygiis & minimam in Quadraturis, & inæqualitas quæ Variatio dicitur, augentur ac diminuuntur annuatim (per Corol. 14. Prop. LXVI.) in triplicata ratione diametri apparentis Solaris. Et Variatio præterea augetur vel diminuitur in duplicata ratione temporis inter quadraturas quam proxime (per Corol. 1. & 2. Lem. X. & Corol. 16. Prop. LXVI. Lib. I.) Sed hæc inæqualitas in calculo Astronomico, ad Prosthaphæresin Lunæ referri solet, & cum ea confundi.

PROPOSITIO XXIII. PROBLEMA V.

Motus inæquales Satellitum Jovis & Saturni à motibus Lunaribus derivare.

Ex motibus Lunæ nostræ motus analogi Lunarum seu Satellitum Jovis sic derivantur. Motus medius Nodorum Satellitis extimi Jovialis, est ad motum medium Nodorum Lunæ nostræ, in ratione composita ex ratione duplicata temporis periodici Terræ circa Solem ad tempus periodicum Jovis circa Solem, & ratione simplici temporis periodici Satellitis circa Jovem ad tempus periodicum Lunæ circa Terram: (per Corol. 16. Prop. LXVI.) adeoque annis centum conficit Nodus iste 8gr. 24'. in antecedentia. Motus medii Nodorum Satellitum interiorum sunt ad motum hujus, ut illorum tempora periodica ad tempus periodicum hujus, per idem Corollarium, & inde dantur. Motus autem Augis Satellitis cujusque in consequentia, est ad motum Nodorum ipsius in antecedentia, ut motus Apogæi Lunæ nostræ ad hujus motum Nodorum, (per idem Corol.) & inde datur. Diminui tamen debet motus Augis sic inventus in ratione 5 ad 9 vel 1 ad 2 circiter, ob causam quam hic exponere non vacat. Æquationes maximæ Nodorum & Augis Satellitis cujusque fere sunt ad æquationes maximas Nodorum & Augis Lunæ respective, ut motus Nodorum & Augis Satellitum tempore unius revolutionis æquationum prio-

 rum, ad motus Nodorum & Apogæi Lunæ tempore unius revolutionis æquationum posteriorum. Variatio Satellitis è Jove spectati, est ad Variationem Lunæ, ut sunt ad invicem toti motus Nodorum temporibus quibus Satelles & Luna ad Solem revolvuntur, per idem Corollarium; adeoque in Satellite extimo non superat 5″. 12‴.

PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XIX.

Fluxum & refluxum Maris ab actionibus Solis ac Lunæ oriri.

Mare singulis diebus tam Lunaribus quam Solaribus bis intumescere debere ac bis defluere, patet per Corol. 19. Prop. LXVI. Lib. I. ut & aquæ maximam altitudinem, in maribus profundis & liberis, appulsum Luminarium ad Meridianum loci, minori quam sex horarum spatio sequi, uti fit in Maris *Atlantici* & *Æthiopici* tractu toto orientali inter *Galliam* & Promontorium *Bonæ Spei*, ut & in Maris *Pacifici* littore *Chilensi* & *Peruviano*: in quibus omnibus littoribus æstus in horam circiter tertiam incidit, nisi ubi motus per loca vadosa propagatus aliquantulum retardatur. Horas numero ab appulsu Luminaris utriusque ad Meridianum loci, tam infra Horizontem quam supra, & per horas diei Lunaris intelligo vigesimas quartas partes temporis quo Luna motu apparente diurno ad Meridianum loci revolvitur.

Motus autem bini, quos Luminaria duo excitant, non cernentur distincte, sed motum quendam mixtum efficient. In Luminarium Conjunctione vel Oppositione conjungentur eorum effectus, & componetur fluxus & refluxus maximus. In Quadraturis Sol attollet aquam ubi Luna deprimit, deprimetque ubi Sol attollit; & ex effectuum differentia æstus omnium minimus orietur. Et quoniam, experientia teste, major est effectus Lunæ quam Solis, incidet aquæ maxima altitudo in horam tertiam Lunarem. Extra Syzygias & Quadraturas, æstus maximus qui sola vi Lunari incidere semper deberet in horam tertiam Lunarem, & sola Solari in tertiam Solarem, compositis viribus incidet in tempus aliquod intermedium quod tertiæ Lunari propinquius est, adeoque in transitu Lunæ a Syzygiis ad Quadraturas, ubi hora tertia Solaris præcedit tertiam Lunarem, maxima aquæ altitudo præcedet etiam tertiam

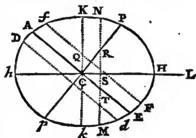
tertiam Lunarem, idque maximo intervallo paulo post Octantes Lunæ; & paribus intervallis æstus maximus sequetur horam tertiam Lunarem in transitu Lunæ a Quadraturis ad Syzygias. Hæc ita sunt in Mari aperto. Nam in ostiis Fluviorum fluxus majores cæteris paribus tardius ad ἀκμὴν venient.

Pendent autem effectus Luminarium ex eorum distantiis a Terra. In minoribus enim distantiis majores sunt eorum effectus, in majoribus minores, idque in triplicata ratione diametrorum apparentium. Igitur Sol tempore hyberno, in Perigæo existens, majores edit effectus, efficitque ut æstus in Syzygiis paulo majores sint, & in Quadraturis paulo minores (cæteris paribus) quam tempore æstivo; & Luna in Perigæo singulis mensibus majores ciet æstus quam ante vel post dies quindecim, ubi in Apogæo versatur. Unde fit ut æstus duo omnino maximi in Syzygiis continuis se mutuo non sequantur.

Pendet etiam effectus utriusque Luminaris ex ipsius Declinatione seu distantia ab Æquatore. Nam si Luminare in polo constitueretur, traheret illud singulas aquæ partes constanter, absque actionis intensione & remissione, adeoque nullam motus reciprocationem cieret. Igitur Luminaria recedendo ab Æquatore polum versus, effectus suos gradatim amittent, & propterea minores ciebunt æstus in Syzygiis Solstitialibus quam in Æquinoctialibus. In Quadraturis autem Solstitialibus majores ciebunt æstus quam in Quadraturis Æquinoctialibus; eo quod Lunæ jam in Æquatore constitutæ effectus maxime superat effectum Solis. Incidunt igitur æstus maximi in Syzygias & minimi in Quadraturas Luminarium, circa tempora Æquinoctii utriusque. Et æstum maximum in Syzygiis comitatur semper minimus in Quadraturis, ut experientia compertum est. Per minorem autem distantiam Solis a Terra, tempore hyberno quam tempore æstivo, fit ut æstus maximi & minimi sæpius præcedant Æquinoctium vernum quam sequantur, & sæpius sequantur autumnale quam præcedant.

Pendent etiam effectus Luminarium ex locorum latitudine. Designet $ApEP$ Tellurem aquis profundis undique coopertam; C Centrum ejus; P, p polos; AE Æquatorem; F locum quemvis extra Æquatorem; Ff parallelum loci; Dd parallelum ei respondentem ex altera parte Æquatoris; L locum quem Luna tribus ante horis occupabat; H locum Telluris ei perpendiculariter subjectum

De Mundi Systemate, subjectum; h locum huic oppositum; K, k loca inde gradibus 90 distantia, CH, Ch Maris altitudines maximas mensuratas a centro Telluris; & CK, Ck altitudines minimas: & si axibus Hh, Kk describatur Ellipsis, deinde Ellipseos hujus revolutione circa axem majorem Hh describatur Sphærois $HPKhpk$; designabit hæc figuram Maris quam proxime, & erunt CF, Cf, $C\mathcal{D}$, Cd altitudines Maris in locis F, f, $\mathcal{D}$, d. Quinetiam si in præfata Ellipseos revolutione punctum quodvis N describat circulum NM, secantem parallelos Ff, $\mathcal{D}d$ in locis quibusvis R, T, & æquatorem AE in S; erit CN altitudo Maris in locis omnibus R, S, T, sitis in hoc circulo. Hinc in revolutione diurna loci cujusvis F, affluxus erit maximus in F, hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem; postea defluxus maximus in $\mathcal{Q}$ hora tertia post occasum Lunæ; dein affluxus maximus in f hora tertia post appulsum Lunæ ad Meridianum infra Horizontem; ultimo defluxus maximus in $\mathcal{Q}$ hora tertia post ortum Lunæ; & affluxus posterior in f erit minor quam affluxus prior in F. Distinguitur enim Mare totum in duos omnino fluctus Hemisphæricos, unum in Hemisphærio $KHkC$ ad Boream vergentem, alterum in Hemisphærio opposito $KhkC$; quos igitur fluctum Borealem & fluctum Australem nominare licet. Hi fluctus semper sibi mutuo oppositi, veniunt per vices ad Meridianos locorum singulorum, interposito intervallo horarum Lunarium duodecim. Cumque regiones Boreales magis participant fluctum Borealem, & Australes magis Australem, inde oriuntur æstus alternis vicibus majores & minores, in locis singulis extra Æquatorem, in quibus Luminaria oriuntur & occidunt. Æstus autem major, Luna in verticem loci declinante, incidet in horam circiter tertiam post appulsum Lunæ ad Meridianum supra Horizontem, & Luna declinationem mutante vertetur in minorem. Et fluxuum differentia maxima incidet in tempora Solstitiorum; præsertim si Lunæ Nodus ascendens versatur in principio Arietis. Sic experientia compertum est, quod æstus matutini tempore hyberno superent vespertinos & vespertini tempore



pore æstivo matutinos, ad *Plymuthum* quidem altitudine quasi pedis unius, ad *Bristoliam* vero altitudine quindecim digitorum: observantibus *Colepressio* & *Sturmio*.

Motus autem hactenus descripti mutantur aliquantulum per vim illam reciprocationis aquarum, qua Maris æstus, etiam cessantibus Luminarium actionibus, posset aliquamdiu perseverare. Conservatio hæcce motus impressi minuit differentiam æstuum alternorum; & æstus proxime post Syzygias majores reddit, eosque proxime post Quadraturas minuit. Unde fit ut æstus alterni ad *Plymuthum* & *Bristoliam* non multo magis differant ab invicem quam altitudine pedis unius vel digitorum quindecim; utque æstus omnium maximi in iisdem portubus, non sint primi a Syzygiis, sed tertii. Retardantur etiam motus omnes in transitu per vada, adeo ut æstus omnium maximi, in fretis quibusdam & Fluviorum ostiis, sint quarti vel etiam quinti a Syzygiis.

Porro fieri potest ut æstus propagetur ab Oceano per freta diversa ad eundem portum, & citius transeat per aliqua freta quam per alia: quo in casu æstus idem, in duos vel plures successive advenientes divisus, componere possit motus novos diversorum generum. Fingamus æstus duos æquales a diversis locis in eundem portum venire, quorum prior præcedat alterum spatio horarum sex, incidatque in horam tertiam ab appulsu Lunæ ad Meridianum portus. Si Luna in hocce suo ad Meridianum appulsu versabatur in Æquatore, venient singulis horis senis æquales affluxus, qui in mutuos refluxus incidendo eosdem affluxibus æquabunt, & sic spatio diei illius efficient ut aqua tranquille stagnet. Si Luna tunc declinabat ab Æquatore, fient æstus in Oceano vicibus alternis majores & minores, uti dictum est; & inde propagabuntur in hunc portum affluxus bini majores & bini minores, vicibus alternis. Affluxus autem bini majores component aquam altissimam in medio inter utrumque, affluxus major & minor faciet ut aqua ascendat ad mediocrem altitudinem in Medio ipsorum, & inter affluxus binos minores aqua ascendet ad altitudinem minimam. Sic spatio viginti quatuor horarum, aqua non bis ut fieri solet, sed semel tantum perveniet ad maximam altitudinem & semel ad minimam; & altitudo maxima, si Luna declinat in polum supra Horizontem loci, incidet in horam vel sextam vel tricesimam ab appulsu Lunæ ad Meridianum, atque Luna declinationem mutante mutabitur in defluxum. Quorum omnium exemplum, in portu regni *Tunquini* ad *Batsham* sub latitudine

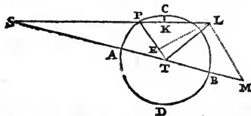
Boreali 20gr. 50′. *Halleius* ex Nautarum Obſervationibus patefecit. Ibi aqua die tranſitum Lunæ per Æquatorem ſequente ſtagnat, dein Luna ad Boream declinante incipit fluere & refluere, non bis, ut in aliis portubus, ſed ſemel ſingulis diebus, & æſtus incidit in occaſum Lunæ, defluxus maximus in ortum Cum Lunæ declinatione augetur hic æſtus, uſque ad diem ſeptimum vel octavum, dein per alios ſeptem dies iiſdem gradibus decreſcit, quibus antea creverat; & Luna declinationem mutante ceſſat, ac mox mutatur in defluxum. Incidit enim ſubinde defluxus in occaſum Lunæ & affluxus in ortum, donec Luna iterum mutet declinationem. Aditus ad hunc portum fretaque vicina duplex patet, alter ab Oceano *Sinenſi* inter Continentem & Inſulam *Luconiam*, alter a Mari *Indico* inter Continentem & Inſulam *Borneo*. An æſtus ſpatio horarum duodecim a Mari *Indico*, & ſpatio horarum ſex a Mari *Sinenſi* per freta illa venientes, & ſic in horam tertiam & nonam Lunarem incidentes, componant hujuſmodi motus; ſitne alia Marium illorum conditio, obſervationibus vicinorum littorum determinandum relinquo.

Hactenus cauſas motuum Lunæ & Marium reddidi. De quantitate motuum jam convenit aliqua ſubjungere.

PROPOSITIO XXV. PROBLEMA VI.

Invenire vires Solis ad perturbandos motus Lunæ.

Deſignet S Solem, T Terram, P Lunam, $PADB$ orbem Lunæ. In SP capiatur SK æqualis ST; ſitque SL ad SK



in duplicata ratione SK ad SP, & ipſi PT agatur parallela LM; & ſi gravitas acceleratrix Terræ in Solem exponatur per diſtantiam ST vel SK, erit SL gravitas acceleratrix Lunæ in Solem.

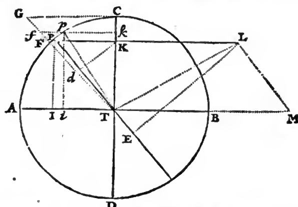
Solem. Ea componitur ex partibus SM, LM, quarum LM & ipsius SM pars TM perturbat motum Lunæ, ut in Libri primi Prop. LXVI. & ejus Corollariis expositum est. Quatenus Terra & Luna circum commune gravitatis centrum revolvuntur, perturbabitur etiam motus Terræ circa centrum illud a viribus consimilibus; sed summas tam virium quam motuum referre licet ad Lunam, & summas virium per lineas ipsis analogas TM & ML designare. Vis ML (in mediocri sua quantitate) est ad vim centripetam, qua Luna in Orbe suo circa Terram quiescentem ad distantiam PT revolvi posset, in duplicata ratione temporum periodicorum Lunæ circa Terram & Terræ circa Solem, (per Corol. 17. Prop. LXVI. Lib. I.) hoc est, in duplicata ratione dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. ad dies 365. *hor.* 6. *min.* 9. id est, ut 1000. ad 178725, seu 1 ad $178\frac{29}{40}$. Invenimus autem in Propositione quarta quod, si Terra & Luna circa commune gravitatis centrum revolvantur, earum distantia mediocris ab invicem erit $60\frac{1}{2}$ semidiametrorum mediocrium Terræ quamproxime. Et vis qua Luna in Orbe circa Terram quiescentem, ad distantiam PT semidiametrorum terrestrium $60\frac{1}{2}$ revolvi posset, est ad vim, qua eodem tempore ad distantiam semidiametrorum 60 revolvi posset, ut $60\frac{1}{2}$ ad 60; & hæc vis ad vim gravitatis apud nos ut 1 ad 60×60 quamproxime. Ideoque vis mediocris ML est ad vim gravitatis in superficie Terræ, ut $1 \times 60\frac{1}{2}$ ad $60 \times 60 \times 178\frac{29}{40}$, seu 1 ad 638092,6. Unde ex proportione linearum TM, ML, datur etiam vis TM: & hæ sunt vires Solis quibus Lunæ motus perturbantur. *Q. E. I.*

PROPOSITIO XXVI. PROBLEMA VII.

Invenire incrementum horarium areæ quam Luna, radio ad Terram ducto, in Orbe circulari describit.

Diximus aream, quam Luna radio ad Terram ducto describit, esse tempori proportionalem, nisi quatenus motus Lunaris ab actione Solis turbatur. Inæqualitatem momenti (vel incrementi horarii) hic investigandam proponimus. Ut computatio facilior reddatur, fingamus orbem Lunæ circularem esse, & inæqualitates omnes negligamus, ea sola excepta, de qua hic agitur. Ob ingentem vero Solis distantiam, ponamus etiam lineas SP, ST sibi invicem parallelas esse. Hoc pacto vis LM reducetur semper ad me-

mediocrem suam quantitatem TP, ut & vis TM ad mediocrem suam quantitatem $3PK$. Hæ vires, per Legum Corol. 2. componunt vim TL; & hæc vis, si in radium TP demittatur perpendiculum LE, resolvitur in vires TE, EL, quarum TE, agendo semper secundum radium TP, nec accelerat nec retardat descriptionem areæ TPC radio illo TP factam; & EL agendo secundum perpendiculum, accelerat vel retardat ipsam, quantum accelerat vel retardat Lunam. Acceleratio illa Lunæ, in transitu ipsius a Quadratura C ad Conjunctionem A, singulis temporis momentis facta, est ut ipsa vis accelerans EL, hoc est, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$. Exponatur tempus per motum medium Lunarem, vel (quod eodem fere recidit) per angulum CTP, vel



etiam per arcum CP. Ad CT erigatur normalis CG ipsi CT æqualis. Et diviso arcu quadrantali AC in particulas innumeras æquales Pp, &c. per quas æquales totidem particulæ temporis exponi possunt, ductaque pk perpendiculari ad CT, jungatur TG ipsis KP, kp productis occurrens in F & f; & erit Kk ad PK ut Pp ad Tp, hoc est in data ratione, adeoque $FK \times Kk$ seu area $FKkf$, ut $\frac{3PK \times TK}{TP}$, id est, ut EL; & composite, area tota $GCKF$ ut summa omnium virium EL tempore toto CP impressarum in Lunam, atque adeo etiam ut velocitas hac summa

summa genita, id est, ut acceleratio descriptionis areæ CTP, seu incrementum momenti. Vis qua Luna circa Terram quiescentem ad distantiam TP, tempore suo periodico $CADBC$ dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvi posset, efficeret ut corpus, tempore CT cadendo, describeret longitudinem $\frac{1}{2}CT$, & velocitatem simul acquireret æqualem velocitati, qua Luna in Orbe suo movetur. Patet hoc per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I. Cum autem perpendiculum Kd in TP demissum sit ipsius EL pars tertia, & ipsius TP seu ML in Octantibus pars dimidia, vis EL in Octantibus, ubi maxima est, superabit vim ML in ratione 3 ad 2, adeoque erit ad vim illam, qua Luna tempore suo periodico circa Terram quiescentem revolvi posset, ut 100 ad $\frac{2}{3}\times 17872\frac{1}{2}$ seu 11915, & tempore CT velocitatem generare deberet quæ esset pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunaris, tempore autem CPA velocitatem majorem generaret in ratione CA ad CT seu TP. Exponatur vis maxima EL in Octantibus per aream $FK\times Kk$ rectangulo $\frac{1}{2}TP\times Pp$ æqualem. Et velocitas, quam vis maxima tempore quovis CP generare posset, erit ad velocitatem quam vis omnis minor EL eodem tempore generat, ut rectangulum $\frac{1}{2}TP\times CP$ ad aream $KCGF$; tempore autem toto CPA, velocitates genitæ erunt ad invicem ut rectangulum $\frac{1}{2}TP\times CA$ & triangulum TCG, sive ut arcus quadrantalis CA & radius TP. Ideoque (per Prop. IX. Lib. V. Elem.) velocitas posterior, toto tempore genita, erit pars $\frac{100}{11915}$ velocitatis Lunæ. Huic Lunæ velocitati, quæ areæ momento mediocri analoga est, addatur & auferatur dimidium velocitatis alterius; & si momentum mediocre exponatur per numerum 11915, summa 11915 + 50, seu 11965 exhibebit momentum maximum areæ in Syzygia A, ac differentia 11915 — 50 seu 11865 ejusdem momentum minimum in Quadraturis. Igitur areæ temporibus æqualibus in Syzygiis & Quadraturis descriptæ, sunt ad invicem ut 11965 ad 11865. Ad momentum minimum 11865 addatur momentum, quod sit ad momentorum differentiam 100 ut Trapezium $FKCG$ ad triangulum TCG (vel quod perinde est, ut quadratum Sinus PK ad quadratum Radii TP, id est, ut Pd ad TP) & summa exhibebit momentum areæ, ubi Luna est in loco quovis intermedio P.

Hæc omnia ita se habent, ex Hypothesi quod Sol & Terra quiescunt, & Luna tempore Synodico dierum 27. *hor.* 7. *min.* 43. revolvitur. Cum autem periodus Synodica Lunaris vere sit die-

rum 29. *hor*. 12. & *min*. 44. augeri debent momentorum incrementa in ratione temporis, id eſt, in ratione 1080853 ad 1000000. Hoc pacto incrementum totum, quod erat pars $\frac{100}{11917}$ momenti mediocris, jam fiet ejuſdem pars $\frac{100}{11023}$. Ideoque momentum areæ in Quadratura Lunæ erit ad ejus momentum in Syzygia ut 11023 — 50 ad 11023 + 50, ſeu 10973 ad 11073, & ad ejus momentum, ubi Luna in alio quovis loco intermedio P verſatur, ut 10973 ad 10973 + Pd, exiſtente videlicet TP æquali 100.

Area igitur, quam Luna radio ad Terram ducto ſingulis temporis particulis æqualibus deſcribit, eſt quam proxime ut ſumma numeri 219, 46 & ſinus verſi duplicatæ diſtantiæ Lunæ a Quadratura proxima, in circulo cujus radius eſt unitas. Hæc ita ſe habent ubi Variatio in Octantibus eſt magnitudinis mediocris. Sin Variatio ibi major ſit vel minor, augeri debet vel minui Sinus ille verſus in eadem ratione.

PROPOSITIO XXVII. PROBLEMA VIII.

Ex motu horario Lunæ invenire ipſius diſtantiam a Terra.

Area, quam Luna radio ad Terram ducto, ſingulis temporis momentis, deſcribit, eſt ut motus horarius Lunæ & quadratum diſtantiæ Lunæ a Terra conjunctim; & propterea diſtantia Lunæ a Terra eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata ratione Areæ directe & ſubduplicata ratione motus horarii inverſe. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc datur Lunæ diameter apparens: quippe quæ ſit reciproce ut ipſius diſtantia a Terra. Tentent Aſtronomi quam probe hæc Regula cum Phænomenis congruat.

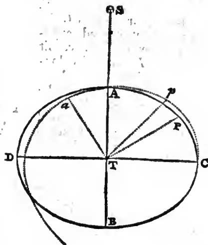
Corol. 2. Hinc etiam Orbis Lunaris accuratius ex Phænomenis quam antehac definiri poteſt.

PROPOSITIO XXVIII. PROBLEMA IX.

Invenire diametros Orbis in quo Luna, abſque eccentricitate, moveri deberet.

Curvatura Trajectoriæ, quam mobile, ſi ſecundum Trajectoriæ illius perpendiculum trahatur, deſcribit, eſt ut attractio directe & quadratum velocitatis inverſe. Curvaturas linearum pono eſſe inter

ter se in ultima proportione Sinuum vel Tangentium angulorum contactuum ad radios æquales pertinentium ubi radii illi in infinitum diminuuntur. Attractio autem Lunæ in Terram in Syzygiis est excessus gravitatis ipsius in Terram supra vim Solarem $2\,PK$ (Vide *Figur. pag.* 394.) qua gravitas acceleratrix Lunæ in Solem superat gravitatem acceleratricem Terræ in Solem. In Quadraturis autem attractio illa est summa gravitatis Lunæ in Terram & vis Solaris KT, qua Luna in Terram trahitur. Et hæ attractiones, si $\frac{AT+CT}{2}$ dicatur N, sunt ut $\frac{178725}{ATq} - \frac{2000}{CT\times N}$ & $\frac{178725}{CTq} \times \frac{1000}{AT\times N}$ quam proxime; seu ut $178725\,N\times CTq - 2000\,ATq\times CT$ & $178725\,N\times ATq + 1000\,CTq\times AT$. Nam si gravitas acceleratrix Lunæ in Terram exponatur per numerum 178725, vis mediocris ML, quæ in Quadraturis est PT vel TK, & Lunam trahit in Terram, erit 1000, & vis mediocris TM in Syzygiis erit 3000; de qua, si vis mediocris ML subducatur, manebit vis 2000 qua Luna in Syzygiis distrahitur a Terra, quamque jam ante nominavi $2\,PK$. Velocitas autem Lunæ in Syzygiis A & B est ad ipsius velocitatem in Quadraturis C & D, ut CT ad AT & momentum areæ quam Luna radio ad Terram ducto describit in Syzygiis ad momentum ejusdem areæ in Quadraturis conjunctim; id est, ut 11073 CT ad 10973 AT. Sumatur hæc ratio bis inverse & ratio prior semel directe, & fiet curvatura Orbis Lunaris in Syzygiis ad ejusdem curvaturam in Quadraturis ut $120406729 \times 178725\,ATq \times CTq\times N - 120406729\times 2000\,ATqq\times CT$ ad $122611329\times 178725\,ATq\times CTq\times N + 122611329\times 1000\,CTqq\times AT$, *i.e.* ut $2151969\,AT\times CT\times N - 24081\,AT$ *cub.* ad $2191371\,AT\times CT\times N + 12261\,CT$ *cub.*



Quoniam

Quoniam Figura Orbis Lunaris ignoratur, hujus vice assumamus Ellipsin *DBCA*, in cujus centro *T* Terra collocetur, & cujus axis major *DC* Quadraturis, minor *AB* Syzygiis interjaceat. Cum autem planum Ellipseos hujus motu angulari circa Terram revolvatur, & Trajectoria cujus curvaturam consideramus, describi debeat in plano quod omni motu angulari omnino destituitur: consideranda erit Figura, quam Luna in Ellipsi illa revolvendo describit in hoc plano, hoc est Figura *Cpa*, cujus puncta singula *p* inveniuntur capiendo punctum quodvis *P* in Ellipsi, quod locum Lunæ repræsentet, & ducendo *Tp* æqualem *TP*, ea lege ut angulus *PTp* æqualis sit motui apparenti Solis a tempore Quadraturæ *C* confecto; vel (quod eodem fere recidit) ut angulus *CTp* sit ad angulum *CTP* ut tempus revolutionis Synodicæ Lunaris ad tempus revolutionis Periodicæ seu $29^{d.}\ 12^{h.}\ 44'$, ad $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$. Capiatur igitur angulus *CTa* in eadem ratione ad angulum rectum *CTA*, & sit longitudo *Ta* æqualis longitudini *TA*; & erit *a* Apsis ima & *C* Apsis summa Orbis hujus *Cpa*. Rationes autem ineundo invenio quod differentia inter curvaturam Orbis *Cpa* in vertice *a*, & curvaturam Circuli centro *T* intervallo *TA* descripti, sit ad differentiam inter curvaturam Ellipseos in vertice *A* & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli *CTP* ad angulum *CTp*; & quod curvatura Ellipseos in *A* sit ad curvaturam Circuli illius, in duplicata ratione *TA* ad *TC*; & curvatura Circuli illius ad curvaturam Circuli centro *T* intervallo *TC* descripti, ut *TC* ad *TA*; hujus autem curvatura ad curvaturam Ellipseos in *C*, in duplicata ratione *TA* ad *TC*; & differentia inter curvaturam Ellipseos in vertice *C* & curvaturam Circuli novissimi, ad differentiam inter curvaturam Figuræ *Tpa* in vertice *C* & curvaturam ejusdem Circuli, in duplicata ratione anguli

anguli CTp ad angulum CTP. Quæ quidem rationes ex ſinubus angulorum contactus ac differentiarum angulorum facile colliguntur. His autem inter ſe collatis, prodit curvatura Figuræ Cpa in a ad ipſius curvaturam in C, ut $AT\ cub + \frac{16824}{100000} CTq \times AT$ ad $CT\ cub. + \frac{16824}{100000} ATq \times CT$. ubi numerus $\frac{16824}{100000}$ deſignat differentiam quadratorum angulorum CTP & CTp applicatam ad quadratum anguli minoris CTP ſeu (quod perinde eſt) differentiam quadratorum temporum $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$, & $29^{d.}\ 12^{h.}\ 44'$ applicatam ad quadratum temporis $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$.

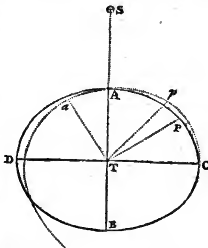
Igitur cum a deſignet Syzygiam Lunæ, & C ipſius Quadraturam, proportio jam inventa eadem eſſe debet cum proportione curvaturæ Orbis Lunæ in Syzygiis ad ejuſdem curvaturam in Quadraturis, quam ſupra invenimus. Proinde ut inveniatur proportio CT ad AT, duco extrema & media in ſe invicem. Et termini prodeuntes ad $AT \times CT$ applicati, fiunt $2062,79\ CTqq - 2151969\ N \times CT\ cub. + 368676\ N \times AT \times CTq + 36342\ ATq \times CTq - 362047\ N \times ATq \times CT + 2191371\ N \times AT\ cub. \times 4051,4\ ATqq = 0$. Hic pro terminorum AT & CT ſemiſumma N ſcribo 1, & pro eorundem ſemidifferentia ponendo x, fit $CT = 1 + x$, & $AT = 1 - x$: quibus in æquatione ſcriptis, & æquatione prodeunte reſoluta, obtinetur x æqualis 0, 00719, & inde ſemidiameter CT fit 1, 00719, & ſemidiameter AT 0, 99281, qui numeri ſunt ut $70\frac{1}{24}$ & $69\frac{1}{24}$ quam proxime. Eſt igitur diſtantia Lunæ a Terra in Syzygiis ad ipſius diſtantiam in Quadraturis (ſepoſita ſcilicet Eccentricitatis conſideratione) ut $69\frac{1}{24}$ ad $70\frac{1}{24}$, vel numeris rotundis ut 69 ad 70.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA X.

Invenire Variationem Lunæ.

Oritur hæc inæqualitas partim ex forma Elliptica orbis Lunaris, partim ex inæqualitate momentorum areæ, quam Luna radio ad Terram ducto deſcribit. Si Luna P in Ellipſi $DBCA$ circa Terram in centro Ellipſeos quieſcentem moveretur, & radio TP ad Terram ducto deſcriberet aream CTP tempori proportionalem; eſſet autem Ellipſeos ſemidiameter maxima CT ad ſemidiametrum minimam TA ut 70 ad 69: foret tangens anguli CTP ad tangentem anguli motus medii a Quadratura C computati, ut Ellipſeos ſemidiameter TA ad ejuſdem ſemidiametrum

 TC seu 69 ad 70. Debet autem descriptio areæ CTP, in progressu Lunæ a Quadratura ad Syzygiam, ea ratione accelerari, ut ejus momentum in Syzygia Lunæ sit ad ejus momentum in Quadratura ut 11073 ad 10973, utque excessus momenti in loco quovis intermedio P supra momentum in Quadratura sit ut quadratum sinus anguli CTP. Id quod satis accurate fiet, si tangens anguli CTP diminuatur in subduplicata ratione numeri 10973 ad numerum 11073, id est, in ratione numeri 68, 6877 ad numerum 69. Quo pacto tangens anguli CTP jam erit ad tangentem motus medii ut 68, 6877 ad 70, & angulus CTP in Octantibus, ubi motus medius est $45^{gr.}$ invenietur $44.^{gr.}\ 27'.\ 28''$. qui subductus de angulo motus medii $45.^{gr.}$ relinquit Variationem maximam $32'.\ 32''$. Hæc ita se haberent si Luna, pergendo a Quadratura ad Syzygiam, describeret angulum CTA graduum tantum nonaginta. Verum ob motum Terræ, quo Sol in consequentia motu apparente transfertur, Luna, priusquam Solem assequitur, describit angulum CTa angulo recto majorem in ratione temporis revolutionis Lunaris Synodicæ ad tempus revolutionis Periodicæ, id est, in ratione $29^{d.}\ 12^{h.}\ 44'$. ad $27^{d.}\ 7^{h.}\ 43'$. Et hoc pacto anguli omnes circa centrum T dilatantur in eadem ratione, & Variatio maxima quæ secus esset $32'.\ 32''$, jam aucta in eadem ratione fit $35'.\ 10''$.



Hæc est ejus magnitudo in mediocri distantia Solis a Terra, neglectis differentiis quæ a curvatura Orbis magni majorique Solis actione in Lunam falcatam & novam quam in gibbosam & plenam, oriri possint. In aliis distantiis Solis a Terra, Variatio maxima est in ratione quæ componitur ex duplicata ratione temporis revolutionis Synodicæ Lunaris (dato anni tempore) directe, & triplicata ratione distantiæ Solis a Terra inverse. Ideoque in

Apogæo

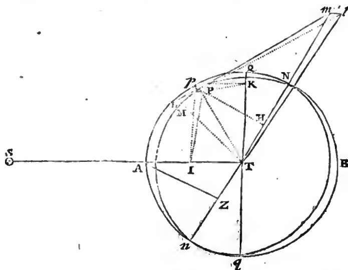
Apogæo Solis, Variatio maxima est 33'. 14", & in ejus Perigæo 37'. 11", si modo Eccentricitas Solis sit ad Orbis magni semidiametrum transversam ut $16\frac{11}{16}$ ad 1000.

Hactenus Variationem investigavimus in Orbe non eccentrico, in quo utique Luna in Octantibus suis semper est in mediocri sua distantia a Terra. Si Luna propter eccentricitatem suam, magis vel minus distat a Terra quam si locaretur in hoc Orbe, Variatio paulo major esse potest vel paulo minor quam pro Regula hic allata: sed excessum vel defectum ab Astronomis per Phænomena determinandum relinquo.

PROPOSITIO XXX. PROBLEMA XI.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe circulari.

Designet *S* Solem, *T* Terram, *P* Lunam, *NPn* Orbem Lunæ, *Npn* vestigium Orbis in plano Eclipticæ; *N*, *n* Nodos, *nTNm*



lineam Nodorum infinite productam; *PI*, *PK* perpendicula demissa in lineas *ST*, *Qq*; *Pp* perpendiculum demissum in planum Eclip-

De Mundi Systemate.

Eclipticæ; $\mathfrak{Q}$, q Quadraturas Lunæ in plano Eclipticæ, & pK perpendiculum in lineam $\mathfrak{Q}q$ Quadraturis interjacentem. Vis Solis ad perturbandum motum Lunæ (per Prop. xxv.) duplex eſt, altera lineæ LM, altera lineæ MT proportionalis. Et Luna vi priore in Terram, poſteriore in Solem ſecundum lineam rectæ ST a Terra ad Solem ductæ parallelam trahitur. Vis prior LM agit ſecundum planum orbis Lunaris, & propterea ſitum plani nil mutat. Hæc igitur negligenda eſt. Vis poſterior MT qua planum Orbis Lunaris perturbatur eadem eſt cum vi $3\,\mathcal{P}K$ vel $3\,IT$. Et hæc vis (per Prop. xxv.) eſt ad vim qua Luna in circulo circa Terram quieſcentem tempore ſuo periodico uniformiter revolvi poſſet, ut $3\,IT$ ad Radium circuli multiplicatum per numerum 178, 725, ſive ut IT ad Radium multiplicatum per 59, 575. Cæterum in hoc calculo & eo omni qui ſequitur, conſidero lineas omnes a Luna ad Solem ductas tanquam parallelas lineæ quæ a Terra ad Solem ducitur, propterea quod inclinatio tantum fere minuit effectus omnes in aliquibus caſibus, quantum auget in aliis: & Nodorum motus mediocres quærimus, neglectis iſtiuſmodi minutiis, quæ calculum nimis impeditum redderent.

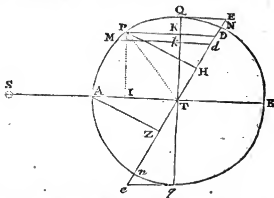
De-

Designet jam PM arcum, quem Luna dato tempore quam minimo describit, & ML lineolam quam Luna, impellente vi præfata 3 IT, eodem tempore describere posset. Jungantur PL, MP, & producantur eæ ad m & l, ubi secent planum Eclipticæ; inque Tm demittatur perpendiculum PH. Et quoniam recta ML parallela est plano Eclipticæ, ideoque cum recta ml quæ in plano illo jacet concurrere non potest, & tamen jacent hæ rectæ in plano communi $LMPml$; parallelæ erunt hæ rectæ, & propterea similia erunt triangula LMP, Lmp. Jam cum MPm sit in plano Orbis, in quo Luna in loco P movebatur, incidet punctum m in lineam Nn per Orbis illius Nodos N, n ductam. Et quoniam vis qua lineola LM generatur, si tota simul & semel in loco P impressa esset, efficeret ut Luna moveretur in arcu, cujus chorda esset LP, atque adeo transferret Lunam de plano $MPmT$ in planum $LPlT$; motus angularis Nodorum a vi illa genitus, æqualis erit angulo mTl. Est autem ml ad mP ut ML ad MP, adeoque cum MP ob datum tempus data sit, est ml ut rectangulum $ML \times mP$, id est, ut rectangulum $IT \times mP$. Et angulus mTl, si modo angulus Tml rectus sit, est ut $\frac{ml}{Tm}$ & propterea ut $\frac{IT \times Pm}{Tm}$, id est, (ob proportionales Tm & mP, TP & PH) ut $\frac{IT \times PH}{TP}$, adeoque ob datam TP, ut $IT \times PH$. Quod si angulus Tml, seu STN obliquus sit, erit angulus mTl adhuc minor, in ratione sinus anguli STN ad Radium. Est igitur velocitas Nodorum ut $IT \times PH \times AZ$, sive ut contentum sub sinubus trium angulorum TPI, PTN & STN.

Si anguli illi, Nodis in Quadraturis & Luna in Syzygia existentibus, recti sint, lineola ml abibit in infinitum, & angulus mTl evadet angulo mPl æqualis. Hoc autem in casu, angulus mPl est ad angulum PTM, quem Luna eodem tempore motu suo apparente circa Terram describit ut 1 ad 59, 575. Nam angulus mPl æqualis est angulo LPM, id est, angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem sola vis præfata Solaris 3 IT si tum cessaret Lunæ gravitas dato illo tempore generare posset; & angulus PTM æqualis est angulo deflexionis Lunæ a recto tramite, quem vis illa, qua Luna in Orbe suo retinetur, si tum cessaret vis Solaris 3 IT eodem tempore generaret. Et hæ vires, ut supra diximus,

De Mundi Systemate. mus, sunt ad invicem ut 1 ad 59, 575. Ergo cum motus medius horarius Lunæ (respectu fixarum) sit 32'. 56''. 27'''. 12^iv ½, motus horarius Nodi in hoc casu erit 33''. 10'''. 33^iv. 12^v. Aliis autem in casibus motus iste horarius erit ad 33''. 10'''. 33^iv. 12^v. ut contentum sub sinubus angulorum trium *TPI*, *PTN*, & *STN* (seu distantiarum Lunæ a Quadratura, Lunæ a Nodo, & Nodi a Sole) ad cubum Radii. Et quoties signum anguli alicujus de affirmativo in negativum, deque negativo in affirmativum mutatur, debebit motus regressivus in progressivum & progressivus in regressivum mutari. Unde fit ut Nodi progrediantur quoties Luna inter Quadraturam alterutram & Nodum Quadraturæ proximum versatur. Aliis in casibus regrediuntur, & per excessum regressus supra progressum, singulis mensibus feruntur in antecedentia.

Corol. 1. Hinc si a dati arcus quam minimi *PM* terminis *P* & *M* ad lineam Quadraturas jungentem *Qq* demittantur perpendicula *PK*, *Mk*, eademque producantur donec secent lineam Nodorum *Nn* in *D* & *d*; erit motus horarius Nodorum ut area *MPDd* & quadratum lineæ *AZ* conjunctim. Sunto enim



PK, *PH* & *AZ* prædicti tres sinus. Nempe *PK* sinus distantiæ Lunæ a Quadratura, *PH* sinus distantiæ Lunæ a Nodo, & *AZ* sinus distantiæ Nodi a Sole: & erit velocitas Nodi ut contentum $PK \times PH \times AZ$. Est autem *PT* ad *PK* ut *PM* ad *Kk*, adeoque ob datas *PT* & *PM* est *Kk* ipsi *PK* proportionalis. Est & *AT* ad *PD* ut *AZ* ad *PH*, & propterea *PH* rectangulo

$PD \times AZ$

$PD \times AZ$ proportionalis, & conjunctis rationibus, $PK \times PH$ est ut contentum $Kk \times PD \times AZ$, & $PK \times PH \times AZ$ ut $Kk \times PD \times AZ$ *qu.* id est, ut area $PDdM$ & AZ *qu.* conjunctim *Q. E. D.*

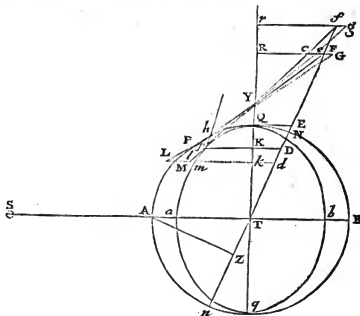
Corol. 2. In data quavis Nodorum positione, motus horarius mediocris est semissis motus horarii in Syzygiis Lunæ, ideoque est ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut quadratum sinus distantiæ Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii, sive ut AZ *qu.* ad AT *qu.* Nam si Luna uniformi cum motu perambulet semicirculum QAq, summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna pergit a Q ad M, erit area $QMdE$ quæ ad circuli tangentem QE terminatur; & quo tempore Luna attingit punctum n, summa illa erit area tota $EQAn$ quam linea PD describit, dein Luna pergente ab n ad q, linea PD cadet extra circulum, & aream nqe ad circuli tangentem qe terminatam describet; quæ, quoniam Nodi prius regrediebantur, jam vero progrediuntur, subduci debet de area priore, & cum æqualis sit areæ QEN, relinquet semicirculum $NQAn$. Igitur summa omnium arearum $PDdM$, quo tempore Luna semicirculum describit, est area semicirculi; & summa omnium quo tempore Luna circulum describit est area circuli totius. At area $PDdM$, ubi Luna versatur in Syzygiis, est rectangulum sub arcu PM & radio MT; & summa omnium huic æqualium arearum, quo tempore Luna circulum describit, est rectangulum sub circumferentia tota & radio circuli; & hoc rectangulum, cum sit æquale duobus circulis, duplo majus est quam rectangulum prius. Proinde Nodi, ea cum velocitate uniformiter continuata quam habent in Syzygiis Lunaribus, spatium duplo majus describerent quam revera describunt; & propterea motus mediocris quocum, si uniformiter continuaretur, spatium a se inæquabili cum motu revera confectum describere possent, est semissis motus quem habent in Syzygiis Lunæ. Unde cum motus horarius maximus, si Nodi in Quadraturis versantur, sit 33″. 10‴. 33^{iv}. 12^{v}, motus mediocris horarius in hoc casu erit 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. Et cum motus horarius Nodorum semper sit ut AZ*qu.* & area $PDdM$ conjunctim, & propterea motus horarius Nodorum in Syzygiis Lunæ ut AZ*qu.* & area $PDdM$ conjunctim, id est (ob datam aream $PDdM$ in Syzygiis descriptam) ut AZ*qu.* erit etiam motus mediocris ut AZ*qu* atque adeo hic motus, ubi Nodi extra Quadraturas versantur, erit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut AZ*qu.* ad AT*qu*, *Q. E. D.*

PRO-

PROPOSITIO XXXI. PROBLEMA XII.

Invenire motum horarium Nodorum Lunæ in Orbe Elliptico.

Designet *Qpmaq* Ellipsin, axe majore *Qq*, minore *ab* descriptam, *QAq* Circulum circumscriptum, *T* Terram in utriusque centro communi, *S* Solem, *p* Lunam in Ellipsi motam, & *pm* arcum quem data temporis particula quam minima describit, *N* & *n* Nodos linea *Nn* junctos, *pK* & *mk* perpendicula in axem *Qq* demissa & hinc inde producta, donec occurrant Circulo in *P* & *M*,



& lineæ Nodorum in *D* & *d*. Et si Luna, radio ad Terram ducto, aream describat tempori proportionalem, erit motus Nodi in Ellipsi ut area *pDdm*.

Nam si *PF* tangat Circulum in *P*, & producta occurrat *TN* in *F*, & *pf* tangat Ellipsin in *p* & producta occurrat eidem *TN* in

in f, conveniant autem hæ tangentes in axe TQ ad T; & si ML designet spatium quod Luna in Circulo revolvens, interea dum describit arcum PM, urgente & impellente vi prædicta $3IT$, motu transverso describere posset, & ml designet spatium quod Luna in Ellipsi revolvens eodem tempore, urgente etiam vi $3IT$, describere posset; & producantur LP & lp donec occurrant plano Eclipticæ in G & g; & jungantur FG & fg, quarum FG producta secet pf, pg & TQ in c, e & R respective, & fg producta secet TQ in r: Quoniam vis $3IT$ seu $3PK$ in Circulo est ad vim $3IT$ seu $3pK$ in Ellipsi, ut PK ad pK, seu AT ad aT; erit spatium ML vi priore genitum, ad spatium ml vi posteriore genitum, ut PK ad pK, id est, ob similes figuras $PTKp$ & $FTRc$, ut FR ad cR. Est autem ML ad FG (ob similia triangula PLM, PGF) ut PL ad PG, hoc est (ob parallelas Lk, PK, GR) ut pl ad pe, id est, (ob similia triangula plm, cpe) ut lm ad ce; & inverse ut LM est ad lm, seu FR ad cR, ita est FG ad ce. Et propterea si fg esset ad ce ut fT ad cT, id est, ut fr ad cR (hoc est, ut fr ad FR & FR ad cR conjunctim, id est, ut fT ad FT & FG ad ce conjunctim,) quoniam ratio FG ad ce utrinque ablata relinquit rationes fg ad FG & fT ad FT, foret fg ad FG ut fT ad FT; atque adeo anguli, quos FG & fg subtenderent ad Terram T, æquarentur inter se. Sed anguli illi (per ea quæ in præcedente Propositione exposuimus) sunt motus Nodorum, quo tempore Luna in Circulo arcum PM, in Ellipsi arcum pm percurrit: & propterea motus Nodorum in Circulo & Ellipsi æquarentur inter se. Hæc ita se haberent, si modo fg esset ad ce ut fT ad cT, id est, si gf æqualis esset $\frac{ce \times fT}{cT}$. Verum ob similia triangula fgp, cep, est fg ad ce ut fp ad cp; ideoque fg æqualis est $\frac{ce \times fp}{cp}$; & propterea angulus, quem fg revera subtendit, est ad angulum priorem, quem FG subtendit, hoc est, motus Nodorum in Ellipsi ad modum Nodorum in Circulo, ut hæc fg seu $\frac{ce \times fp}{cp}$ ad priorem fg seu $\frac{ce \times fT}{cT}$, id est, ut $fp \times cT$ ad $fT \times cp$, seu fp ad fT & cT ad cp, hoc est, si ph ipsi TN parallela occurrat FP in h, ut Fh ad FT & FT ad FP; hoc est, ut Fh ad FP seu Dp ad DP, adeoque

 ut

ut area $\mathcal{D}pmd$ ad aream $\mathcal{D}PMd$. Et propterea, cum area posterior proportionalis sit motui Nodorum in Circulo, erit area prior proportionalis motui Nodorum in Ellipsi. *Q. E. D.*

Corol. Igitur cum, in data Nodorum positione, summa omnium arearum $p\mathcal{D}dm$, quo tempore Luna pergit a Quadratura ad locum quemvis m, sit area $mpQEd$, quæ ad Ellipseos tangentem QE terminatur; & summa omnium arearum illarum, in revolutione integra, sit area Ellipseos totius: motus mediocris Nodorum in Ellipsi erit ad motum mediocrem Nodorum in Circulo, ut Ellipsis ad Circulum; id est, ut Ta ad TA, seu 69 ad 70. Et propterea, cum motus mediocris horarius Nodorum in Circulo sit ad 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut $AZqu.$ ad $ATqu.$, si capiatur angulus 16″. 21‴. 3^{iv}. 30^{v}. ad angulum 16″. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. ut 69 ad 70, erit motus mediocris horarius Nodorum in Ellipsi ad 16″. 21‴. 3^{iv}. 30^{v}. ut AZq ad ATq; hoc est, ut quadratum sinus distantiæ Nodi a Sole ad quadratum Radii.

Cæterum Luna, radio ad Terram ducto, aream velocius describit in Syzygiis quam in Quadraturis, & eo nomine tempus in Syzygiis contrahitur, in Quadraturis producitur; & una cum tempore motus Nodorum augetur ac diminuitur. Erat autem momentum areæ in Quadraturis Lunæ ad ejus momentum in Syzygiis ut 10973 ad 11073, & propterea momentum mediocre in Octantibus est ad excessum in Syzygiis, defectumque in Quadraturis, ut numerorum semisumma 11023 ad eorundem semidifferentiam 50. Unde cum tempus Lunæ in singulis Orbis particulis æqualibus sit reciproce ut ipsius velocitas, erit tempus mediocre in Octantibus ad excessum temporis in Quadraturis, ac defectum in Syzygiis, ab hac causa oriundum, ut 11023 ad 50 quam proxime. Pergendo autem a Quadraturis ad Syzygias, invenio quod excessus momentorum areæ in locis singulis, supra momentum minimum in Quadraturis, sit ut quadratum sinus distantiæ Lunæ a Quadraturis quam proxime; & propterea differentia inter momentum in loco quocumque & momentum mediocre in Octantibus, est ut differentia inter quadratum sinus distantiæ Lunæ a Quadraturis & quadratum sinus graduum 45, seu semissem quadrati Radii; & incrementum temporis in locis singulis inter Octantes & Quadraturas, & decrementum ejus inter Octantes & Syzygias, est in eadem ratione. Motus autem Nodorum, quo tempore Luna percurrit singulas Orbis particulas æquales, acceleratur vel retardatur in duplicata ratione temporis. Est enim motus iste, dum Luna

per-

percurrit PM, (cæteris paribus) ut ML, & ML est in duplicata ratione temporis. Quare motus Nodorum in Syzygiis, eo tempore confectus quo Luna datas Orbis particulas percurrit, diminuitur in duplicata ratione numeri 11073 ad numerum 11023; estque decrementum ad motum reliquum ut 100 ad 10973, ad motum vero totum ut 100 ad 11073 quam proxime. Decrementum autem in locis inter Octantes & Syzygias, & incrementum in locis inter Octantes & Quadraturas, est quam proxime ad hoc decrementum, ut motus totus in locis illis ad motum totum in Syzygiis & differentia inter quadratum sinus distantiæ Lunæ a Quadratura & semissem quadrati Radii ad semissem quadrati Radii, conjunctim. Unde si Nodi in Quadraturis versentur, & capiantur loca duo æqualiter ab Octante hinc inde distantia, & alia duo a Syzygia & Quadratura iisdem intervallis distantia, deque decrementis motuum in locis duobus inter Syzygiam & Octantem, subducantur incrementa motuum in locis reliquis duobus, quæ sunt inter Octantem & Quadraturam; decrementum reliquum æquale erit decremento in Syzygia: uti rationem ineunti facile constabit. Proindeque decrementum mediocre, quod de Nodorum motu mediocri subduci debet, est pars quarta decrementi in Syzygia. Motus totus horarius Nodorum in Syzygiis (ubi Luna radio ad Terram ducto aream tempori proportionalem describere supponebatur) erat $32''. 42'''. 7^{iv}$. Et decrementum motus Nodorum, quo tempore Luna jam velocior describit idem spatium, diximus esse ad hunc motum ut 100 ad 11073; adeoque decrementum illud est $17'''. 43^{iv}. 11^{v}$, cujus pars quarta $4'''. 25^{iv}. 48^{v}$, motui horario mediocri superius invento $16''. 21'''. 3^{iv}. 30^{v}$. subducta, relinquit $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. motum mediocrem horarium correctum.

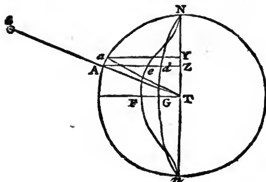
LIBER TERTIUS.

Si Nodi versantur extra Quadraturas, & spectantur loca bina a Syzygiis hinc inde æqualiter distantia; summa motuum Nodorum, ubi Luna versatur in his locis, erit ad summam motuum, ubi Luna in iisdem locis & Nodi in Quadraturis versantur, ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ Et decrementa motuum, a causis jam expositis oriunda, erunt ad invicem ut ipsi motus, adeoque motus reliqui erunt ad invicem ut $AZqu.$ ad $ATqu.$ & motus mediocres ut motus reliqui. Est itaque motus mediocris horarius correctus, in dato quocunque Nodorum situ, ad $16''. 16'''. 37^{iv}. 42^{v}$. ut $AZqu.$ ad $ATqu$; id est, ut quadratum sinus distantiæ Nodorum a Syzygiis ad quadratum Radii.

PROPOSITIO XXXII. PROBLEMA XIII.

Invenire motum medium Nodorum Lunæ.

Motus medius annuus eſt ſumma motuum omnium horariorum mediocrium in anno. Concipe Nodum verſari in N, & ſingulis horis completis retrahi in locum ſuum priorem, ut non obſtante motu ſuo proprio, datum ſemper ſervet ſitum ad Stellas Fixas. Interea vero Solem S, per motum Terræ, progredi a Nodo, & curſum annuum apparentem uniformiter complere. Sit autem Aa arcus datus quam minimus, quem recta TS ad Solem ſemper ducta, interſectione ſui & circuli NAn, dato tempore quam minimo deſcribit: & motus horarius mediocris (per jam oſtenſa) erit ut AZq, id eſt (ob proportionales AZ, ZY) ut rectangulum ſub AZ & ZY, hoc eſt ut area $AZYa$. Et ſumma omnium horariorum motuum mediocrium ab initio, ut ſumma omnium arearum $aYZA$, id eſt, ut area NAZ. Eſt autem maxima



$AZYa$ æqualis rectangulo ſub arcu Aa & radio circuli; & propterea ſumma omnium rectangulorum in circulo toto ad ſummam totidem maximorum, ut area circuli totius ad rectangulum ſub circumferentia tota & radio; id eſt, ut 1 ad 2. Motus autem horarius, rectangulo maximo reſpondens, erat 16″. 16‴. 37^{iv}. 42^{v}. Et hic motus, anno toto ſidereo dierum 365. *hor.* 6. *min.* 9. fit 39$^{gr.}$ 38′. 7″. 50‴. Ideoque hujus dimidium 19$^{gr.}$ 49′ 3″. 55‴. eſt motus.

tus medius Nodorum circulo toti respondens. Et motus Nodorum, quo tempore Sol pergit ab N ad A, est ad $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$. ut area NAZ ad circulum totum.

Hæc ita se habent, ex Hypothesi quod Nodus horis singulis in locum priorem retrahitur, sic ut Sol anno toto completo ad Nodum eundem redeat a quo sub initio digressus fuerat. Verum per motum Nodi fit ut Sol citius ad Nodum revertatur, & computanda jam est abbreviatio temporis. Cum Sol anno toto conficiat 360 gradus, & Nodus motu maximo eodem tempore conficeret $39^{gr.}\ 38'.\ 7''.\ 50'''$, seu 39,6355 gradus; & motus mediocris Nodi in loco quovis N sit ad ipsius motum mediocrem in Quadraturis suis, ut AZq ad ATq: erit motus Solis ad motum Nodi in N, ut $360\,ATq$ ad $39{,}6355\,AZq$; id est, ut $9{,}0827646\,ATq$ ad AZq. Unde si circuli totius circumferentia NAn dividatur in particulas æquales Aa, tempus quo Sol percurrat particulam Aa, si circulus quiesceret, erit ad tempus quo percurrit eandem particulam, si circulus una cum Nodis circa centrum T revolvatur, reciproce ut $9{,}0827646\,ATq$ ad $9{,}0827646\,ATq + ZAq$. Nam tempus est reciproce ut velocitas qua particula percurritur, & hæc velocitas est summa velocitatum Solis & Nodi. Igitur si tempus, quo Sol absque motu Nodi percurreret arcum NA, exponatur per Sectorem NTA, & particula temporis quo percurreret arcum quam minimum Aa, exponatur per Sectoris particulam ATa; & (perpendiculo aT in Nn demisso) si in AZ capiatur dZ, ejus longitudinis ut sit rectangulum dZ in ZT ad Sectoris particulam ATa ut AZq ad $9{,}0827646\,ATq + AZq$, id est, ut sit dZ ad $\frac{1}{2}\,AZ$ ut ATq ad $9{,}0827646\,ATq + AZq$; rectangulum dZ in ZT designabit decrementum temporis ex motu Nodi oriundum, tempore toto quo arcus Aa percurritur. Et si punctum d tangit Curvam $NdGn$, area curvilinea NdZ erit decrementum totum, quo tempore arcus totus NA percurritur; & propterea excessus Sectoris NAT supra aream NdZ erit tempus illud totum. Et quoniam motus Nodi tempore minore minor est in ratione temporis, debebit etiam area $AaTZ$ diminui in eadem ratione. Id quod fiet si capiatur in AZ longitudo eZ, quæ sit ad longitudinem AZ ut AZq ad $9{,}0827646\,ATq + AZq$. Sic enim rectangulum eZ in ZT erit ad aream $AZTa$ ut decrementum temporis quo arcus Aa percurritur, ad tempus totum quo percurreretur si Nodus quiesceret: Et propterea rectangulum illud respondebit decremento motus Nodi. Et si punctum e tangat

Curvam $NeFn$, area tota NeZ, quæ summa est omnium decrementorum, respondebit decremento toti, quo tempore arcus AN percurritur; & area reliqua NAe respondebit motui reliquo, qui verus est Nodi motus quo tempore arcus totus NA, per Solis & Nodi conjunctos motus, percurritur. Jam vero area semicirculi est ad aream Figuræ $NeFnT$, per methodum Serierum infinitarum quæsitam, ut 793 ad 60 quamproxime. Motus autem qui respondet Circulo toti erat $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$; & propterea motus qui Figuræ $NeFnT$ duplicatæ respondet, est $1^{gr.}\ 29'.\ 58''.\ 2'''$. Qui de motu priore subductus relinquit $18^{gr.}\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. motum totum Nodi inter sui ipsius Conjunctiones cum Sole; & hic motus de Solis motu annuo graduum 360 subductus, relinquit $341^{gr.}\ 40'.\ 54''.\ 7'''$. motum Solis inter easdem Conjunctiones. Iste autem motus est ad motum annuum $360^{gr.}$ ut Nodi motus jam inventus $18^{gr.}\ 19'.\ 5''.\ 53'''$. ad ipsius motum annuum, qui propterea erit $19^{gr.}\ 18.\ 1''.\ 23'''$. Hic est motus medius Nodorum in anno Sidereo. Idem per Tabulas Astronomicas est $19^{gr.}\ 21'.\ 21''.\ 50'''$. Differentia minor est parte trecentesima motus totius, & ab Orbis Lunaris Eccentricitate & Inclinatione ad planum Eclipticæ oriri videtur. Per Eccentricitatem Orbis motus Nodorum nimis acceleratur, & per ejus Inclinationem vicissim retardatur aliquantulum, & ad justam velocitatem reducitur.

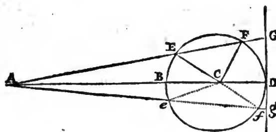
PROPOSITIO XXXIII. PROBLEMA XIV.

Invenire motum verum Nodorum Lunæ.

In tempore quod est ut area $NTA - NdZ$, (*in Fig. præced.*) motus iste est ut area $NAeN$, & inde datur. Verum ob nimiam calculi difficultatem, præstat sequentem Problematis constructionem adhibere. Centro C, intervallo quovis CD, describatur circulus $BEFD$. Producatur DC ad A, ut sit AB ad AC ut motus medius ad semissem motus veri mediocris, ubi Nodi sunt in Quadraturis, (id est, ut $19^{gr.}\ 18'.\ 1''.\ 23'''$. ad $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$, atque adeo BC ad AC ut motuum differentia $0^{gr.}\ 31'.\ 2''.\ 32'''$, ad motum posteriorem $19^{gr.}\ 49'.\ 3''.\ 55'''$) hoc est, ut 1 ad $38\frac{3}{10}$, dein per punctum D ducatur infinita Gg, quæ tangat circulum in D; & si capiatur angulus BCE vel BCF æqualis duplæ distantiæ Solis a loco Nodi, per motum medium invento;

&

& agatur AE vel AF secans perpendiculum DG in G; & capiatur angulus qui sit ad motum totum Nodi inter ipsius Syzygias (id est, ad $9^{gr.}\ 11'.\ 3''.$) ut tangens DG ad circuli BED circumferentiam totam; atque angulus iste (pro quo angulus DAG usurpari potest) ad motum medium Nodorum addatur ubi Nodi



transeunt a Quadraturis ad Syzygias, & ab eodem motu medio subducatur ubi transeunt a Syzygiis ad Quadraturas, habebitur eorum motus verus. Nam motus verus sic inventus congruet quam proxime cum motu vero qui prodit exponendo tempus per aream $NTA - NdZ$, & motum Nodi per aream $NAeN$; ut rem perpendenti & computationes instituenti constabit. Hæc est æquatio semestris motus Nodorum. Est & æquatio menstrua, sed quæ ad inventionem Latitudinis Lunæ minime necessaria est. Nam cum Variatio Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ duplici inæqualitati obnoxia sit, alteri semestri, alteri autem menstruæ; hujus menstrua inæqualitas & æquatio menstrua Nodorum ita se mutuo contemperant & corrigunt, ut ambæ in determinanda Latitudine Lunæ negligi possint.

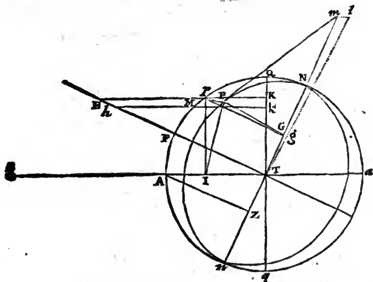
Corol. Ex hac & præcedente Propositione liquet quod Nodi in Syzygiis suis quiescunt, in Quadraturis autem regrediuntur motu horario $16''.\ 19'''.\ 26^{iv}.$ Et quod æquatio motus Nodorum in Octantibus sit $1^{gr.}\ 30'.$ Quæ omnia cum Phænomenis cœlestibus probe quadrant.

PRO-

PROPOSITIO XXXIV. PROBLEMA XV.

Invenire Variationem horariam Inclinationis Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Designent *A* & *a* Syzygias; *Q* & *q* Quadraturas; *N* & *n* Nodos; *P* locum Lunæ in Orbe suo; *p* vestigium loci illius in plano Eclipticæ, & *mTl* motum momentaneum Nodorum ut supra. Et si ad lineam *Tm* demittatur perpendiculum *PG*, jungatur *pG*, & producatur ea donec occurrat *Tl* in *g*, & jungatur etiam *Pg*: erit angulus *PGp* Inclinatio orbis Lunaris ad planum Eclipticæ,



ubi Luna versatur in *P*; & angulus *Pgp* Inclinatio ejusdem post momentum temporis completum; adeoque angulus *GPg* Variatio momentanea Inclinationis. Est autem hic angulus *GPg* ad angulum *GTg*, ut *TG* ad *PG* & *Pp* ad *PG* conjunctim. Et propterea si pro momento temporis substituatur hora; cum angulus *GTg* (per Proposit. xxx.) sit ad angulum 33″. 10‴, 33^iv. ut

IT×

$IT \times PG \times AZ$ ad $AT\ cub$, erit angulus GPg (seu Inclinationis horaria Variatio) ad angulum 33″ 10‴. 33^{iv}, ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\ cub$. *Q. E. I.*

Hæc ita se habent ex Hypothesi quod Luna in Orbe Circulari uniformiter gyratur. Quod si Orbis ille Ellipticus sit, motus mediocris Nodorum minuetur in ratione axis minoris ad axem majorem; uti supra expositum est. Et in eadem ratione minuetur etiam Inclinationis Variatio.

Corol. 1. Si ad Nn erigatur perpendiculum TF, sitque pM motus horarius Lunæ in plano Eclipticæ; & perpendicula pK, Mk in QT demissa & utrinque producta occurrant TF in H & h: erit IT ad AT ut Kk ad Mp, & TG ad Hp ut TZ ad AT, ideoque $IT \times TG$ æquale $\frac{Kk \times Hp \times TZ}{Mp}$, hoc est, æquale areæ $HpMh$ ductæ in rationem $\frac{TZ}{Mp}$: & propterea Inclinationis Variatio horaria ad 33″, 10‴, 33^{iv}, ut $HpMh$ ducta in $AZ \times \frac{TZ}{Mp} \times \frac{Pp}{PG}$ ad $AT\ cub$.

Corol. 2. Ideoque si Terra & Nodi singulis horis completis retraherentur à locis suis novis, & in loca priora in instanti semper reducerentur, ut situs eorum, per mensem integrum periodicum, datus maneret; tota Inclinationis Variatio tempore mensis illius foret ad 33″ 10‴, 33^{iv}, ut aggregatum omnium arearum $HpMh$, in revolutione puncti p genitarum, & sub signis propriis + & — conjunctarum, ductum in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\ cub$. id est, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $Mp \times AT\ cub$. hoc est, ut circulus totus $QAqa$ ductus in $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\ Mp \times AT\ quad$.

Corol. 3. Proinde in dato Nodorum situ, Variatio mediocris horaria, ex qua per mensem uniformiter continuata Variatio illa menstrua generari posset, est ad 33″. 10‴. 33^{iv}, ut $AZ \times TZ \times \frac{Pp}{PG}$ ad $2\ ATq$, sive ut $Pp \times \frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{2} AT}$ ad $PG \times 4\ AT$, id

 est

est (cum Pp sit ad PG ut sinus Inclinationis prædictæ ad radium, & $\frac{AZ \times TZ}{\frac{1}{4}AT}$ sit ad 4 AT ut sinus duplicati anguli ATn ad radium quadruplicatum) ut Inclinationis ejusdem sinus ductus in sinum duplicatæ distantiæ Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii.

Corol. 4. Quoniam Inclinationis horaria Variatio, ubi Nodi in Quadraturis versantur, est (per hanc Propositionem) ad angulum 33″. 10‴. 33^{iv}. ut $IT \times AZ \times TG \times \frac{Pp}{PG}$ ac $AT cub.$ id est, ut $\frac{IT \times TG}{\frac{1}{2}AT} \times \frac{Pp}{PG}$ ad 2 AT, hoc est, ut sinus duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ductus in $\frac{Pp}{PG}$ ad radium duplicatum: summa omnium Variationum horariarum, quo tempore Luna in hoc situ Nodorum transit à Quadratura ad Syzygiam, (id est, spatio horarum $177\frac{1}{5}$,) erit ad summam totidem angulorum 33″. 10‴. 33^{iv}, seu 5878″., ut summa omnium sinuum duplicatæ distantiæ Lunæ à Quadraturis ducta in $\frac{Pp}{PG}$, ad summam totidem diametrorum; hoc est, ut diameter ducta in $\frac{Pp}{PG}$ ad circumferentiam: id est, si Inclinatio sit 5$^{gr.}$ 1′, ut $7 \times \frac{874}{10000}$ ad 22, seu 278 ad 10000. Proindeque Variatio tota, ex summa omnium horariarum Variationum tempore prædicto conflata, est 163″, seu 2′. 43″.

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA XVI.

Dato tempore invenire Inclinationem Orbis Lunaris ad planum Eclipticæ.

Sit AD sinus Inclinationis maximæ, & AB sinus Inclinationis minimæ. Bisecetur BD in C, & centro C, intervallo BC, describatur Circulus BGD. In AC capiatur CE in ea ratione ad EB quam EB habet ad $2BA$; Et si dato tempore constituatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Qua-

Quadraturis, & ad AD demittatur perpendiculum GH: erit AH sinus Inclinationis quæsitæ.

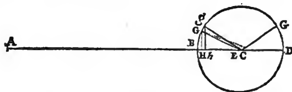
Nam GEq æquale est $GHq + HEq = BHD + HEq = HBD + HEq - BHq = HBD + BEq - 2BH \times BE = BEq + 2EC \times BH = 2EC \times AB + 2EC \times BH = 2EC \times AH$. Ideoque cum $2EC$ detur, est GEq ut AH. Designet jam AEg duplicatam distantiam Nodorum à Quadraturis post datum aliquod momentum temporis completum, & arcus Gg, ob datum angulum GEg, erit ut distantia GE. Est autem Hh ad Gg ut GH ad GC, & propterea Hh est ut contentum $GH \times Gg$ seu $GH \times GE$; id est, ut $\frac{GH}{GE} \times GEq$ seu $\frac{GH}{GE} \times AH$, id est, ut AH & sinus anguli AEG conjunctim. Igitur si AH in casu aliquo sit sinus Inclinationis, augebitur ea iisdem incrementis cum sinu Inclinationis, per Corol. 3. Propositionis superioris, & propterea sinui illi æqualis semper manebit. Sed AH ubi punctum G incidit in punctum alterutrum B vel D huic sinui æqualis est, & propterea eidem semper æqualis manet. *Q. E. D.*

In hac demonstratione suppofui angulum BEG, qui est duplicata distantia Nodorum à Quadraturis, uniformiter augeri. Nam omnes inæqualitatum minutias expendere non vacat. Concipe jam angulum BEG rectum esse, & in hoc casu Gg esse augmentum horarium duplæ distantiæ Nodorum & Solis ab invicem; & Inclinationis Variatio horaria in eodem casu (per Corol. 3. Prop. novissimæ) erit ad 33''. 12'''. 33^{iv}. ut contentum sub Inclinationis sinu AH & sinu anguli recti BEG, qui est duplicata distantia Nodorum a Sole, ad quadruplum quadratum radii; id est, ut mediocris Inclinationis sinus AH ad radium quadruplicatum; hoc est (cum Inclinatio illa mediocris sit quasi $5^{gr.}\ 8\frac{1}{2}'$) ut ejus sinus 896 ad radium quadruplicatum 40000, sive ut 224 ad 10000. Est autem Variatio tota, sinuum differentiæ BD respondens, ad Variationem illam horariam ut diameter BD ad

 arcum

 arcum Gg; id est, ut diameter BD ad semicircumferentiam BGD & tempus horarum $2079\frac{7}{10}$, quo Nodus pergit à Quadraturis ad Syzygias, ad horam unam conjunctim; hoc est, ut 7 ad 11 & $2079\frac{7}{10}$ ad 1. Quare si rationes omnes conjungantur, fiet Variatio tota BD ad 33″. 10‴. 33iv. ut $224 \times 7 \times 2079\frac{7}{10}$ ad 110000, id est, ut 29645 ad 1000, & inde Variatio illa BD prodibit 16′. $23''\frac{1}{2}$.

Hæc est Inclinationis Variatio maxima quatenus locus Lunæ in Orbe suo non consideratur. Nam Inclinatio, si Nodi in Syzygiis versantur, nil mutatur ex vario situ Lunæ. At si Nodi in Quadraturis consistunt, Inclinatio minor est ubi Luna versatur in Syzygiis, quam ubi ea versatur in Quadraturis, excessu 2′. 43″; uti in Propositionis superioris Corollario quarto indicavimus. Et hujus excessus dimidio 1′. $21''\frac{1}{2}$. Variatio tota mediocris BD in Quadraturis Lunaribus diminuta fit 15″. 2″, in ipsius autem Syzygiis aucta fit 17′. 45″. Si Luna igitur in Syzygiis constituatur, Variatio tota, in transitu Nodorum à Quadraturis ad Syzygias, erit 17′. 45″: adeoque si Inclinatio, ubi Nodi in Syzygiis versantur, sit 5gr. 17′. 20″; eadem, ubi Nodi sunt in Quadraturis, & Luna in Syzygiis, erit 4gr. 59′ 35″. Atque hæc ita se habere confirmatur ex Observationibus.



Si jam desideretur Orbis Inclinatio illa, ubi Luna in Syzygiis & Nodi ubivis versantur; fiat AB ad AD ut sinus graduum 4. 59′. 35″. ad sinum graduum 5. 17′. 20″, & capiatur angulus AEG æqualis duplicatæ distantiæ Nodorum à Quadraturis; & erit AH sinus Inclinationis quæsitæ. Huic Orbis Inclinationi æqualis est ejusdem Inclinatio, ubi Luna distat 90gr. à Nodis. In aliis Lunæ locis inæqualitas menstrua, quam inclinationis variatio admittit, in calculo Latitudinis Lunæ compensatur & quodammodo tollitur per inæqualitatem menstruam motus Nodorum, (ut supra diximus) adeoque in calculo Latitudinis illius negligi potest.

Scho-

Scholium.

Hisce motuum Lunarium computationibus ostendere volui, quod motus Lunares, per Theoriam Gravitatis, a causis suis computari possint. Per eandem Theoriam inveni praeterea quod Æquatio Annua medii motus Lunæ oriatur a varia dilatatione Orbis Lunæ per vim Solis, juxta Corol. 6. Prop. LXVI. Lib. I. Hæc vis in Perigæo Solis major est, & Orbem Lunæ dilatat; in Apogæo ejus minor est, Orbem illum contrahi permittit. In Orbe dilatato Luna tardius revolvitur, in contracto citius; & Æquatio Annua per quam hæc inæqualitas compensatur, in Apogæo & Perigæo Solis nulla est, in mediocri Solis a Terra distantia ad 11'. 50". circiter ascendit, in aliis locis Æquationi centri Solis proportionalis est; & additur medio motui Lunæ ubi Terra pergit ab Aphelio suo ad Perihelium, & in opposita Orbis parte subducitur. Assumendo radium Orbis magni 1000 & Eccentricitatem Terræ $16\frac{7}{8}$, hæc Æquatio ubi maxima est, per Theoriam Gravitatis prodiit 11'. 49". Sed Eccentricitas Terræ paulo major esse videtur, & aucta Eccentricitate hæc Æquatio augeri debet in eadem ratione. Sit Eccentricitas $16\frac{11}{12}$, & Æquatio maxima erit 11'. 52".

Inveni etiam quod in Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, Apogæum & Nodi Lunæ velocius moventur quam in Aphelio ejus, idque in triplicata ratione distantiæ Terræ a Sole inverse. Et inde oriuntur Æquationes Annuæ horum motuum Æquationi centri Solis proportionales. Motus autem Solis est in duplicata ratione distantiæ Terræ a Sole inverse, & maxima centri Æquatio quam hæc inæqualitas generat, est 1gr. 56'. 26" prædictæ Solis Eccentricitati $16\frac{11}{12}$ congruens. Quod si motus Solis esset in triplicata ratione distantiæ inverse, hæc inæqualitas generaret Æquationem maximam 2gr. 56'. 9". Et propterea Æquationes maximæ quas inæqualitates motuum Apogæi & Nodorum Lunæ generant, sunt ad 2gr. 56. 9", ut motus medius diurnus Apogæi & motus medius diurnus Nodorum Lunæ sunt ad motum medium diurnum Solis. Unde prodit Æquatio maxima medii motus Apogæi 19'. 52": & Æquatio maxima medii motus Nodorum 9'. 27". Additur vero Æquatio prior & subducitur posterior, ubi Terra pergit a Perihelio suo ad Aphelium: & contrarium fit in opposita Orbis parte.

DE MUNDI SYSTEMATE.

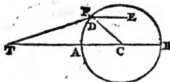
Per Theoriam Gravitatis constitit etiam quod actio Solis in Lunam paulo major sit ubi transversa diameter Orbis Lunaris transit per Solem, quam ubi eadem ad rectos est angulos cum linea Terram & Solem jungente: & propterea Orbis Lunaris paulo major est in priore casu quam in posteriore. Et hinc oritur alia Æquatio motus medii Lunaris, pendens a situ Apogæi Lunæ ad Solem, quæ quidem maxima est cum Apogæum Lunæ versatur in Octante cum Sole; & nulla cum illud ad Quadraturas vel Syzygias pervenit: & motui medio additur in transitu Apogæi Lunæ a Solis Quadratura ad Syzygiam, & subducitur in transitu Apogæi a Syzygia ad Quadraturam. Hæc Æquatio quam Semestrem vocabo, in Octantibus Apogæi quando maxima est, ascendit ad 3′. 45″ circiter, quantum ex Phænomenis colligere potui. Hæc est ejus quantitas in mediocri Solis distantia a Terra. Augetur vero ac diminuitur in triplicata ratione distantiæ Solis inverse, adeoque in maxima Solis distantia est 3′. 34″, & in minima 3′. 56″ quamproxime: ubi vero Apogæum Lunæ situm est extra Octantes, evadit minor; estque ad Æquationem maximam, ut sinus duplæ distantiæ Apogæi Lunæ a proxima Syzygia vel Quadratura ad radium.

Per eandem Gravitatis Theoriam actio Solis in Lunam paulo major est ubi linea recta per Nodos Lunæ ducta transit per Solem, quam ubi linea ad rectos est angulos cum recta Solem ac Terram jungente. Et inde oritur alia medii motus Lunaris Æquatio, quam Semestrem secundam vocabo, quæque maxima est ubi Nodi in Solis Octantibus versantur, & evanescit ubi sunt in Syzygiis vel Quadraturis, & in aliis Nodorum positionibus proportionalis est sinui duplæ distantiæ Nodi alterutrius a proxima Syzygia aut Quadratura: additur vero medio motui Lunæ dum Nodi transeunt a Solis Quadraturis ad proximas Syzygias, & subducitur in eorum transitu a Syzygiis ad Quadraturas; & in Octantibus ubi maxima est, ascendit ad 47″ in mediocri Solis distantia a Terra, uti ex Theoria Gravitatis colligo. In aliis Solis distantiis hæc Æquatio, in Octantibus Nodorum, est reciproce ut cubus distantiæ Solis a Terra, ideoque in Perigæo Solis ad 45″ in Apogæo ejus ad 49″ circiter ascendit.

Per eandem Gravitatis Theoriam Apogæum Lunæ progreditur quam maxime ubi vel cum Sole conjungitur vel eidem opponitur, & regreditur ubi cum Sole Quadraturam facit. Et Eccentricitas fit maxima in priore casu & minima in posteriore, per Corol.

7, 8 & 9

7, 8 & 9. Prop. LXVI. Lib. I. Et hæ inæqualitates per eadem Corollaria permagnæ sunt, & Æquationem principalem Apogæi generant, quam Semestrem vocabo. Et Æquatio maxima Semestris est 12gr. 18′ circiter, quantum ex Observationibus colligere potui. *Horroxius* noster Lunam in Ellipsi circum Terram, in ejus umbilico inferiore constitutam, revolvi primus statuit. *Halleius* centrum Ellipseos in Epicyclo locavit, cujus centrum uniformiter revolvitur circum Terram. Et ex motu in Epicyclo oriuntur inæqualitates jam dictæ in progressu & regressu Apogæi & quantitate Eccentricitatis. Dividi intelligatur distantia mediocris Lunæ a Terra in partes 100000, & referat *T* Terram & *TC* Eccentricitatem mediocrem Lunæ partium 5505. Producatur *TC* ad *B*, ut sit *CB* sinus Æquationis maximæ Semestris 12gr. 18′ ad radium *TC*, & circulus *BDA* centro *C* intervallo *CB* descriptus, erit Epicyclus ille in quo centrum Orbis Lunaris locatur & secundum ordinem literarum *BDA* revolvitur. Capiatur angulus *BCD* æqualis duplo Argumento annuo, seu duplæ distantiæ veri loci Solis ab Apogæo Lunæ semel æquato, & erit *CTD* Æquatio

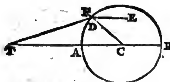


Semestris Apogæi Lunæ & *TD* Eccentricitas Orbis ejus in Apogæum secundo æquatum tendens. Habitis autem Lunæ motu medio & Apogæo & Eccentricitate, ut & Orbis axe majore partium 200000; ex his eruetur verus Lunæ locus in Orbe & distantia ejus a Terra, idque per Methodos notissimas.

In Perihelio Terræ, propter majorem vim Solis, centrum Orbis Lunæ velocius movetur circum centrum *C* quam in Aphelio, idque in triplicata ratione distantiæ Terræ a Sole inverse. Ob Æquationem centri Solis in Argumento annuo comprehensam, centrum Orbis Lunæ velocius movetur in Epicyclo *BDA* in duplicata ratione distantiæ Terræ a Sole inverse. Ut idem adhuc velocius moveatur in ratione simplici distantiæ inverse; ab Orbis centro *D* agatur recta *DE* versus Apogæum Lunæ, seu rectæ *TC* parallela, & capiatur angulus *EDG* æqualis excessui Argumenti

menti annui prædicti supra distantiam Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in consequentia; vel quod perinde est, capiatur angulus *CDF* æqualis complemento Anomaliæ veræ Solis ad gradus 360. Et sit *DF* ad *DC* ut dupla Eccentricitas Orbis magni ad distantiam mediocrem Solis a Terra, & motus medius diurnus Solis ab Apogæo Lunæ ad motum medium diurnum Solis ab Apogæo proprio conjunctim, id est, ut $33\frac{7}{8}$ ad 1000 & 52'. 27". 16''' ad 59' 8". 10''' conjunctim, sive ut 3 ad 100. Et concipe centrum Orbis Lunæ locari in puncto *F*, & in Epicyclo cujus centrum est *D* & radius *DF* interea revolvi dum punctum *D* progreditur in circumferentia circuli *DABD*. Hac enim ratione velocitas qua centrum Orbis Lunæ in linea quadam curva circum centrum *C* descripta movebitur, erit reciproce ut cubus distantiæ Solis a Terra quamproxime, ut oportet.

Computatio motus hujus difficilis est, sed facilior reddetur per approximationem sequentem. Si distantia mediocris Lunæ a Terra sit partium 100000, & Eccentricitas *TC* sit partium 5505 ut supra: recta *CB* vel *CD* invenietur partium $1172\frac{3}{4}$, & recta *DF*



partium $35\frac{1}{5}$. Et hæc recta ad distantiam *TC* subtendit angulum ad Terram quem translatio centri Orbis a loco *D* ad locum *F* generat in motu centri hujus: & eadem recta duplicata in situ parallelo ad distantiam superioris umbilici Orbis Lunæ a Terra, subtendit eundem angulum, quem utique translatio illa generat in motu umbilici, & ad distantiam Lunæ a Terra subtendit angulum quem eadem translatio generat in motu Lunæ, quique propterea Æquatio centri Secunda dici potest. Et hæc Æquatio in mediocri Lunæ distantia a Terra, est ut sinus anguli quem recta illa *DF* cum recta a puncto *F* ad Lunam ducta continet quamproxime, & ubi maxima est evadit 2'. 25". Angulus autem quem recta *DF* & recta a puncto *F* ad Lunam ducta comprehendunt, invenitur vel subducendo angulum *EDF* ab Anomalia media Lunæ, vel addendo distantiam Lunæ a Sole ad distantiam Apogæi Lunæ ab Apogæo Solis

Solis. Et ut radius est ad sinum anguli sic inventi, ita 2′. 25″ Liber
sunt ad Æquationem centri Secundam, addendam si summa illa Tertius.
sit minor semicirculo, subducendam si major. Sic habebitur ejus Longitudo in ipsis Luminarium Syzygiis.

Si computatio accuratior desideretur, corrigendus est locus Lunæ in Orbe ut supra inventus per Variationem duplicem. De Variatione Prima & principali diximus supra, hæc maxima est in Octantibus Lunæ. Variatio altera maxima est in Quadrantibus, & oritur a varia Solis actione in Orbem Lunæ pro varia positione Apogæi Lunæ ad Solem, computatur vero in hunc modum. Ut radius ad sinum versum distantiæ Apogæi Lunæ a Perigæo Solis in consequentia, ita angulus quidam P ad quartum proportionalem. Et ut radius ad sinum distantiæ Lunæ a Sole, ita summa hujus quarti proportionalis & anguli cujusdam alterius Q ad Variationem Secundam, subducendam si Lunæ lumen augetur, addendam si diminuitur. Sic habebitur locus verus Lunæ in Orbe, & per Reductionem loci hujus ad Eclipticam habebitur Longitudo Lunæ. Anguli vero P & Q ex Observationibus determinandi sunt. Et interea si pro angulo P usurpentur 2′, & pro angulo Q 1′, non multum errabitur.

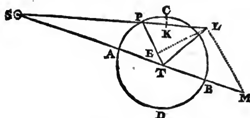
Cum Atmosphæra Terræ ad usque altitudinem milliarium 35 vel 40 refringat lucem Solis, & refringendo spargat eandem in Umbram Terræ, & spargendo lucem in confinio Umbræ dilatat Umbram: ad diametrum Umbræ quæ per Parallaxim prodit, addo minutum unum primum in Eclipsibus Lunæ, vel minutum unum cum triente.

Theoria vero Lunæ primo in Syzygiis, deinde in Quadraturis, & ultimo in Octantibus per Phænomena examinari & stabiliri debet. Et opus hocce aggressurus motus medios Solis & Lunæ ad tempus meridianum in Observatorio Regio *Grenovicensi*, die ultimo mensis *Decembris* anni 1700. st. vet. non incommode sequentes adhibebit: nempe motum medium Solis ♑ $20^{gr.}$ 43′. 40″, & Apogæi ejus ♋ $7^{gr.}$ 44′. 30″, & motum medium Lunæ ♒ $15^{gr.}$ 20′. 00″, & Apogæi ejus ♓ $8^{gr.}$ 20′. 00″, & Nodi ascendentis ♌ $27^{r.}$ 24′. 20″; & differentiam meridianorum Observatorii hujus & Observatorii Regii *Parisiensis* $0^{hor.}$ $9^{min.}$ $20^{sec.}$

PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA XVII.

Invenire vim Solis ad Mare movendum.

Solis vis ML ſeu PT, in Quadraturis Lunaribus, ad perturbandos motus Lunares, erat (per Prop. xxv. hujus) ad vim gravitatis apud nos, ut 1 ad 638092,6. Et vis $TM-LM$ ſeu $2PK$ in Syzygiis Lunaribus, eſt duplo major. Hæ autem vires, ſi deſcendatur ad ſuperficiem Terræ, diminuuntur in ratione diſtantiarum a centro Terræ, id eſt, in ratione $60\frac{1}{2}$ ad 1; adeoque vis prior in ſuperficie Terræ, eſt ad vim gravitatis, ut 1 ad 38604600. Hac vi Mare deprimitur in locis quæ 90 gradibus diſtant



a Sole. Vi altera quæ dupla major eſt, Mare elevatur & ſub Sole & in regione Soli oppoſita. Summa virium eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200. Et quoniam vis eadem eundem ciet motum, ſive ea deprimat Aquam in regionibus quæ 90 gradibus diſtant à Sole, ſive elevet eandem in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, hæc ſumma erit tota Solis vis ad Mare agitandum; & eundem habebit effectum ac ſi tota in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis Mare elevaret, in regionibus autem quæ 90 gradibus diſtant a Sole nil ageret.

Hæc eſt vis Solis ad Mare ciendum in loco quovis dato, ubi Sol tam in vertice loci verſatur quam in mediocri ſua diſtantia a Terra. In aliis Solis poſitionibus vis ad Mare attollendum, eſt ut ſinus verſus duplæ altitudinis Solis ſupra horizontem loci directe & cubus diſtantiæ Solis a Terra inverſe.

Corol. Cum vis centrifuga partium Terræ à diurno Terræ motu oriunda, quæ eſt ad vim gravitatis ut 1 ad 289, efficiat ut altitudo

tudo Aquæ ſub Æquatore ſuperet ejus altitudinem ſub Polis menſura pedum Pariſienſium 85820; vis Solaris de qua egimus, cum ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, atque adeo ad vim illam centrifugam ut 289 ad 12868200 ſeu 1 ad 44527, efficiet ut altitudo Aquæ in regionibus ſub Sole & Soli oppoſitis, ſuperet altitudinem ejus in locis quæ 90 gradibus diſtant a Sole, menſura tantum pedis unius Pariſienſis & digitorum undecim cum octava parte digiti. Eſt enim hæc menſura ad menſuram pedum 85820 ut 1 ad 44527.

PROPOSITIO XXXVII. PROBLEMA XVIII.

Invenire vim Lunæ ad Mare movendum.

Vis Lunæ ad Mare movendum colligenda eſt ex ejus proportione ad vim Solis, & hæc proportio colligenda eſt ex proportione motuum Maris, qui ab his viribus oriuntur. Ante oſtium fluvii *Avonæ* ad lapidem tertium infra *Briſtoliam*, tempore verno & autumnali totus Aquæ aſcenſus in Conjunctione & Oppoſitione Luminarium (obſervante *Samuele Sturmio*) eſt pedum plus minus 45, in Quadraturis autem eſt pedum tantum 25. Altitudo prior ex ſumma virium, poſterior ex earundem differentia oritur. Solis igitur & Lunæ in Æquatore verſantium & mediocriter a Terra diſtantium ſunto vires S & L, & erit L + S ad L — S ut 45 ad 25, ſeu 9 ad 5.

In portu *Plymuthi* Æſtus maris (ex obſervatione *Samuelis Colepreſſi*) ad pedes plus minus ſexdecim altitudine mediocri attollitur, ac tempore verno & autumnali altitudo Æſtus in Syzygiis ſuperare poteſt altitudinem ejus in Quadraturis, pedibus plus ſeptem vel octo. Si maxima harum altitudinum differentia ſit pedum novem, erit L + S ad L — S ut $20\frac{1}{2}$ ad $11\frac{1}{2}$ ſeu 41 ad 23. Quæ proportio ſatis congruit cum priore. Ob magnitudinem Æſtus in portu *Briſtoliæ*, obſervationibus *Sturmii* magis fidendum eſſe videtur, ideoque donec aliquid certius conſtiterit, proportionem 9 ad 5 uſurpabimus.

Cæterum ob aquarum reciprocos motus, Æſtus maximi non incidunt in ipſas Luminarium Syzygias, ſed ſunt tertii a Syzygiis ut dictum fuit, ſeu proxime ſequuntur tertium Lunæ poſt Syzygias appulſum ad meridianum loci, vel potius (ut a *Sturmio* notatur) ſunt tertii poſt diem novilunii vel plenilunii, ſeu poſt ho-

ram a novilunio vel plenilunio plus minus duodecimam, adeoque incidunt in horam a novilunio vel plenilunio plus minus quadragesimam tertiam. Incidunt vero in hoc portu in horam septimam circiter ab appulsu Lunæ ad meridianum loci; ideoque proxime sequuntur appulsum Lunæ ad meridianum, ubi Luna distat a Sole vel ab oppositione Solis gradibus plus minus octodecim vel novemdecim in consequentia. Æstas & Hyems maxime vigent, non in ipsis Solstitiis, sed ubi Sol distat a Solstitiis decima circiter parte totius circuitus, seu gradibus plus minus 36 vel 37. Et similiter maximus Æstus maris oritur ab appulsu Lunæ ad meridianum loci, ubi Luna distat a Sole decima circiter parte motus totius ab Æstu ad Æstum. Sit distantia illa graduum plus minus $18\frac{1}{2}$. Et vis Solis in hac distantia Lunæ a Syzygiis & Quadraturis, minor erit ad augendum & ad minuendum motum maris a vi Lunæ oriundum, quam in ipsis Syzygiis & Quadraturis, in ratione radii ad sinum complementi distantiæ hujus duplicatæ seu anguli graduum 37, hoc est, in ratione 10000000 ad 7986355. Ideoque in analogia superiore pro S scribi debet 0, 7986355 S.

Sed & vis Lunæ in Quadraturis, ob declinationem Lunæ ab Æquatore, diminui debet. Nam Luna in Quadraturis, vel potius in gradu $18\frac{1}{2}$ post Quadraturas, in declinatione graduum plus minus 22. 13′ versatur. Et Luminaris ab Æquatore declinantis vis ad Mare movendum diminuitur in duplicata ratione sinus complementi declinationis quamproxime. Et propterea vis Lunæ in his Quadraturis est tantum 0,8570327 L. Est igitur L + 0,7986355 S ad 0,8570327 L — 0,7986355 S ut 9 ad 5.

Præterea diametri Orbis in quo Luna absque Eccentricitate moveri deberet, sunt ad invicem ut 69 ad 70; ideoque distantia Lunæ a Terra in Syzygiis est ad distantiam ejus in Quadraturis, ut 69 ad 70, cæteris paribus. Et distantiæ ejus in gradu $18\frac{1}{2}$ a Syzygiis ubi Æstus maximus generatur, & in gradu $18\frac{1}{2}$ a Quadraturis ubi Æstus minimus generatur, sunt ad mediocrem ejus distantiam, ut 69,098747 & 69,897345 ad $69\frac{1}{2}$. Vires autem Lunæ ad Mare movendum sunt in triplicata ratione distantiarum inverse, ideoque vires in maxima & minima harum distantiarum sunt ad vim in mediocri distantia, ut 0,9830427 & 1,017522 ad 1. Unde fit 1,017522 L + 0,7986355 S ad 0,9830427 × 0,8570327 L — 0,7986355 S ut 9 ad 5. Et S ad L ut 1 ad 4,4815. Itaque cum vis Solis sit ad vim gravitatis ut 1 ad 12868200, vis Lunæ erit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400.

Corol.

Corol. 1. Cum Aqua vi Solis agitata ascendat ad altitudinem pedis unius & undecim digitorum cum octava parte digiti, eadem vi Lunæ ascendet ad altitudinem octo pedum & digitorum octo, & vi utraque ad altitudinem pedum decem cum semisse, & ubi Luna est in Perigæo ad altitudinem pedum duodecim cum semisse & ultra, præsertim ubi Æstus ventis spirantibus adjuvatur. Tanta autem vis ad omnes Maris motus excitandos abunde sufficit, & quantitati motuum probe respondet. Nam in maribus quæ ab Oriente in Occidentem late patent, uti in Mari *Pacifico*, & Maris *Atlantici* & *Æthiopici* partibus extra Tropicos, aqua attolli solet ad altitudinem pedum sex, novem, duodecim vel quindecim. In Mari autem *Pacifico*, quod profundius est & latius patet, Æstus dicuntur esse majores quam in *Atlantico* & *Æthiopico*. Etenim ut plenus sit Æstus, latitudo Maris ab Oriente in Occidentem non minor esse debet quàm graduum nonaginta. In Mari *Æthiopico*, ascensus aquæ intra Tropicos minor est quam in Zonis temperatis, propter angustiam Maris inter *Africam* & Australem partem *Americæ*. In medio Mari aqua nequit ascendere, nisi ad littus utrumque & orientale & occidentale simul descendat: cum tamen vicibus alternis ad littora illa in Maribus nostris angustis descendere debeat. Ea de causa fluxus & refluxus in Insulis, quæ à littoribus longissime absunt, perexiguus esse solet. In Portubus quibusdam, ubi aqua cum impetu magno per loca vadosa, ad Sinus alternis vicibus implendos & evacuandos, influere & effluere cogitur, fluxus & refluxus debent esse solito majores, uti ad *Plymuthum* & pontem *Chepstowæ* in *Anglia*; ad montes S. *Michaelis* & urbem *Abrincatuorum* (vulgo *Avranches*) in *Normania*; ad *Cambaiam* & *Pegu* in *India* orientali. His in locis mare, magna cum velocitate accedendo & recedendo, littora nunc inundat nunc arida relinquit ad multa milliaria. Neque impetus influendi & remeandi prius frangi potest, quam aqua attollitur vel deprimitur ad pedes 30, 40, vel 50 & amplius. Et par est ratio fretorum oblongorum & vadosorum, uti *Magellanici* & ejus quo *Anglia* circundatur. Æstus in hujusmodi portubus & fretis, per impetum cursus & recursus supra modum augetur. Ad littora vero quæ descensu præcipiti ad mare profundum & apertum spectant, ubi aqua sine impetu effluendi & remeandi attolli & subsidere potest, magnitudo Æstus respondet viribus Solis & Lunæ.

Corol. 2. Cum vis Lunæ ad Mare movendum, ſit ad vim gravitatis ut 1 ad 2871400, perſpicuum eſt quod vis illa ſit longe minor quam quæ vel in experimentis Pendulorum, vel in Staticis aut Hydroſtaticis quibuſcunque ſentiri poſſit. In Æſtu ſolo marino hæc vis ſenſibilem edit effectum.

Corol. 3. Quoniam vis Lunæ ad Mare movendum, eſt ad Solis vim conſimilem ut 4,4815 ad 1, & vires illæ (per Corol. 14. Prop. LXVI. Lib. I.) ſunt ut denſitates corporum Lunæ & Solis & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas Lunæ erit ad denſitatem Solis, ut 4,4815 ad 1 directe & cubus diametri Lunæ ad cubum diametri Solis inverſe: id eſt (cum diametri mediocres apparentes Lunæ & Solis ſint 31′. 16½″ & 32′. 12″) ut 4891 ad 1000. Denſitas autem Solis erat ad denſitatem Terræ, ut 100 ad 396; & propterea denſitas Lunæ eſt ad denſitatem Terræ, ut 4891 ad 3960 ſeu 21 ad 17. Eſt igitur corpus Lunæ denſius & magis terreſtre quam Terra noſtra.

Corol. 4. Et cum vera diameter Lunæ (ex Obſervationibus Aſtronomicis) ſit ad veram diametrum Terræ, ut 100 ad 365; erit maſſa Lunæ ad maſſam Terræ, ut 1 ad 39,371.

Corol. 5. Et gravitas acceleratrix in ſuperficie Lunæ, erit quaſi triplo minor quam gravitas acceleratrix in ſuperficie Terræ.

Corol. 6. Et diſtantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ad diſtantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,371 ad 39,371.

Corol. 7. Et mediocris diſtantia centri Lunæ a centro Terræ, erit ſemidiametrorum maximarum Terræ 60¼ quamproxime. Nam ſemidiameter maxima Terræ fuit pedum Pariſienſium 19767630, & mediocris diſtantia centrorum Terræ & Lunæ ex hujuſmodi ſemidiametris 60¼ conſtans, æqualis eſt pedibus 1190999707. Et hæc diſtantia (per Corollarium ſuperius) eſt ad diſtantiam centri Lunæ a communi gravitatis centro Terræ & Lunæ, ut 40,371 ad 39,371, quæ proinde eſt pedum 1161498340. Et cum Luna revolvatur reſpectu Fixarum, diebus 27, horis 7 & minutis primis 43⅕, ſinus verſus anguli quem Luna, tempore minuti unius primi motu ſuo medio, circa commune gravitatis centrum Terræ & Lunæ deſcribit, eſt 1275235, exiſtente radio 100, 000000, 000000. Et ut radius eſt ad hunc ſinum verſum, ita ſunt pedes 1161498340 ad pedes 14,811833. Luna igitur vi illa qua retinetur in Orbe, cadendo in Terram, tempore minuti unius primi deſcribet pedes 14,811833. Et ſi hæc vis augeatur in ratione $177\frac{29}{40}$ ad $178\frac{29}{40}$, habebitur

bebitur vis tota gravitatis in Orbe Lunæ, per Corol. Prop. III. Et hac vi Luna cadendo, tempore minuti unius primi describere deberet pedes 14,89517. Et ad sexagesimam partem hujus distantiæ, id est, ad distantiam pedum 19849995 a centro Terræ, corpus grave cadendo, tempore minuti unius secundi describere deberet etiam pedes 14,89517. Diminuatur hæc distantia in subduplicata ratione pedum 14,89517 ad pedes 15,12028, & habebitur distantia pedum 19701678 a qua grave cadendo, eodem tempore minuti unius secundi describet pedes 15,12028, id est, pedes 15, dig. 1, lin. 5,32. Et hac vi gravia cadunt in superficie Terræ, in Latitudine urbis *Lutetiæ Parisiorum*, ut supra ostensum est. Est autem distantia pedum 19701678 paulo minor quam semidiameter globi huic Terræ æqualis, & paulo major quam Terræ hujus semidiameter mediocris, ut oportet. Sed differentiæ sunt insensibiles. Et propterea vis qua Luna retinetur in Orbe suo, ad distantiam maximarum Terræ semidiametrorum $60\frac{1}{4}$, ea est quam vis Gravitatis in superficie Terræ requirit.

Corol. 8. Distantia mediocris centrorum Terræ & Lunæ, est mediocrium Terræ semidiametrorum $60\frac{1}{2}$ quamproxime. Nam semidiameter mediocris, quæ erat pedum 19688725, est ad semidiametrum maximam pedum 19767630, ut $60\frac{1}{4}$ ad $60\frac{1}{2}$ quamproxime.

In his computationibus Attractionem magneticam Terræ non consideravimus, cujus utique quantitas perparva est & ignoratur. Siquando vero hæc Attractio investigari poterit, & mensuræ graduum in Meridiano, ac longitudines Pendulorum isochronorum in diversis parallelis, legesque motuum Maris, & parallaxis Lunæ cum diametris apparentibus Solis & Lunæ ex Phænomenis accuratius determinatæ fuerint: licebit calculum hunc omnem accuratius repetere.

PROPOSITIO XXXVIII. PROBLEMA XIX.

Invenire Figuram corporis Lunæ.

Si corpus Lunare fluidum esset ad instar Maris nostri, vis Terræ ad fluidum illud in partibus & citimis & ultimis elevandum, esset ad vim Lunæ, quæ Mare nostrum in partibus & sub Luna & Lunæ oppositis attollitur, ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem Terræ in Lunam & diameter Lunæ ad

diame-

De Mundi Systemate, diametrum Terræ conjunctim; id est, ut 39,371 ad 1 & 100 ad 365 conjunctim, seu 1079 ad 100. Unde cum Mare nostrum vi Lunæ attollatur ad pedes 8⅗, fluidum Lunare vi Terræ attolli deberet ad pedes 93½. Eaque de causa Figura Lunæ Sphærois esset, cujus maxima diameter producta transiret per centrum Terræ, & superaret diametros perpendiculares excessu pedum 187. Talem igitur Figuram Luna affectat, eamque sub initio induere debuit. *Q. E. I.*

Corol. Inde vero fit ut eadem semper Lunæ facies in Terram obvertatur. In alio enim situ corpus Lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes, ob parvitatem virium agitantium, essent longè tardissimæ: adeo ut facies illa, quæ Terram semper respicere deberet, possit alterum orbis Lunaris umbilicum, ob rationem in Prop. XVII. allatam respicere, neque statim abinde retrahi & in Terram converti.

LEMMA I.

Si APEp *Terram designet uniformiter densam, centroque* C *& Polis* P, p *& Æquatore* AE *delineatam; & si centro* C *radio* CP *describi intelligatur Sphæra* Pape; *sit autem* QR *planum, cui recta a centro Solis ad centrum Terræ ducta normaliter insistit; & Terræ totius exterioris* PapAPepE, *quæ Sphæra modo descripta altior est, particulæ singulæ conentur recedere hinc inde a plano* QR, *sitque conatus particulæ cujusque ut ejusdem distantia a plano: Dico primo, quod tota particularum omnium, in Æquatoris circulo* AE, *extra globum uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, vis & efficacia ad Terram circum centrum ejus rotandam, sit ad totam particularum totidem in Æquatoris puncto* A, *quod a plano* QR *maxime distat, consistentium vim & efficaciam, ad Terram consimili motu circulari circum centrum ejus movendam, ut unum ad duo. Et motus iste circularis circum axem, in communi sectione Æquatoris & plani* QR *jacentem, peragetur.*

Nam centro *C* diametro *BD* describatur semicirculus *BAFDC*. Dividi intelligatur semicircumferentia *BAD* in partes

partes innumeras æquales, & a partibus singulis F ad diametrum BD demittantur sinus FY. Et summa quadratorum ex sinibus omnibus FY æqualis erit summæ quadratorum ex sinibus omnibus CY, & summa utraque æqualis erit summæ quadratorum ex totidem semidiametris CF; adeoque summa quadratorum ex omnibus FY, erit duplo minor quam summa quadratorum ex totidem semidiametris CF.

Jam dividatur perimeter circuli AE in particulas totidem æquales, & ab earum unaquaque F ad planum QR demittatur perpendiculum FG, ut & a puncto A perpendiculum AH. Et vis qua particula F recedit a plano QR, erit ut perpendiculum illud FG per hypothesin, & hæc vis ducta in distantiam CG, erit efficacia particulæ F ad Terram circum centrum ejus convertendam. Adeoque efficacia particulæ in loco F, erit ad efficaciam particulæ in loco A, ut $FG \times GC$ ad $AH \times HC$, hoc est, ut FCq ad ACq; & propterea efficacia tota particularum omnium in locis suis F, erit ad efficaciam particularum totidem in loco A, ut summa omnium FCq ad summam totidem ACq, hoc est, (per jam demonstrata) ut unum ad duo. Q. E. D.

Et quoniam particulæ agunt recedendo perpendiculariter a plano QR, idque æqualiter ab utraque parte hujus plani: eædem convertent circumferentiam circuli Æquatoris, eique inhærentem Terram, circum axem tam in plano illo QR quam in plano Æquatoris jacentem.

LEMMA II.

Iisdem positis: Dico secundo quod vis & efficacia tota particularum omnium extra globum undique sitarum, ad Terram circum axem eundem rotandam, sit ad vim totam particularum totidem, in Æquatoris circulo AE, *uniformiter per totum circuitum in morem annuli dispositarum, ad Terram consimili motu circulari movendam, ut duo ad quinque.*

Sit enim IK circulus quilibet minor Æquatori AE parallelus, sintque L, l particulæ duæ quævis æquales in hoc circulo extra globum $Pape$ sitæ. Et si in planum QR, quod radio in Solem ducto perpendiculare est, demittantur perpendicula LM, lm: vires totæ quibus particulæ illæ fugiunt planum QR, proportionales erunt perpendiculis illis LM, lm. Sit autem recta Ll plano $Pape$ parallela & bisecetur eadem in X, & per punctum X agatur Nn, quæ parallela sit plano QR & perpendiculis LM, lm occurrat in N ac n, & in planum QR demittatur perpendiculum XY. Et particularum L & l vires contrariæ, ad Terram in contrarias partes rotandam, sunt ut $LM \times MC$ & $lm \times mC$, hoc est, ut $LN \times MC + NM \times MC$ & $ln \times mC - nm \times mC$, seu $LN \times MC + NM \times MC$ & $LN \times mC$ $-NM$

$-NM \times mC$: & harum differentia $LN \times Mm - NM \times \overline{MC + mC}$, est vis particularum ambarum simul sumptarum ad Terram rotandam. Hujus differentiæ pars affirmativa $LN \times Mm$ seu $2\, LN \times NX$, est ad particularum duarum ejusdem magnitudinis in A consistentium vim $2\, AH \times HC$, ut LXq ad ACq. Et pars negativa $NM \times \overline{MC + mC}$ seu $2\, XY \times CY$, ad particularum earundem in A consistentium vim $2\, AH \times HC$, ut CXq ad ACq. Ac proinde partium differentia, id est, particularum duarum L & l simul sumptarum vis ad Terram rotandam, est ad vim particularum duarum iisdem æqualium & in loco A consistentium, ad Terram itidem rotandam, ut $LXq - CXq$ ad ACq. Sed si circuli IK circumferentia IK dividatur in particulas innumeras æquales L, erunt omnes LXq ad totidem IXq ut 1 ad 2, (per Lem. I.) atque ad totidem ACq, ut IXq ad $2\, ACq$; & totidem CXq ad totidem ACq ut $2\, CXq$ ad $2\, ACq$. Quare vires conjunctæ particularum omnium in circuitu circuli IK, sunt ad vires conjunctas particularum totidem in loco A, ut $IXq - 2\, CXq$ ad $2\, ACq$: & propterea (per Lem. I.) ad vires conjunctas particularum totidem in circuitu circuli AE, ut $IXq - 2\, CXq$ ad ACq.

Jam vero si Sphæræ diameter Pp dividatur in partes innumeras æquales, quibus insistant circuli totidem IK; materia in perimetro circuli cujusque IK erit ut IXq: ideoque vis materiæ illius ad Terram rotandam, erit ut IXq in $IXq - 2\, CXq$. Et vis materiæ ejusdem, si in circuli AE perimetro consisteret, esset ut IXq in ACq. Et propterea vis particularum omnium materiæ totius, extra globum in perimetris circulorum omnium consistentis, est ad vim particularum totidem in perimetro circuli maximi AE consistentis, ut omnia IXq in $IXq - 2\, CXq$ ad totidem IXq in ACq, hoc est, ut omnia $ACq - CXq$ in $ACq - 3\, CXq$ ad totidem $ACq - CXq$ in ACq, id est, ut omnia $ACqq - 4\, ACq \times CXq + 3\, CXqq$ ad totidem $ACqq - ACq \times CXq$, hoc est, ut tota quantitas fluens cujus fluxio est $ACqq - 4\, ACq \times CXq + 3\, CXqq$, ad totam quantitatem fluentem cujus fluxio est $ACqq - ACq \times CXq$; ac proinde per Methodum Fluxionum, ut $ACqq \times CX - \frac{4}{3}\, ACq \times CX\, cub. + \frac{3}{5}\, CXqc$ ad $ACqq \times CX - \frac{1}{3}\, ACq \times CX\, cub.$, id est, si pro CX scribatur tota Cp vel AC, ut $\frac{4}{15}\, ACqc$ ad $\frac{2}{3}\, ACqc$, hoc est, ut duo ad quinque. *Q. E. D.*

LEMMA III.

Iisdem positis: Dico tertio quod motus Terræ totius circum axem jam ante descriptum, ex motibus particularum omnium compositus, erit ad motum annuli prædicti circum axem eundem in ratione quæ componitur ex ratione materiæ in Terra ad materiam in annulo, & ratione trium quadratorum ex arcu quadrantali circuli cujuscunque ad duo quadrata ex diametro; id est, in ratione materiæ ad materiam & numeri 925275 ad numerum 1000000.

Est enim motus Cylindri circum axem suum immotum revolventis, ad motum Sphæræ inscriptæ & simul revolventis, ut quælibet quatuor æqualia quadrata ad tres ex circulis sibi inscriptis: & motus Cylindri ad motum annuli tenuissimi, Sphæram & Cylindrum ad communem eorum contactum ambientis, ut duplum materiæ in Cylindro ad triplum materiæ in annulo; & annuli motus iste circum axem Cylindri uniformiter continuatus, ad ejusdem motum uniformem circum diametrum propriam, eodem tempore periodico factum, ut circumferentia circuli ad duplum diametri.

HYPOTHESIS II.

Si annulus prædictus Terra omni reliqua sublata, solus in Orbe Terræ, motu annuo circa Solem ferretur, & interea circa axem suum, ad planum Eclipticæ in angulo graduum $23\frac{1}{2}$ *inclinatum, motu diurno revolveretur: idem foret motus Punctorum Æquinoctialium sive annulus iste fluidus esset, sive is ex materia rigida & firma constaret.*

PRO-

PROPOSITIO XXXIX. PROBLEMA XX.

Invenire Præcessionem Æquinoctiorum.

Motus mediocris horarius Nodorum Lunæ in Orbe circulari, ubi Nodi sunt in Quadraturis, erat 16′. 35‴. 16^{iv}. 36^{v}. & hujus dimidium 8″. 17‴. 38^{iv}. 18^{v}. (ob rationes supra explicatas) est motus medius horarius Nodorum in tali Orbe; fitque anno toto sidereo 20$^{gr.}$ 11′. 46″. Quoniam igitur Nodi Lunæ in tali Orbe conficerent annuatim 20$^{gr.}$ 11′. 46″. in antecedentia; & si plures essent Lunæ motus Nodorum cujusque, per Corollar. 16. Prop. LXVI. Lib. I. forent ut tempora periodica; si Luna spatio diei siderei juxta superficiem Terræ revolveretur, motus annuus Nodorum foret ad 20$^{gr.}$ 11′ 46″. ut dies sidereus horarum 23. 56′. ad tempus periodicum Lunæ dierum 27. 7 hor. 43′; id est, ut 1436 ad 39343. Et par est ratio Nodorum annuli Lunarum Terram ambientis; sive Lunæ illæ se mutuo non contingant, sive liquescant & in annulum continuum formentur, sive denique annulus ille rigescat & inflexibilis reddatur.

Fingamus igitur quod annulus iste, quoad quantitatem materiæ, æqualis sit Terræ omni *PapAPepE* quæ globo *Pape* superior est; *(Vid. Fig. pag.* 434.) & quoniam globus iste est ad Terram illam superiorem ut *aCqu.* ad *ACqu.* — *aCqu.* id est (cum Terræ diameter minor *PC* vel *aC* sit ad diametrum majorem *AC* ut 229 ad 230,) ut 52441 ad 459; si annulus iste Terram secundum Æquatorem cingeret & uterque simul circa diametrum annuli revolveretur; motus annuli esset ad motum globi interioris (per hujus Lem. III.) ut 459 ad 52441 & 1000000 ad 925275 conjunctim, hoc est, ut 4590 ad 485223; ideoque motus annuli esset ad summam motuum annuli ac globi, ut 4590 ad 489813. Unde si annulus globo adhæreat, & motum suum quo ipsius Nodi seu puncta Æquinoctialia regrediuntur, cum globo communicet: motus qui restabit in annulo erit ad ipsius motum priorem, ut 4590 ad 489813; & propterea motus punctorum Æquinoctialium diminuetur in eadem ratione. Erit igitur motus annuus punctorum Æquinoctialium corporis ex annulo & globo compositi, ad motum

De Mundi Systemate, $20^{gr.}\ 11'.\ 46''$, ut 1436 ad 39343 & 4590 ad 489813 conjunctim, id est, ut 100 ad 292369. Vires autem quibus Nodi Lunarum (ut supra explicui) atque adeo quibus puncta Æquinoctialia annuli regrediuntur (id est vires 3 *IT*, *in Fig. pag.* 403 & 404.) sunt in singulis particulis ut distantiæ particularum à plano *QR*, & his viribus particulæ illæ planum fugiunt; & propterea (per Lem. II.) si materia annuli per totam globi superficiem, in morem figuræ *PapAPepE*, ad superiorem illam Terræ partem constituendam spargeretur, vis & efficacia tota particularum omnium ad Terram circa quamvis Æquatoris diametrum rotandam, atque adeo ad movenda puncta Æquinoctialia, evaderet minor quam prius in ratione 2 ad 5. Ideoque annuus Æquinoctiorum regressus jam esset ad $20^{gr.}\ 11'.\ 46''$, ut 10 ad 73092: ac proinde fieret $9''.\ 56'''.\ 50^{iv}$.

Cæterum hic motus, ob inclinationem plani Æquatoris ad planum Eclipticæ, minuendus est, idque in ratione sinus 91706 (qui sinus est complementi graduum $23\frac{1}{2}$) ad Radium 100000. Qua ratione motus iste jam fiet $9''.\ 7'''.\ 20^{iv}$. Hæc est annua Præcessio Æquinoctiorum a vi Solis oriunda.

Vis autem Lunæ ad Mare movendum erat ad vim Solis, ut 4, 4815 ad 1 circiter. Et vis Lunæ ad Æquinoctia movenda, est ad vim Solis in eadem proportione. Indeque prodit annua Æquinoctiorum Præcessio a vi Lunæ oriunda $40''.\ 52'''.\ 52^{iv}$; ac tota Præcessio annua a vi utraque oriunda $50''.\ 00'''.\ 12^{iv}$. Et hic motus cum Phænomenis congruit. Nam Præcessio Æquinoctiorum ex Observationibus Astronomicis est minutorum secundorum plus minus quinquaginta.

Si altitudo Terræ ad Æquatorem superet altitudinem ejus ad Polos, milliaribus pluribus quam $17\frac{1}{6}$, materia ejus rarior erit ad circumferentiam quam ad centrum: & Præcessio Æquinoctiorum ob altitudinem illam augeri, ob raritatem diminui debet.

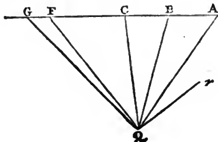
Descripsimus jam Systema Solis, Terræ, Lunæ, & Planetarum: superest ut de Cometis nonnulla adjiciantur.

LEMMA

LEMMA IV.

Cometas esse Luna superiores & in regione Planetarum versari.

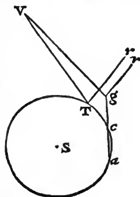
Ut defectus Parallaxeos diurnæ extulit Cometas supra regiones sublunares, sic ex Parallaxi annua convincitur eorum descensus in regiones Planetarum. Nam Cometæ qui progrediuntur secundum ordinem signorum sunt omnes, sub exitu apparitionis, aut solito tardiores aut retrogradi, si Terra est inter ipsos & Solem; at justo celeriores si Terra vergit ad oppositionem. Et e contra, qui pergunt contra ordinem signorum sunt justo celeriores in fine apparitionis, si Terra versatur inter ipsos & Solem; & justo tardiores vel retrogradi si Terra sita est ad contrarias partes. Contingit hoc maxime ex motu Terræ in vario ipsius situ, perinde ut fit in Planetis, qui, pro motu Terræ vel conspirante vel contrario, nunc retrogradi sunt, nunc tardius progredi videntur, nunc vero celerius. Si Terra pergit ad eandem partem cum Cometa, & motu angulari circa Solem tanto celerius fertur, ut recta per Terram & Cometam perpetuo ducta convergat ad partes ultra Cometam, Cometa e Terra spectatus, ob motum suum tardiorem, apparet esse retrogradus; sin Terra tardius fertur, motus Cometæ,



(detracto motu Terræ) fit saltem tardior. At si Terra pergit in contrarias partes, Cometa exinde velocior apparet. Ex acceleratione autem vel retardatione vel motu retrogrado distantia Cometæ in hunc modum colligitur. Sunto ♈Q*A*, ♈Q*B*, ♈Q*C* observatæ tres longitudines Cometæ, sub initio motus, sitque ♈Q*F* longitudo ultimo observata, ubi Cometa videri desinit.

Agatur

 Agatur recta *ABC*, cujus partes *AB*, *BC* rectis *QA* & *QB*, *QB* & *QC* interjectæ, sint ad invicem ut tempora inter observationes tres primas. Producatur *AC* ad *G*, ut sit *AG* ad *AB* ut tempus inter observationem primam & ultimam, ad tempus inter observationem primam & secundam, & jungatur *QG*. Et si Cometa moveretur uniformiter in linea recta, atque Terra vel quiesceret, vel etiam in linea recta, uniformi cum motu, progrederetur; foret angulus ♈*QG* longitudo Cometæ tempore Observationis ultimæ. Angulus igitur *FQG*, qui longitudinum differentia est, oritur ab inæqualitate motuum Cometæ ac Terræ. Hic autem angulus, si Terra & Cometa in contrarias partes moventur, additur angulo ♈*QG*, & sic motum apparentem Cometæ velociorem reddit: Sin Cometa pergit in easdem partes cum Terra, eidem subducitur, motumque Cometæ vel tardiorem reddit, vel forte retrogradum, uti modo exposui. Oritur igitur hic angulus præcipue ex motu Terræ, & idcirco pro parallaxi Cometæ merito habendus est, neglecto videlicet ejus incremento vel decremento nonnullo, quod a Cometæ motu inæquabili in Orbe proprio oriri possit. Distantia vero Cometæ ex hac parallaxi sic colligitur. Designet *S* Solem, *acT* Orbem magnum, *a* locum Terræ in observatione prima, *c* locum Terræ in observatione tertia, *T* locum Terræ in observatione ultima, & *T*♈ lineam rectam versus principium Arietis ductam. Sumatur angulus ♈*TV* æqualis angulo ♈*QF*, hoc est, æqualis longitudini Cometæ ubi Terra versatur in *T*. Jungatur *ac*, & producatur ea ad *g*, ut sit *ag* ad *ac* ut *AG* ad *AC*, & erit *g* locus quem Terra tempore observationis ultimæ, motu in recta *ac* uniformiter continuato, attingeret. Ideoque si ducatur *g*♈ ipsi *T*♈ parallela, & capiatur angulus ♈*gV* angulo ♈*QG* æqualis, erit hic angulus ♈*gV* æqualis longitudini Cometæ e loco *g* spectati; & angulus *TVg* parallaxis erit, quæ oritur a translatione Terræ de loco *g* in locum *T*: ac proinde *V* locus erit Cometæ in plano Eclipticæ. Hic autem locus *V* Orbe Jovis inferior esse solet.



Idem

Idem colligitur ex curvatura viæ Cometarum. Pergunt hæc corpora propemodum in circulis maximis quamdiu moventur celerius; at in fine cursus, ubi motus apparentis pars illa quæ à parallaxi oritur, majorem habet proportionem ad motum totum apparentem, deflectere solent ab his circulis, & quoties Terra movetur in unam partem, abire in partem contrariam. Oritur hæc deflexio maxime ex Parallaxi, propterea quod respondet motui Terræ; & insignis ejus quantitas, meo computo, collocavit disparentes Cometas satis longe infra Jovem. Unde consequens est quod in Perigæis & Periheliis, ubi propius adsunt, descendunt sæpius infra orbes Martis & inferiorum Planetarum.

Confirmatur etiam propinquitas Cometarum ex luce capitum. Nam corporis cœlestis a Sole illustrati & in regiones longinquas abeuntis, diminuitur splendor in quadruplicata ratione distantiæ: in duplicata ratione videlicet ob auctam corporis distantiam a Sole, & in alia duplicata ratione ob diminutam diametrum apparentem. Unde si detur & lucis quantitas & apparens diameter Cometæ, dabitur distantia, dicendo quod distantia sit ad distantiam Planetæ, in ratione diametri ad diametrum directe & ratione subduplicata lucis ad lucem inverse. Sic minima capillitii Cometæ anni 1682 diameter, per Tubum opticum sexdecim pedum a *Flamstedio* observata & Micrometro mensurata, æquabat 2′. 0″. Nucleus autem seu stella in medio capitis vix decimam partem latitudinis hujus occupabat, adeoque lata erat tantum 11″ vel 12″. Luce vero & claritate capitis superabat caput Cometæ anni 1680, stellasque primæ vel secundæ magnitudinis æmulabatur. Ponamus Saturnum cum annulo suo quasi quadruplo lucidiorem fuisse: & quoniam lux annuli propemodum æquabat lucem globi intermedii, & diameter apparens globi sit quasi 21″, adeoque lux globi & annuli conjunctim æquaret lucem globi, cujus diameter esset 30″: erit distantia Cometæ ad distantiam Saturni ut 1 ad $\sqrt{4}$ inverse, & 12″ ad 30″ directe, id est, ut 24 ad 30 seu 4 ad 5. Rursus Cometa anni 1665 mense *Aprili*, ut author est *Hevelius*, claritate sua pene Fixas omnes superabat, quinetiam ipsum Saturnum, ratione coloris videlicet longe vividioris. Quippe lucidior erat hic Cometa altero illo, qui in fine anni præcedentis apparuerat & cum stellis primæ magnitudinis conferebatur. Latitudo capillitii erat quasi 6′, at nucleus cum Planetis ope Tubi optici collatus, plane minor erat Jove, & nunc minor corpore interme-

dio Saturni, nunc ipsi æqualis judicabatur. Porro cum diameter capillitii Cometarum raro superet 8′ vel 12′, diameter vero nuclei seu stellæ centralis sit quasi decima vel forte decima quinta pars diametri capillitii, patet Stellas hasce ut plurimum ejusdem esse apparentis magnitudinis cum Planetis. Unde cum lux earum cum luce Saturni non raro conferri possit, eamque aliquando superet; manifestum est quod Cometæ omnes in Periheliis vel infra Saturnum collocandi sint, vel non longe supra. Errant igitur toto cœlo qui Cometas in regionem Fixarum prope ablegant: qua certe ratione non magis illustrari deberent a Sole nostro, quam Planetæ, qui hic sunt, illustrantur a Stellis fixis.

Hæc disputavimus non considerando obscurationem Cometarum per fumum illum maxime copiosum & crassum, quo caput circundatur, quasi per nubem obtuse semper lucens. Nam quanto obscurius redditur corpus per hunc fumum, tanto propius ad Solem accedat necesse est, ut copia lucis a se reflexa Planetas æmuletur. Inde verisimile fit Cometas longe infra sphæram Saturni descendere, uti ex Parallaxi probavimus. Idem vero quam maxime confirmatur ex Caudis. Hæ vel ex reflexione fumi sparsi per Æthera, vel ex luce capitis oriuntur. Priore casu minuenda est distantia Cometarum, ne fumus a capite semper ortus per spatia nimis ampla incredibili cum velocitate & expansione propagetur. In posteriore referenda est lux omnis tam caudæ quam capillitii ad nucleum capitis. Igitur si concipiamus lucem hanc omnem congregari & intra discum nuclei coarctari, nucleus ille jam certe, quoties caudam maximam & fulgentissimam emittit, Jovem ipsum splendore suo multum superabit. Minore igitur cum diametro apparente plus lucis emittens, multo magis illustrabitur a Sole, adeoque erit Soli multo propior. Quinetiam capita sub Sole delitescentia, & caudas cum maximas tum fulgentissimas instar trabium ignitarum nonnunquam emittentia, eodem argumento infra orbem Veneris collocari debent. Nam lux illa omnis si in stellam congregari supponatur, ipsam Venerem ne dicam Veneres plures conjunctas quandoque superaret.

Idem denique colligitur ex luce capitum crescente in recessu Cometarum a Terra Solem versus, ac decrescente in eorum recessu a Sole versus Terram. Sic enim Cometa posterior Anni 1665 (observante *Hevelio*,) ex quo conspici cœpit, remittebat semper de

de motu suo apparente, adeoque præterierat Perigæum; Splendor vero capitis nihilominus indies crescebat, usque dum Cometa radiis Solaribus obtectus desiit apparere. Cometa Anni 1683, observante eodem *Hevelio*, in fine Mensis *Julii* ubi primum conspectus est, tardissime movebatur, minuta prima 40 vel 45 circiter singulis diebus in Orbe suo conficiens. Ex eo tempore motus ejus diurnus perpetuo augebatur usque ad *Sept.* 4. quando evasit graduum quasi quinque. Igitur toto hoc tempore Cometa ad Terram appropinquabat. Id quod etiam ex diametro capitis Micrometro mensurata colligitur: quippe quam *Hevelius* reperit *Aug.* 6. esse tantum 6'. 5". inclusa coma, at *Sept.* 2. esse 9'. 7". Caput igitur initio longe minus apparuit quam in fine motus, at initio tamen in vicinia Solis longe lucidius extitit quam circa finem, ut refert idem *Hevelius*. Proinde toto hoc tempore, ob recessum ipsius a Sole, quoad lumen decrevit, non obstante accessu ad Terram. Cometa Anni 1618 circa medium Mensis *Decembris*, & iste Anni 1680 circa finem ejusdem Mensis, celerrime movebantur, adeoque tunc erant in Perigæis. Verum splendor maximus capitum contigit ante duas fere septimanas, ubi modo exierant de radiis Solaribus; & splendor maximus caudarum paulo ante, in majore vicinitate Solis. Caput Cometæ prioris, juxta observationes *Cysati*, *Decemb.* 1. majus videbatur stellis primæ magnitudinis, & *Decemb.* 16. (jam in Perigæo existens) magnitudine parum, splendore seu claritate luminis plurimum defecerat. *Jan.* 7. *Keplerus* de capite incertus finem fecit observandi. Die 12 mensis *Decemb.* conspectum & a *Flamstedio* observatum est caput Cometæ posterioris, in distantia novem graduum a Sole; id quod stellæ tertiæ magnitudinis vix concessum fuisset. *Decemb.* 15 & 17 apparuit idem ut stella tertiæ magnitudinis, diminutum utique, splendore Nubium juxta Solem occidentem. *Decemb.* 26. velocissime motus, inque Perigæo propemodum existens, cedebat ori Pegasi, Stellæ tertiæ magnitudinis. *Jan.* 3. apparebat ut Stella quartæ, *Jan.* 9. ut Stella quintæ, *Jan.* 13. ob splendorem Lunæ crescentis disparuit. *Jan.* 25. vix æquabat Stellas magnitudinis septimæ. Si sumantur æqualia a Perigæo hinc inde tempora, capita quæ temporibus illis in longinquis regionibus posita, ob æquales a Terra distantias, æqualiter lucere debuissent, in plaga Solis maxime splenduere, ex altera Perigæi parte evanuere. Igitur ex magna lucis in utroque situ differentia, concluditur magna Solis & Cometæ vicinitas in situ priore. Nam lux Cometarum

regularis esse solet, & maxima apparere ubi capita velocissime moventur, atque adeo sunt in Perigæis; nisi quatenus ea major est in vicinia Solis.

Corol. 1. Splendent igitur Cometæ luce Solis a se reflexa.

Corol. 2. Ex dictis etiam intelligitur cur Cometæ tantopere frequentant regionem Solis. Si cernerentur in regionibus longe ultra Saturnum, deberent sæpius apparere in partibus Soli oppositis. Forent enim Terræ viciniores qui in his partibus versarentur, & Sol interpositus obscuraret cæteros. Verum percurrendo historias Cometarum, reperi quod quadruplo vel quintuplo plures detecti sunt in Hemisphærio Solem versus, quam in Hemisphærio opposito, præter alios procul dubio non paucos quos lux Solaris obtexit. Nimirum in descensu ad regiones nostras neque caudas emittunt, neque adeo illustrantur a Sole, ut nudis oculis se prius detegendos exhibeant, quam sint ipso Jove propiores. Spatii autem tantillo intervallo circa Solem descripti pars longe major sita est a latere Terræ quod Solem respicit; inque parte illa majore Cometæ, Soli ut plurimum viciniores, magis illuminari solent.

Corol. 3. Hinc etiam manifestum est, quod Cœli resistentia destituuntur. Nam Cometæ vias obliquas & nonnunquam cursui Planetarum contrarias secuti, moventur omnifariam liberrime, & motus suos etiam contra cursum Planetarum, diutissime conservant. Fallor ni genus Planetarum sint, & motu perpetuo in orbem redeant. Nam quod Scriptores aliqui Meteora esse volunt, argumentum a capitum perpetuis mutationibus ducentes, fundamento carere videtur. Capita Cometarum Atmosphæris ingentibus cinguntur; & Atmosphæræ inferne densiores esse debent. Unde nubes sunt, non ipsa Cometarum corpora, in quibus mutationes illæ visuntur. Sic Terra si e Planetis spectaretur, luce nubium suarum proculdubio splenderet, & corpus firmum sub nubibus prope delitesceret. Sic cingula Jovis in nubibus Planetæ illius formata sunt, quæ situm mutant inter se, & firmum Jovis corpus per nubes illas difficilius cernitur. Et multo magis corpora Cometarum sub Atmosphæris & profundioribus & crassioribus abscondi debent.

PRO-

PROPOSITIO XL. THEOREMA XX.

Cometas in Sectionibus Conicis umbilicos in centro Solis habentibus moveri, & radiis ad Solem ductis areas temporibus proportionales describere.

Patet per Corol. 1. Propos. XIII. Libri primi, collatum cum Prop. VIII, XII & XIII. Libri tertii.

Corol. 1. Hinc si Cometæ in orbem redeunt: Orbes erunt Ellipses, & tempora periodica erunt ad tempora periodica Planetarum in axium principalium ratione sesquiplicata. Ideoque Cometæ maxima ex parte supra Planetas versantes, & eo nomine Orbes axibus majoribus describentes, tardius revolventur. Ut si axis Orbis Cometæ sit quadruplo major axe Orbis Saturni, tempus revolutionis Cometæ erit ad tempus revolutionis Saturni, id est, ad annos 30, ut $4\sqrt{4}$ (seu 8) ad 1, ideoque erit annorum 240.

Corol. 2. Orbes autem erunt Parabolis adeo finitimi, ut eorum vice Parabolæ, absque erroribus sensibilibus, adhiberi possint.

Corol. 3. Et propterea, per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I. velocitas Cometæ omnis, erit semper ad velocitatem Planetæ cujusvis circa Solem in circulo revolventis, in subduplicata ratione duplæ distantiæ Planetæ a centro Solis, ad distantiam Cometæ a centro Solis quamproxime. Ponamus radium Orbis magni, seu Ellipseos in qua Terra revolvitur semidiametrum maximam, esse partium 100000000: & Terra motu suo diurno mediocri describet partes 1720212, & motu horario partes $71675\frac{1}{2}$. Ideoque Cometa in eadem Telluris a Sole distantia mediocri, ea cum velocitate quæ sit ad velocitatem Telluris ut $\sqrt{2}$ ad 1, describet motu suo diurno partes 2432747, & motu horario partes $101364\frac{1}{2}$. In majoribus autem vel minoribus distantiis, motus tum diurnus tum horarius erit ad hunc motum diurnum & horarium in subduplicata ratione distantiarum reciproce, ideoque datur.

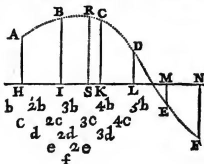
Corol. 4. Unde si Latus rectum Parabolæ quadruplo majus sit radio Orbis magni, & quadratum radii illius ponatur esse partium 100000000: area quam Cometa radio ad Solem ducto singulis diebus describit, erit partium $1216373\frac{1}{2}$, & singulis horis area illa erit partium $50682\frac{1}{4}$. Sin latus rectum majus sit vel minus in ratione quavis, erit area diurna & horaria major vel minor in eadem ratione subduplicata.

LEMMA V.

Invenire lineam curvam generis Parabolici, quæ per data quotcunque puncta transibit.

Sunto puncta illa *A, B, C, D, E, F,* &c. & ab iisdem ad rectam quamvis positione datam *HN* demitte perpendicula quotcunque *AH, BI, CK, DL, EM, FN.*

Cas. 1. Si punctorum *H, I, K, L, M, N* æqualia sunt intervalla *HI, IK, KL,* &c. collige perpendiculorum *AH, BI, CK,* &c. differentias primas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$, &c. secundas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias $d, 2d, 3d$, &c. id est, ita ut sit $AH - BI = b$, $BI - CK = 2b$, $CK - DL = 3b$, $DL + EM = 4b$, $-EM + FN = 5b$, &c. dein $b - 2b = c$, &c. & sic pergatur ad differentiam ultimam quæ hic est *f*. Deinde erecta quacunque perpendiculari *RS*, quæ fuerit ordinatim applicata ad curvam quæsitam: ut inveniatur hujus longitudo, pone intervalla *HI, IK, KL, LM,* &c. unitates esse, & dic $AH = a$, $-HS = p$, $\frac{1}{2}p$ in $-IS = q$, $\frac{1}{3}q$ in $+SK = r$, $\frac{1}{4}r$ in $+SL = s$, $\frac{1}{5}s$ in $+SM = t$; pergendo videlicet ad usque penultimum perpendiculum *ME*, & præponendo signa negativa terminis *HS, IS,* &c. qui jacent ad partes puncti *S* versus *A*, & signa affirmativa terminis *SK, SL,* &c. qui jacent ad alteras partes puncti *S*. Et signis probe observatis, erit $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$, &c.



Cas. 2. Quod si punctorum *H, I, K, L* &c. inæqualia sint intervalla *HI, IK,* &c. collige perpendiculorum *AH, BI, CK,* &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas $b, 2b, 3b, 4b, 5b$; secundas per intervalla bina divisas $c, 2c, 3c, 4c$, &c. tertias per intervalla terna divisas $d, 2d, 3d$, &c. quartas per inter-

intervalla quaterna divisas e, $2e$, &c. & sic deinceps; id est, ita ut sit $b=\frac{AH-BI}{HI}$, $2b=\frac{BI-CK}{IK}$, $3b=\frac{CK-DL}{KL}$, &c. dein $c=\frac{b-2b}{HK}$, $2c=\frac{2b-3b}{IL}$, $3c=\frac{3b-4b}{KM}$, &c. Postea $d=\frac{c-2c}{HL}$, $2d=\frac{2c-3c}{IM}$, &c. Inventis differentiis, dic $AH=a$, $-HS=p$, p in $-IS=q$, q in $+SK=r$, r in $+SL=s$, s in $+SM=t$; pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum ME, & erit ordinatim applicata $RS=a+bp+cq+dr+es+ft$, &c.

Corol. Hinc areæ curvarum omnium inveniri possunt quamproxime. Nam si curvæ cujusvis quadrandæ inveniantur puncta aliquot, & Parabola per eadem duci intelligatur: erit area Parabolæ hujus eadem quam proxime cum area curvæ illius quadrandæ. Potest autem Parabola, per Methodos notissimas, semper quadrari Geometrice.

LEMMA VI.

Ex observatis aliquot locis Cometæ invenire locum ejus ad tempus quodvis intermedium datum.

Designent HI, IK, KL, LM tempora inter observationes, (*in Fig. præced.*) HA, IB, KC, LD, ME observatas quinque longitudines Cometæ, HS tempus datum inter observationem primam & longitudinem quæsitam. Et si per puncta A, B, C, D, E duci intelligatur curva regularis $ABCDE$; & per Lemma superius inveniatur ejus ordinatim applicata RS, erit RS longitudo quæsita.

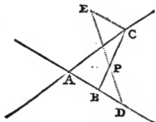
Eadem methodo ex observatis quinque latitudinibus invenitur latitudo ad tempus datum.

Si longitudinum observatarum parvæ sint differentiæ, puta graduum tantum 4 vel 5; suffecerint observationes tres vel quatuor ad inveniendam longitudinem & latitudinem novam. Sin majores sint differentiæ, puta graduum 10 vel 20, debebunt observationes quinque adhiberi.

De Mundi Systemate,

LEMMA VII.

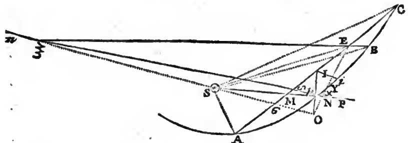
Per datum punctum P *ducere rectam lineam* BC, *cujus partes* PB, BC, *rectis duabus positione datis* AB, AC *abscissæ, datam habeant rationem ad invicem.*



A puncto illo *P* ad rectarum alterutram *AB* ducatur recta quævis *PD*, & producatur eadem versus rectam alteram *AC* usque ad *E*, ut sit *PE* ad *PD* in data illa ratione. Ipsi *AD* parallela sit *EC*; & si agatur *CPB*, erit *PC* ad *PB* ut *PE* ad *PD*. *Q. E. F*

LEMMA VIII.

Sit ABC *Parabola umbilicum habens* S. *Chorda* AC *bisecta in* I *abscindatur segmentum* ABCI, *cujus diameter sit* Iμ *&* *vertex* μ. *In* Iμ *producta capiatur* μO *æqualis dimidio ipsius*



Iμ. *Jungatur* OS, *& producatur ea ad* ξ, *ut sit* Sξ *æqualis* 2SO. *Et si Cometa* B *moveatur in arcu* CBA, *& agatur* ξB *secans* AC *in* E: *dico quod punctum* E *abscindet de chorda* AC *segmentum* AE *tempori proportionale quamproxime.*

Junga-

Jungatur enim EO secans arcum Parabolicum ABC in T, & agatur μX quæ tangat eundem arcum in vertice μ & actæ EO occurrat in X; & erit area curvilinea $AEX\mu A$ ad aream curvilineam $ACT\mu A$ ut AE ad AC. Ideoque cum triangulum ASE sit ad triangulum ASC in eadem ratione, erit area tota $ASEX\mu A$ ad aream totam $ASCT\mu A$ ut AE ad AC. Cum autem ξO sit ad SO ut 3 ad 1, & EO ad XO in eadem ratione, erit SX ipsi EB parallela: & propterea si jungatur BX, erit triangulum SEB triangulo XEB æquale. Unde si ad aream $ASEX\mu A$ addatur triangulum EXB, & de summa auferatur triangulum SEB, manebit area $ASBX\mu A$ areæ $ASEX\mu A$ æqualis, atque adeo ad aream $ASCT\mu A$ ut AE ad AC. Sed areæ $ASBX\mu A$ æqualis est area $ASBT\mu A$, quamproxime, & hæc area $ASBT\mu A$ est ad aream $ASCT\mu A$, ut tempus descripti arcus AB, ad tempus descripti arcus totius AC. Ideoque AE est ad AC in ratione temporum quamproxime. *Q.E.D.*

Corol. Ubi punctum B incidit in Parabolæ verticem μ, est AE ad AC in ratione temporum accurate.

Scholium.

Si jungatur $\mu\xi$ secans AC in δ, & in ea capiatur ξn quæ sit ad μB ut 27 MI ad 16 $M\mu$: acta Bn secabit chordam AC in ratione temporum magis accurate quam prius. Jaceat autem punctum n ultra punctum ξ, si punctum B magis distat a vertice principali Parabolæ quam punctum μ; & citra, si minus distat ab eodem vertice.

LEMMA IX.

Rectæ Iμ *&* μM *& longitudo* $\frac{AIC}{4S\mu}$ *æquantur inter se.*

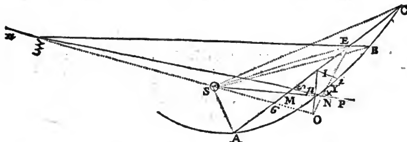
Nam $4S\mu$ est latus rectum Parabolæ pertinens ad verticem μ.

De Mundi Systemate.

LEMMA X.

Si producatur Sμ *ad* N & P, *ut* μN *sit pars tertia ipsius* μI, & SP *sit ad* SN *ut* SN *ad* Sμ. *Cometa, quo tempore describit arcum* AμC, *si progrederetur ea semper cum velocitate quam habet in altitudine ipsi* SP *æquali, describeret longitudinem æqualem chordæ* AC.

Nam si Cometa velocitate quam habet in μ, eodem tempore progrederetur uniformiter in recta quæ Parabolam tangit in μ; area quam radio ad punctum *S* ducto describeret, æqualis esset areæ Parabolicæ *ASC*μ. Ideoque contentum sub longitudine in tangente descripta & longitudine *S*μ, esset ad contentum sub longitudinibus *AC* & *SM*, ut area *ASC*μ ad triangulum *ASCM*, id est, ut *SN* ad *SM*. Quare *AC* est ad longitudinem in tangente descriptam, ut *S*μ ad *SN*. Cum autem velocitas



Cometæ in altitudine *SP* sit (per Corol. 6. Prop. XVI. Lib. I.) ad velocitatem in altitudine *S*μ, in subduplicata ratione *SP* ad *S*μ inverse, id est, in ratione *S*μ ad *SN*; longitudo hac velocitate eodem tempore descripta, erit ad longitudinem in tangente descriptam, ut *S*μ ad *SN*. Igitur *AC* & longitudo hac nova velocitate descripta, cum sint ad longitudinem in tangente descriptam tam in eadem ratione, æquantur inter se. *Q.E.D.*

Corol. Cometa igitur ea cum velocitate, quam habet in altitudine $S\mu + \frac{2}{3}I\mu$, eodem tempore describeret chordam *AC* quamproxime.

LEMMA

LEMMA XI.

Si Cometa motu omni privatus de altitudine SN *seu* Sμ + $\frac{1}{3}$ Iμ *demitteretur, ut caderet in Solem, & ea semper vi uniformiter continuata urgeretur in Solem, qua urgetur sub initio; idem semisse temporis quo in Orbe suo describat arcum* AC, *descensu suo describeret spatium longitudini* Iμ *æquale.*

Nam Cometa quo tempore describat arcum Parabolicum *AC*, eodem tempore ea cum velocitate quam habet in altitudine *SP* (per Lemma novissimum) describet chordam *AC*, adeoque (per Corol. 7. Prop. XVI. Lib. I.) eodem tempore in Circulo cujus semidiameter esset *SP*, vi gravitatis suæ revolvendo, describeret arcum cujus longitudo esset ad arcus Parabolici chordam *AC*, in subduplicata ratione unius ad duo. Et propterea eo cum pondere quod habet in Solem in altitudine *SP*, cadendo de altitudine illa in Solem, describeret semisse temporis illius (per Corol. 9. Prop. IV. Lib. I.) spatium æquale quadrato semissis chordæ illius applicato ad quadruplum altitudinis *SP*, id est, spatium $\frac{AIq}{4SP}$. Unde cum pondus Cometæ in Solem in altitudine *SN*, sit ad ipsius pondus in Solem in altitudine *SP*, ut *SP* ad Sμ: Cometa pondere quod habet in altitudine *SN* eodem tempore, in Solem cadendo, describet spatium $\frac{AIq}{4S\mu}$, id est, spatium longitudini Iμ vel *M*μ æquale. *Q.E.D.*

PROPOSITIO XLI. PROBLEMA XXI.

Cometæ in Parabola moti Trajectoriam ex datis tribus Observationibus determinare.

Problema hocce longe difficillimum multimode aggressus, composui Problemata quædam in Libro Primo quæ ad ejus solutionem spectant. Postea solutionem sequentem paulo simpliciorem excogitavi.

Seligantur tres observationes æqualibus temporum intervallis ab invicem quamproxime distantes. Sit autem temporis intervallum illud ubi Cometa tardius movetur paulo majus altero, ita videlicet

De Mundi Systemate. ut temporum differentia sit ad summam temporum, ut summa temporum ad dies plus minus sexcentos; vel ut punctum E incidat in punctum M quamproxime, & inde aberret versus I potius quam versus A. Si tales observationes non præsto sint, inveniendus est novus Cometæ locus per Lemma sextum.

Designent S Solem T, t, τ tria loca Terræ in Orbe magno, TA, tB, τC observatas tres longitudines Cometæ, V tempus inter observationem primam & secundam, W tempus inter secundam ac tertiam, X longitudinem quam Cometa toto illo tempore, ea cum velocitate quam habet in mediocri Telluris à Sole distantia, describere posset, quæque per Corol. 3. Prop. XL. Lib. III. invenienda est, & tV perpendiculum in chordam $T\tau$. In longitudine media tB sumatur utcunque punctum B pro loco Cometæ in plano Eclipticæ, & inde versus Solem S ducatur linea BE, quæ sit ad sagittam tV, ut contentum sub SB & St *quad.* ad cubum hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus latera sunt SB & tangens latitudinis Cometæ in observatione secunda ad radium tB. Et

Et per punctum E agatur (per hujus Lem. VII.) recta AEC, cujus partes AE, EC ad rectas TA & τC terminatæ, sint ad invicem ut tempora V & W: & erunt A & C loca Cometæ in plano Eclipticæ in observatione prima ac tertia quamproxime, si modo B sit locus ejus recte assumptus in observatione secunda.

Ad AC bisectam in I erige perpendiculum Ii. Per punctum B age occultam Bi ipsi AC parallelam. Junge occultam Si secantem AC in λ, & comple parallelogrammum $iI\lambda\mu$. Cape $I\sigma$ æqualem $3\,I\lambda$, & per Solem S age occultam $\sigma\xi$ æqualem $3\,S\sigma + 3\,i\lambda$. Et deletis jam literis A, E, C, I, a puncto B versus punctum ξ duc occultam novam BE, quæ sit ad priorem BE in duplicata ratione distantiæ BS ad quantitatem $S\mu + \frac{1}{3}i\lambda$. Et per punctum E iterum duc rectam AEC eadem lege ac prius, id est, ita ut ejus partes AE & EC sint ad invicem, ut tempora inter observationes V & W. Et erunt A & C loca Cometæ magis accurate.

Ad AC bisectam in I erigantur perpendicula AM, CN, IO, quarum AM & CN sint tangentes latitudinum in observatione prima ac tertia ad radios TA & τC. Jungatur MN secans IO in O. Constituatur rectangulum $iI\lambda\mu$ ut prius. In IA producta capiatur ID æqualis $S\mu + \frac{2}{3}i\lambda$, & agatur occulta OD. Deinde in MN versus N capiatur MP, quæ sit ad longitudinem supra inventam X, in subduplicata ratione mediocris distantiæ Telluris a Sole (seu semidiametri Orbis magni) ad distantiam OD. Si punctum P incidat in punctum N; erunt A, B, C tria loca Cometæ, per quæ Orbis ejus in plano Eclipticæ describi debet. Sin punctum P non incidat in punctum N; in recta AC capiatur CG ipsi NP æqualis, ita ut puncta G & P ad easdem partes rectæ NC jaceant.

Eadem methodo qua puncta E, A, C, G, ex assumpto puncto B inventa sunt, inveniantur ex assumptis utcunque punctis aliis b & β puncta nova e, a, c, g, & ε, α, κ, γ. Deinde si per G, g, γ ducatur circumferentia circuli $Gg\gamma$, secans rectam τC in Z: erit Z locus Cometæ in plano Eclipticæ. Et si in AC, ac, $\alpha\kappa$ capiantur AF, af, $\alpha\varphi$ ipsis CG, cg, $\kappa\gamma$ respective æquales, & per puncta F, f, φ ducatur circumferentia circuli $Ff\varphi$, secans rectam AT in X; erit punctum X alius Cometæ locus in plano Eclipticæ. Ad puncta X & Z erigantur tangentes latitudinum Cometæ ad radios TX & τZ; & habebuntur loca duo Cometæ in Orbe proprio. Denique (per Prop. XIX. Lib. I.) umbilico S, per loca illa duo describatur Parabola, & hæc erit Trajectoria Cometæ. *Q. E. I.*

De Mundi Systemate.

Conſtructionis hujus demonſtratio ex Lemmatibus conſequitur: quippe cum recta AC ſecetur in E in ratione temporum, per Lemma VII, ut oportet per Lem. VIII: & BE per Lem. XI. ſit pars rectæ BS vel $B\xi$ in plano Eclipticæ arcui ABC & chordæ AEC interjecta; & MP (per Corol. Lem. X.) longitudo ſit chordæ arcus, quem Cometa in Orbe proprio inter obſervationem primam ac tertiam deſcribere debet, ideoque ipſi MN æqualis fuerit, ſi modo B ſit verus Cometæ locus in plano Eclipticæ.

Cæterum puncta B, b, β non quælibet, ſed vero proxima eligere convenit. Si angulus AQt, in quo veſtigium Orbis in plano Eclipticæ deſcriptum ſecat rectam tB, præterpropter innoteſcat; in angulo illo ducenda erit recta occulta AC, quæ ſit ad $\frac{4}{3}T\tau$ in ſubduplicata ratione SQ ad St. Et agendo rectam SEB cujus pars EB æquetur longitudini Vt, determinabitur punctum B quod prima vice uſurpare licet. Tum recta AC deleta & ſecundum præcedentem conſtructionem iterum ducta, & inventa

inventa insuper longitudine $M\dot{P}$; in τB capiatur punctum b, ea lege, ut si TA, τC se mutuo secuerint in T, sit distantia Tb ad distantiam TB, in ratione composita ex ratione MP ad MN & ratione subduplicata SB ad Sb. Et eadem methodo inveniendum erit punctum tertium β, si modo operationem tertio repetere lubet. Sed hac methodo operationes duæ ut plurimum suffecerint. Nam si distantia Bb perexigua obvenerit; postquam inventa sunt puncta F, f & G, g, actæ rectæ Ff & Gg secabunt TA & τC in punctis quæsitis X & Z.

Exemplum.

Proponatur Cometa anni 1680. Hujus motum a *Flamstedio* observatum Tabula sequens exhibet.

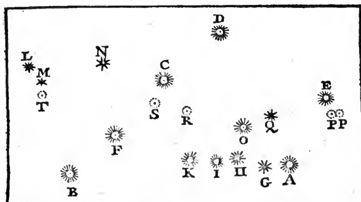
		Tem. appar.	Temp. verum	Long. Solis	Long. Cometæ	Lat. Cometæ
		h. ′	h. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″
1680 *Dec.*	12	4.46	4.46. 0	♑ 1.51.23	♑ 6.31.21	8.26. 0
	21	6.32½	6.36.59	11. 6.44	♒ 5. 7.38	21.45.30
	24	6.12	6.17.52	14. 9.26	18.49.10	25.23.24
	26	5.14	5.20.44	16. 9.22	28.24. 6	27. 0.57
	29	7.55	8. 3. 2	19.19.43	♓ 13.11.45	28.10. 5
	30	8. 2	8.10.26	20.21. 9	17.39. 5	28.11.12
1681 *Jan.*	5	5.51	6. 1.38	26.22.18	♈ 8.49.10	26.15.26
	9	6.49	7. 0.53	♒ 0.29. 2	18.43.18	24.12.42
	10	5.54	6. 6.10	1.27.43	20.40.57	23.44. 0
	13	6.56	7. 8.55	4.33.20	25.59.34	22.17.36
	25	7.44	7.58.42	16.45.36	♉ 9.35.48	17.56.54
	30	8. 7	8.21.53	21.49.58	13.19.36	16.40.57
Feb.	2	6.20	6.34.51	24.46.59	15.13.48	16. 2. 2
	5	6.50	7. 4.41	27.49.51	16.59.52	15.27.23

His adde Observationes quasdam e nostris.

		Temp. appar.	Cometæ Longit.	Com. Lat.
Febr.	25	8h. 30′	♉ 26gr. 18′. 17″	12gr. 46⅞
	27	8 . 15	27 . 4 . 24	12 . 36 1/7
Mart.	1	11 . 0	27 . 53 . 6	12 . 24 6/7
	2	8 . 0	28 . 12 . 27	11 . 20
	5	11 . 30	29 . 20 . 51	12 . 3½
	9	8 . 30	♊ 0 . 43 . 4	11 . 45⅞

Hæ Observationes Telescopio septupedali, & Micrometro filisque in foco Telescopii locatis peractæ sunt: quibus instrumentis &

 & positiones fixarum inter se & positiones Cometæ ad fixas determinavimus. Designet *A* stellam in sinistro calcaneo Persei (*Bayero* o) *B* stellam sequentem in sinistro pede (*Bayero* ζ) & *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, *M*, *N*, *O* stellas alias minores in eodem pede. Sintque *P*, *Q*, *R*, *S*, *T* loca Cometæ in observationibus supra descriptis: & existente distantia *AB* partium $80\frac{7}{12}$, erat *AC* partium $52\frac{1}{4}$, *BC* $58\frac{5}{6}$, *AD* $57\frac{5}{12}$, *BD* $82\frac{6}{11}$, *CD* $23\frac{2}{3}$, *AE* $29\frac{4}{7}$, *CE* $57\frac{1}{2}$, *DE* $49\frac{11}{12}$, *AI* $27\frac{7}{12}$, *BI* $52\frac{1}{6}$, *CI* $36\frac{7}{12}$,



DI $53\frac{5}{11}$, *AK* $38\frac{2}{3}$, *BK* 43, *CK* $31\frac{5}{9}$, *FK* 29, *FB* 23, *FC* $36\frac{1}{4}$, *AH* $18\frac{6}{7}$, *DH* $50\frac{7}{8}$, *BN* $46\frac{5}{12}$, *CN* $31\frac{1}{3}$, *BL* $45\frac{5}{12}$, *NL* $31\frac{5}{7}$. *HO* erat ad *HI* ut 7 ad 6 & producta transibat inter stellas *D* & *E*, sic ut distantia stellæ *D* ab hac recta esset $\frac{1}{6}$ *CD*. *LM* erat ad *LB* ut 2 ad 9 & producta transibat per stellam *H*. His determinabantur positiones fixarum inter se.

Die Veneris *Feb.* 25. St. vet. Hor. $8\frac{1}{2}$ P. M. Cometæ in *p* existentis distantia a stella *E* erat minor quam $\frac{3}{13}$ *AE*, major quam $\frac{1}{5}$ *AE*, adeoque æqualis $\frac{3}{14}$ *AE* proxime; & angulus *ApE* nonnihil obtusus erat, sed fere rectus. Nempe si demitteretur ad *pE* perpendiculum ab *A*, distantia Cometæ a perpendiculo illo erat $\frac{1}{5}$ *pE*.

Eadem nocte, hora $9\frac{1}{2}$, Cometæ in *P* existentis distantia a stella *E* erat major quam $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ *AE*, minor quam $\frac{1}{5\frac{1}{4}}$ *AE*, adeoque æqua-

lis

lis $\frac{1}{4\frac{7}{8}}$ AE, seu $\frac{8}{39}$ AE quamproxime. A perpendiculo autem a stella A ad rectam PE demisso, distantia Cometæ erat $\frac{1}{7}$ PE.

Die ☉ⁱˢ, *Feb.* 27. hor. 8¼ P. M. Cometæ in Q existentis distantia a stella O æquabat distantiam stellarum O & H, & recta QO producta transibat inter stellas K & B. Positionem hujus rectæ ob nubes intervenientes, magis accurate definire non potui.

Die ♂ⁱⁱˢ, *Mart.* 1, hor. 11. P. M. Cometa in R existens, stellis K & C accurate interjacebat, & rectæ CRK pars CR paulo major erat quam $\frac{1}{3}$ CK, & paulo minor quam $\frac{1}{3}$ $CK + \frac{1}{8}$ CR, adeoque æqualis $\frac{1}{3}$ $CK + \frac{1}{16}$ CR seu $\frac{16}{45}$ CK.

Die ☿ⁱⁱ, *Mart.* 2. hor. 8. P. M. Cometæ existentis in S, distantia a stella C erat $\frac{3}{4}$ FC quamproxime. Distantia stellæ F a recta CS producta erat $\frac{1}{24}$ FC; & distantia stellæ B ab eadem recta, erat quintuplo major quam distantia stellæ F. Item recta NS producta transibat inter stellas H & I, quintuplo vel sextuplo propior existens stellæ H quam stellæ I.

Die ♄ⁿⁱ, *Mart.* 5. hor. 11½. P. M. Cometa existente in T, recta MT æqualis erat $\frac{1}{2}$ ML, & recta LT producta transibat inter B & F, quadruplo vel quintuplo propior F quam B, auferens a BF quintam vel sextam ejus partem versus F. Et MT producta transibat extra spatium BF ad partes stellæ B, quadruplo propior existens stellæ B quam stellæ F. Erat M stella perexigua quæ per Telescopium videri vix potuit, & L stella major quasi magnitudinis octavæ.

Ex hujusmodi observationibus per constructiones figurarum & computationes (posito quod stellarum A & B distantia esset $2^{gr.}$ 6′. 46″, & stellæ A longitudo ♉ $26^{gr.}$ 41′. 50″ & latitudo borealis 12 gr. 8½′, stellæque B longitudo ♉ $28^{gr.}$ 40′. 24″ & latitudo borealis $11^{gr.}$ 17′$\frac{1}{8}$;) derivabam longitudines & latitudines Cometæ. Micrometro parum affabre constructo usus sum, sed longitudinum tamen & latitudinum errores (quatenus ab observationibus nostris oriantur) dimidium minuti unius primi vix superant, præterquam in observatione ultima *Mart.* 9. ubi positiones stellarum minus accurate determinare potui. *Cassinus* qui ascensionem rectam Cometæ eodem tempore observavit, declinationem ejus tanquam invariatam manentem parum diligenter definivit. Nam Cometa (juxta observationes nostras) in fine

 motus sui notabiliter deflectere cœpit boream versus, a parallelo quem in fine Mensis *Februarii* tenuerat.

Jam ad Orbem Cometæ determinandum; selegi ex observationibus hactenus descriptis tres, quas *Flamstedius* habuit *Dec.* 21, *Jan.* 5, & *Jan.* 25. Ex his inveni St partium 9842,1 & Vt partium 455, quales 10000 sunt semidiameter Orbis magni. Tum ad operationem primam assumendo tB partium 5657, inveni SB 9747, BE prima vice 412, $S\mu$ 9503, $i\lambda$ 413: BE secunda vice 421, OD 10186, X 8528, 4, MP 8450, MN 8475, NP 25. Unde ad operationem secundam collegi distantiam tb 5640. Et per hanc operationem inveni tandem distantias TX 4775 & τZ 11322. Ex quibus Orbem definiendo, inveni Nodos ejus descendentem in ♋ & ascendentem in ♑ 1gr. 53'; Inclinationem plani ejus ad planum Eclipticæ 61gr. 20⅓'; verticem ejus (seu Perihelium Cometæ) distare a Nodo 8gr. 38', & esse in ♐ 27gr. 43' cum latitudine australi 7gr. 34'; & ejus latus rectum esse 236,8, areamque radio ad Solem ducto singulis diebus descriptam 93585, quadrato semidiametri Orbis magni posito 100000000; Cometam vero in hoc Orbe secundum seriem signorum processisse, & *Decemb.* 8d. 0h. 4' P. M. in vertice Orbis seu Perihelio fuisse. Hæc omnia per scalam partium æqualium & chordas angulorum ex Tabula sinuum naturalium collectas, determinavi Graphice: construendo Schema satis amplum, in quo videlicet semidiameter Orbis magni (partium 10000) æqualis esset digitis 16½ pedis Anglicani.

Tandem ut constaret an Cometa in Orbe sic invento vere moveretur, collegi per operationes partim Arithmeticas partim Graphicas, loca Cometæ in hoc Orbe ad observationum quarundam tempora: uti in Tabula sequente videre licet.

		Distant. Cometæ a Sole.	Long. Collect.	Lat. Collect.	Long. Obs.	Lat. Obs.	Differ. Long.	Differ. Lat.
			gr. '	gr. '	gr. '	gr. '	'	'
Dec.	12	2792	♑ 6 . 32	8 . 18½	♑ 6 . 31⅓	8 . 26	+ 1	− 7½
	29	8403	♓ 13 . 13⅔	28 . 0	♓ 13 . 11¾	28 . 10 1/12	+ 2	− 10 1/12
Febr.	5	16669	♉ 17 . 0	15 . 29⅔	♉ 16 . 59⅞	15 . 27⅖	+ 0	+ 2¼
Mar.	5	21737	29 . 19¾	12 . 4	29 . 20⅙	12 . 3½	− 1	+ ½

Postea vero *Halleius* noster Orbitam, per calculum Arithmeticum, accuratius determinavit quam per descriptiones linearum fieri licuit; & retinuit quidem locum Nodorum in ♋ & ♑ 1gr. 53', & Inclinationem plani Orbitæ ad Eclipticam 61gr. 20⅓', ut & tempus Perihelii Cometæ *Decemb.* 8d. 0h. 4': distantiam vero Perihelii

helii a Nodo aſcendente, in Orbita Cometæ menſuratam, invenit eſſe 9 gr. 20′, & Latus rectum Parabolæ eſſe 243 partium, exiſtente mediocri Solis a Terra diſtantia partium 10000. Et ex his datis, calculo itidem Arithmetico accurate inſtituto, loca Cometæ ad obſervationum tempora computavit, ut ſequitur.

Tempus verum	Diſtantia Cometæ a ☉	Long. comp.	Lat. comp.	Errores in Long.	Errores in Lat.
d. h. ′ ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Dec. 12 . 4 . 46 . 0	28028	♑ 6 . 29 . 25	8 . 26 . 0 Bor.	− 1 . 56	+ 0 . 5
21 . 6 . 36 . 59	61076	♒ 5 . 6 . 30	21 . 43 . 20	− 1 . 3	− 2 . 10
24 . 6 . 17 . 52	70008	18 . 48 . 20	25 . 22 . 40	− 0 . 50	− 0 . 44
26 . 5 . 20 . 44	75576	28 . 22 . 45	27 . 1 . 36	− 1 . 21	+ 0 . 35
29 . 8 . 3 . 2	84021	♓ 13 . 12 . 40	28 . 10 . 10	+ 0 . 55	+ 0 . 5
30 . 8 . 10 . 26	86661	17 . 40 . 5	28 . 11 . 10	+ 1 . 0	+ 0 . 8
Jan. 5 . 6 . 1 . 38	101440	♈ 8 . 49 . 49	26 . 15 . 15	+ 0 . 39	− 0 . 1
9 . 7 . 0 . 53	110959	18 . 44 . 36	24 . 12 . 54	+ 1 . 18	+ 0 . 12
10 . 6 . 6 . 10	113162	20 . 41 . 0	23 . 44 . 10	+ 0 . 3	+ 0 . 1
13 . 7 . 8 . 55	120000	26 . 0 . 21	22 . 17 . 30	+ 0 . 47	− 0 . 6
25 . 7 . 58 . 42	145370	♉ 3 . 33 . 40	17 . 57 . 55	− 2 . 3	+ 1 . 1
30 . 8 . 21 . 53	155303	13 . 17 . 41	16 . 42 . 7	− 1 . 55	+ 1 . 1
Feb. 2 . 6 . 34 . 51	160951	15 . 11 . 11	16 . 4 . 15	− 2 . 37	+ 1 . 13
5 . 7 . 4 . 41	165616	16 . 58 . 25	15 . 29 . 13	− 1 . 27	+ 1 . 5
25 . 8 . 19 . 0	202570	26 . 15 . 46	12 . 48 . 0	− 2 . 31	+ 1 . 1
Mar. 5 . 11 . 21 . 0	216205	29 . 18 . 35	12 . 5 . 40	− 2 . 16	+ 2 . 1

Apparuit etiam hic Cometa menſe *Novembri* præcedente, & die undecimo hujus menſis ſtylo veteri, ad horam quintam matutinam, *Cantuariæ* in *Anglia*, viſus fuit in ♍ $12\frac{1}{2}$ cum latitudine boreali 2 gr. circiter. Craſſiſſima fuit hæc Obſervatio: meliores ſunt quæ ſequuntur.

Nov. 17, ſt. vet. *Ponthæus* & ſocii hora ſexta matutina *Romæ* (id eſt, hora 5, 10′ *Londini*) filis ad fixas applicatis Cometam obſervarunt in ♎ 8. 30′, cum latitudine auſtrali 0 gr. 40′. Extant eorum Obſervationes in tractatu quem *Ponthæus*, de hoc Cometa, in lucem edidit. *Cellius* qui aderat & obſervationes ſuas in Epiſtola ad *D. Caſſinum* miſit, Cometam eadem hora vidit in ♎ 8 gr. 30′ cum latitudine auſtrali 0 gr. 30′. Eadem hora *Galletius* etiam Cometam vidit in ♎ 8 gr. ſine latitudine.

Nov. 18. hora matutina 6. 30′ *Romæ* (id eſt, hora 5, 40′ *Londini*) *Ponthæus* Cometam vidit in ♎ 13 gr. 30′ cum latitudine auſtrali 1 gr. 20′. *Cellius* in ♎ 13 gr. 00′, cum latitudine auſtrali 1 gr. 00′. *Galletius* autem hora matutina 5. 30′ *Romæ*, Cometam vidit in ♎ 13 gr. 00′, cum latitudine auſtrali 1 gr. 00′. Et *R. P. Ango* in Academia *Flexienſi* apud *Gallos*, hora quinta matutina (id eſt, hora 5, 9′ *Londini*) Cometam vidit in medio inter ſtellas

DE MUNDI SYSTEMATE, duas parvas, quarum una media est trium in recta linea in Virginis australi manu, & altera est extrema alæ. Unde Cometa tunc fuit in ♎ 12. 46′, cum latitudine australi 50′. Eodem die *Bostoniæ* in *Nova-Anglia* in Latitudine 42½ graduum, hora quinta matutina, (id est *Londini* hora matutina 9. 44′) Cometa visus est prope ♎ 14, cum latitudine australi 1 gr. 30′, uti a *Cl. Halleio* accepi.

Nov. 19. hora mat. 4½ *Cantabrigiæ*, Cometa (observante juvene quodam) distabat a Spica ♍ quasi 2 gr. Boreazephyrum versus. Eodem die hor. 5. mat. *Bostoniæ* in *Nova-Anglia*, Cometa distabat a Spica ♍ gradu uno, differentia latitudinum existente 40′. Eodem die in Insula *Jamaica*, Cometa distabat a Spica intervallo quasi gradus unius. Et ex his observationibus inter se collatis colligo, quod hora 9. 44′. *Londini*, Cometa erat in ♎ 18 gr. 40′, cum latitudine australi 1 gr. 18′ circiter. Eodem die D. *Arthurus Storer* ad fluvium *Patuxent*, prope *Hunting-Creek* in *Mary-Land*, in confinio *Virginiæ* in Lat. 38½ gr. hora quinta matutina (id est, hora 10ª *Londini*) Cometam vidit supra Spicam ♍, & cum Spica propemodum conjunctum, existente distantia inter eosdem quasi ¾ gr. Observator idem, eadem hora diei sequentis, Cometam vidit quasi 2 gr. inferiorem Spica. Congruent hæ observationes cum observationibus in *Nova-Anglia* & *Jamaica* factis, si modo distantiæ (pro motu diurno Cometæ) nonnihil augeantur, ita ut Cometa die priore superior esset Spica ♍, altitudine 1 gr. circiter, ac die posteriore inferior eadem stella, altitudine perpendiculari 3 gr. 40′.

Nov. 20. D. *Montenarus* Astronomiæ Professor *Paduensis*, hora sexta matutina *Venetiis* (id est, hora 5. 10′ *Londini*) Cometam vidit in ♎ 23 gr., cum latitudine australi 1 gr. 30′. Eodem die *Bostoniæ*, distabat Cometa a Spica ♍, 4 gr. longitudinis in orientem, adeoque erat in ♎ 23 gr. 24′ circiter.

Nov. 21. *Ponthæus* & socii hor. mat. 7¼ Cometam observarunt in ♎ 27 gr. 50′, cum latitudine australi 1 gr. 16′; *Ango* hora quinta matutina in ♎ 27 gr. 45′, *Montenarus* in ♎ 27 gr. 51′. Eodem die in Insula *Jamaica*, Cometa visus est prope principium Scorpii, eandemque circiter latitudinem habuit cum Spica Virginis, id est, 2 gr. 2′.

Nov. 22. Cometa visus est a *Montenaro* in ♏ 2. 33′. *Bostoniæ* autem in *Nova-Anglia* apparuit in ♏ 3 gr. circiter, eadem fere cum latitudine ac prius, id est, 1 gr. 30′. Eodem die *Londini*, hora

hora mat. 6½ *Hookius* noster Cometam vidit in ♏ 3 gr. 30′ circiter, idque in linea recta quæ transit per Spicam Virginis & Cor Leonis, non exacte quidem, sed a linea illa paululum deflectentem ad boream. *Montenarus* itidem notavit quod linea a Cometa per Spicam ducta, hoc die & sequentibus transibat per australe latus Cordis Leonis, interposito perparvo intervallo inter Cor Leonis & hanc lineam. Linea recta per Cor Leonis & Spicam Virginis transiens, Eclipticam secuit in ♍ 3 gr. 46′, in angulo 2 gr. 51′. Et si Cometa locatus fuisset in hac linea in ♏ 3 gr., ejus latitudo fuisset 2 gr. 26′. Sed cum Cometa consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, nonnihil distaret ab hac linea boream versus, latitudo ejus fuit paulo minor. Die 20. ex observatione *Montenari*, latitudo ejus propemodum æquabat latitudinem Spicæ ♍, eratque 1 gr. 30′ circiter, & consentientibus *Hookio*, *Montenaro*, & *Angone* perpetuo augebatur, ideoque jam sensibiliter major erat quam 1 gr. 30′. Inter limites autem jam constitutos 2 gr. 26′ & 1 gr. 30′, magnitudine mediocri latitudo erit 1 gr. 58′ circiter. Cauda Cometæ, consentientibus *Hookio* & *Montenaro*, dirigebatur ad Spicam ♍, declinans aliquantulum a Stella ista, juxta *Hookium* in austrum, juxta *Montenarum* in boream; ideoque declinatio illa vix fuit sensibilis, & Cauda Æquatori fere parallela existens, aliquantulum deflectebatur ab oppositione Solis boream versus.

LIBER TERTIUS.

Nov. 24. Ante ortum Solis Cometa visus est a *Montenaro* in ♏ 12 gr. 52′, ad boreale latus rectæ quæ per Cor Leonis & Spicam Virginis ducebatur, ideoque latitudinem habuit paulo minorem quam 2 gr. 38′. Hæc latitudo, uti diximus, ex observationibus *Montenari*, *Angonis* & *Hookii*, perpetuo augebatur; ideoque jam paulo major erat quam 1 gr. 58′; & magnitudine mediocri, absque notabili errore, statui potest 2 gr. 18′. Latitudinem *Ponthæus* & *Galletius* jam decrevisse volunt, & *Cellius* & Observator in *Nova-Anglia* eandem fere magnitudinem retinuisse, scilicet gradus unius vel unius cum semisse. Crassiores sunt observationes *Ponthæi* & *Cellii*, eæ præsertim quæ per Azimuthos & Altitudines capiebantur, ut & eæ *Galletii*: meliores sunt eæ quæ per positiones Cometæ ad fixas a *Montenaro*, *Hookio*, *Angone* & Observatore in *Nova-Anglia*, & nonnunquam a *Ponthæo* & *Cellio* sunt factæ.

Jam collatis Observationibus inter se, colligere videor quod Cometa hoc mense circulum fere maximum descripsit, secantem Eclipticam in ♍ 25. 12′, idque in angulo 3 gr. 12′ quamproxime. Nam & *Montenarus* Orbitam ab Ecliptica in austrum, tribus sal-

De Mundi Systemate.

tem gradibus declinasse dicit. Et cognita cursus positione, longitudines Cometæ ex observationibus collectæ, ad incudem jam revocari possunt & melius nonnunquam determinari, ut fit in sequentibus. *Cellius* Novemb. 17. observavit distantiam Cometæ a Spica ♍, æqualem esse distantiæ ejus a stella lucida in dextra ala Corvi: & hinc locandus est Cometa in intersectione hujus circuli quem Cometa motu apparente descripsit, cum circulo maximo qui a fixis illis duabus æqualiter distat, atque adeo in ♎ 7 gr. 54′, cum latitudine australi 43′. Præterea *Montenarus*, *Novemb.* 20. hora sexta matutina *Venetiis*, Cometam vidit non totis quatuor gradibus distantem a Spica; dicitque hanc distantiam, vix æquasse distantiam stellarum duarum lucidarum in alis Corvi, vel duarum in juba Leonis, hoc est 3 gr. & 30′ vel 32′. Sit igitur distantia Cometæ a Spica 3 gr. 30′, & Cometa locabitur in ♎ 22 gr. 48′, cum latitudine australi 1 gr. 30′. Adhæc *Montenarus*, *Novemb.* 21, 22, 24 & 25 ante ortum Solis, Sextante æneo quintupedali ad minuta prima & semiminuta diviso & vitris Telescopicis armato, distantias mensuravit Cometæ a Spica 8 gr. 28′, 13 gr. 10′, 23 gr. 30′, & 28 gr. 13′: & has distantias, per refractionem nondum correctas, addendo longitudini Spicæ, collegit Cometam his temporibus fuisse in ♎ 27 gr. 51′. ♏ 2 gr. 33′, ♏ 12 gr. 52′ & ♏ 17 gr. 45′. Si distantiæ illæ per refractiones corrigantur, & ex distantiis correctis differentiæ longitudinum inter Spicam & Cometam probe deriventur, locabitur Cometa his temporibus in ♎ 27 gr. 52′. ♏ 2 gr. 36′, ♏ 12 gr. 58′ & ♏ 17 gr. 53′ circiter. Latitudines autem ad has longitudines in via Cometæ captas, prodeunt 1 gr. 45′, 1 gr. 58′, 2 gr. 22′ & 2 gr. 31′. Harum quatuor observationum horas matutinas *Montenarus* non posuit. Priores duæ ante horam sextam, posteriores (ob viciniam Solis) post sextam factæ videntur. Die 22, ubi Cometa ex observatione *Montenari* locatur in ♏ 2 gr. 36′, *Hookius* noster eundem locavit in ♏ 3 gr. 30′ ut supra. *Montenarus* in defectu, *Hookius* in excessu errasse videntur. Nam Cometa, ex serie observationum, jam fuit in ♏ 2 gr. 56, vel ♏ 3 gr. circiter.

Observationum suarum ultimam inter vapores & diluculum captam, *Montenarus* suspectam habebat. Et *Cellius* eodem tempore (id est, *Novem.* 25.) Cometam per ejus Altitudinem & Azimuthum locavit in ♏ 15 gr. 47′, cum latitudine australi quasi gradus unius. Sed *Cellius* observavit etiam eodem tempore, quod Cometa erat in linea recta cum stella lucida in dextro femore

Vir-

Virginis & cum Lance auſtrali Libræ, & hæc linea ſecat viam Cometæ in ♏ 18 gr. 36′. *Ponthæus* etiam eodem tempore obſervavit, quod Cometa erat in recta tranſeunte per Chelam auſtrinam Scorpii & per ſtellam quæ Lancem borealem ſequitur: & hæc recta ſecat viam Cometæ in ♏ 16 gr. 34′. Obſervavit etiam, quod Cometa erat in recta tranſeunte per ſtellam ſupra Lancem auſtralem Libræ & ſtellam in principio pedis ſecundi Scorpii: & hæc recta ſecat viam Cometæ in ♏ 17 gr. 55′. Et inter longitudines ex his tribus Obſervationibus ſic derivatas, longitudo mediocris eſt ♏ 17 gr. 42′, quæ cum obſervatione *Montenari* ſatis congruit.

Erravit igitur *Cellius* jam locando Cometam in ♏ 15 gr. 47′, per ejus Azimuthum & Altitudinem. Et ſimilibus Azimuthorum & Altitudinum obſervationibus, *Cellius* & *Ponthæus* non minus erraverunt locando Cometam in ♏ 20 & ♏ 24 diebus duobus ſequentibus, ubi ſtellæ fixæ ob diluculum vix aut ne vix quidem apparuere. Et corrigendæ ſunt hæ obſervationes per additionem duorum graduum, vel duorum cum ſemiſſe.

Ex omnibus autem Obſervationibus inter ſe collatis & ad meridianum *Londini* reductis, colligo Cometam hujuſmodi curſum quamproxime deſcripſiſſe.

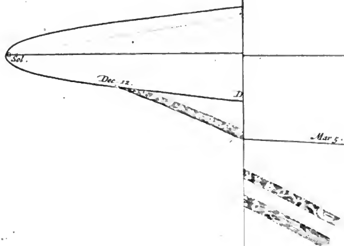
Temp. med. ſt. vet.		Long. Cometæ	Lat. Cometæ
	d. h. ′	gr. ′	gr. ′
Nov.	16.17.10	♎ 8.0	0.44 Auſt.
	17.17.10	12.52	1.0
	18.21.44	18.40	1.18
	19.17.10	22.48	1.30
	20.17 fere	27.52	1.45
	21.17 fere	♏ 2.56	1.58
	23.17$\frac{1}{4}$ fere	12.58	2.20
	24.17$\frac{1}{2}$ fere	17.53	2.29
	26.18.00	26 vel 27 gr.	2.42

Loca autem Cometæ in Orbe Parabolico computata, ita ſe habent.

Temp. verum		Diſt. Com. a ☉	Long. comp.	Lat. comp.
	d. h.		gr. ′ ″	gr. ′ ″
Nov.	16.17.0	83920	♎ 8.0.25	0.43.20 Auſt.
	18.21.34	78020	18.41.50	1.17.30
	20.16.50	73012	27.59.40	1.44.25
	23.17.5	64206	♏ 13.19.15	2.21.8
	26.17.0	54799	26.46.30	2.42.30

Con-

Congruunt inter Observationes Astronomicæ, tam mense *Novembri* quam mensibus quatuor sequentibus, cum motu Cometæ circum Solem in Trajectoria hacce Parabolica, atque adeo unum & eundem Cometam fuisse, qui mense *Novembri* ad Solem descendit, & mensibus sequentibus ab eodem ascendit, abunde confirmant, ut & hunc Cometam in Trajectoria hacce Parabolica delatum fuisse quamproxime. Mensibus *Decembri*, *Januario*, *Februario* & *Martio*, ubi Observationes hujus Cometæ sunt satis accuratæ, congruunt eædem cum motu ejus in hac Trajectoria, non minus accurate quam observationes Planetarum congruere solent cum eorum Theoriis. Mense *Novembri*, ubi observationes sunt crassæ, errores non sunt majores quam qui crassitudini observationum tribuantur. Trajectoria Cometæ bis secuit planum Eclipticæ, & propterea non fuit rectilinea. Eclipticam secuit non in oppositis cœli partibus, sed in fine Virginis & principio Capricorni, intervallo graduum 98 circiter; ideoque cursus Cometæ plurimum deflectebatur a Circulo maximo. Nam & mense *Novembri* cursus ejus tribus saltem gradibus ab Ecliptica in austrum declinabat, & postea mense *Decembri* gradibus 29 vergebat ab Ecliptica in septentrionem, partibus duabus Orbitæ in quibus Cometa tendebat in Solem & redibat a Sole, angulo apparente graduum plus triginta ab invicem declinantibus, ut observavit *Montenarus*. Pergebat hic Cometa per signa fere novem, a Virginis scilicet duodecimo gradu ad principium Geminorum, præter signum Leonis per quod pergebat antequam videri cœpit: & nulla alia extat Theoria, qua Cometa tantam Cœli partem motu regulari percurrat. Motus ejus fuit maxime inæquabilis. Nam circa diem vigesimum *Novembris*, descripsit gradus circiter quinque singulis diebus; dein motu retardato inter *Novemb.* 26. & *Decemb.* 12, spatio scilicet dierum quindecim cum semisse, descripsit gradus tantum 40; postea vero motu iterum accelerato, descripsit gradus fere quinque singulis diebus, antequam motus iterum retardari cœpit. Et Theoria quæ motui tam inæquabili per maximam cœli partem probe respondet, quæque easdem observat leges cum Theoria Planetarum, & cum accuratis observationibus Astronomicis accurate congruit, non potest non esse vera. Cometa tamen sub finem motus deviabat aliquantulum ab hac Trajectoria Parabolica versus axem Parabolæ, ut ex erroribus minuti unius primi duorumve in latitudinem mense *Februario* & *Martio* conspirantibus, colligere videor; & propterea in Orbe Elliptico


Sol.
Dec 12.
D
Mar 5.

liptico circum Solem movebatur, spatio annorum plusquam quingentorum, quantum ex erroribus illis judicare licuit, revolutionem peragens. LIBER TERTIUS.

Cæterum Trajectoriam quam Cometa descripsit, & Caudam veram quam singulis in locis projecit, visum est annexo schemate in plano Trajectoriæ optice delineatas exhibere: Observationibus sequentibus in Cauda definienda adhibitis.

Nov. 17. Cauda gradus amplius quindecim longa *Ponthæo* apparuit. *Nov.* 18. Cauda 30 gr. longa, Solique directe opposita in *Nova-Anglia* cernebatur, & protendebatur usque ad stellam ♂, quæ tunc erat in ♏ 9 gr. 54'. *Nov.* 19. in *Mary-Land* cauda visa fuit gradus 15 vel 20 longa. *Dec.* 10. Cauda (observante *Flamstedio*) transibat per medium distantiæ inter caudam serpentis Ophiuchi & stellam δ in Aquilæ australi ala, & desinebat prope stellas *A*, ω, *b* in Tabulis *Bayeri*. Terminus igitur erat in ♑ $19\frac{1}{4}$ gr. cum latitudine boreali $34\frac{1}{4}$ gr. circiter. *Dec.* 11. surgebat ad usque caput Sagittæ (*Bayero*, α, β,) desinens in ♑ 26 gr. 43', cum latitudine boreali 38 gr. 34'. *Dec.* 12. transibat per medium Sagittæ, nec longe ultra protendebatur, desinens in ♒ 4 gr., cum latitudine boreali $42\frac{1}{2}$ gr. circiter. Intelligenda sunt hæc de longitudine caudæ clarioris. Nam luce obscuriore, in cœlo forsan magis sereno, cauda *Dec.* 12, hora 5, 40' *Romæ* (observante *Ponthæo*) supra Cygni Uropygium ad gradus 10 sese extulit; atque ab hac stella ejus latus ad occasum & boream min. 45. destitit. Lata autem erat cauda his diebus gradus 3, juxta terminum superiorem, ideoque medium ejus distabat a Stella illa 2 gr. 15'. austrum versus, & terminus superior erat in ♓ 22 gr. cum latitudine boreali 61 gr. *Dec.* 21. surgebat fere ad cathedram *Cassiopeiæ*, æqualiter distans a β & *Schedir*, & distantiam ab utraque distantiæ earum ab invicem æqualem habens, adeoque desinens in ♓ 24 gr. cum latitudine $47\frac{1}{2}$ gr. *Dec.* 29. tangebat *Scheat* sitam ad sinistram, & intervallum stellarum duarum in pede boreali *Andromedæ* accurate complebat, & longa erat 54 gr. adeoque desinebat in ♉ 19 gr. cum latitudine 35 gr. *Jan.* 5. tetigit stellam π in pectore *Andromedæ*, ad latus suum dextrum, & stellam μ in ejus cingulo, ad latus sinistrum; & (juxta Observationes nostras) longa erat 40 gr.; curva autem erat & convexo latere spectabat ad austrum. Cum circulo per Solem & caput Cometæ transeunte angulum confecit graduum 4 juxta caput Cometæ; at juxta terminum alterum inclinabatur ad circulum illum in angulo 10 vel 11 graduum & chorda caudæ cum circulo illo continebat angulum graduum

De Mundi Systemate. octo. *Jan.* 13. Cauda luce satis sensibili terminabatur inter *Alamech* & *Algol*, & luce tenuissima desinebat e regione stellæ $\varkappa$ in latere *Persei*. Distantia termini caudæ a circulo Solem & Cometam jungente erat $3^{gr.} 50'$, & inclinatio chordæ caudæ ad circulum illum $8\frac{1}{2}^{gr.}$. *Jan.* 25 & 26 luce tenui micabat ad longitudinem graduum 6 vel 7; & ubi cœlum valde serenum erat, luce tenuissima & ægerrime sensibili attingebat longitudinem graduum duodecim & paulo ultra. Dirigebatur autem ejus axis ad Lucidam in humero orientali Aurigæ accurate, adeoque declinabat ab oppositione Solis boream versus in angulo graduum decem. Denique *Feb.* 10. Caudam oculis armatis aspexi gradus duos longam. Nam lux prædicta tenuior per vitra non apparuit. *Pontheus* autem *Feb.* 7. se caudam ad longitudinem graduum 12 vidisse scribit.

Orbem jam descriptum spectanti & reliqua Cometæ hujus Phænomena in animo revolventi, haud difficulter constabit quod corpora Cometarum sunt solida, compacta, fixa ac durabilia ad instar corporum Planetarum. Nam si nihil aliud essent quam vapores vel exhalationes Terræ, Solis & Planetarum, Cometa hicce in transitu suo per viciniam Solis statim dissipari debuisset. Est enim calor Solis ut radiorum densitas, hoc est, reciproce ut quadratum distantiæ locorum a Sole. Ideoque cum distantia Cometæ a centro Solis *Decemb.* 8. ubi in Perihelio versabatur, esset ad distantiam Terræ a centro Solis ut 6 ad 1000 circiter, calor Solis apud Cometam eo tempore erat ad calorem Solis æstivi apud nos ut 1000000 ad 36, seu 28000 ad 1. Sed calor aquæ ebullientis est quasi triplo major quam calor quem terra arida concipit ad æstivum Solem, ut expertus sum: & calor ferri candentis (si recte conjector) quasi triplo vel quadruplo major quam calor aquæ ebullientis; adeoque calor quem terra arida apud Cometam in Perihelio versantem ex radiis Solaribus concipere posset, quasi 2000 vicibus major quam calor ferri candentis. Tanto autem calore vapores & exhalationes, omnisque materia volatilis statim consumi ac dissipari debuissent.

Cometa igitur in Perihelio suo calorem immensum ad Solem concepit, & calorem illum diutissime conservare potest. Nam globus ferri candentis digitum unum latus, calorem suum omnem spatio horæ unius in aere consistens vix amitteret. Globus autem major calorem diutius conservaret in ratione diametri, propterea quod superficies (ad cujus mensuram per contactum aeris ambientis

entis refrigeratur) in illa ratione minor est pro quantitate materiæ suæ calidæ inclusæ. Ideoque globus ferri candentis huic Terræ æqualis, id est, pedes plus minus 40000000 latus, diebus totidem, & idcirco annis 50000, vix refrigesceret. Suspicor tamen quod duratio Caloris, ob causas latentes, augeatur in minore ratione quam ea diametri: & optarim rationem veram per experimenta investigari.

Porro notandum est quod Cometa Mense *Decembri*, ubi ad Solem modo incaluerat, caudam emittebat longe majorem & splendidiorem quam antea mense *Novembri*, ubi Perihelium nondum attigerat. Et universaliter caudæ omnes maximæ & fulgentissimæ e Cometis oriuntur, statim post transitum eorum per regionem Solis. Conducit igitur calefactio Cometæ ad magnitudinem caudæ. Et inde colligere videor quod cauda nihil aliud sit quam vapor longe tenuissimus, quem caput seu nucleus Cometæ per calorem suum emittit.

Cæterum de Cometarum caudis triplex est opinio; eas vel jubar esse Solis per translucida Cometarum capita propagatum, vel oriri ex refractione lucis in progressu ipsius a capite Cometæ in Terram, vel denique nubem esse seu vaporem a capite Cometæ jugiter surgentem & abeuntem in partes a Sole aversas. Opinio prima eorum est qui nondum imbuti sunt scientia rerum Opticarum. Nam jubar Solis in cubiculo tenebroso non cernitur, nisi quatenus lux reflectitur e pulverum & fumorum particulis per aerem semper volitantibus: adeoque in aere fumis crassioribus infecto splendidius est, & sensum fortius ferit; in aere clariore tenuius est, & ægrius sentitur: in cœlis autem absque materia reflectente nullum esse potest. Lux non cernitur quatenus in jubare est, sed quatenus inde reflectitur ad oculos nostros. Nam visio non fit nisi per radios qui in oculos impingunt. Requiritur igitur materia aliqua reflectens in regione caudæ, ne cœlum totum luce Solis illustratum uniformiter splendeat. Opinio secunda multis premitur difficultatibus. Caudæ numquam variegantur coloribus: qui tamen refractionum solent esse comites inseparabiles. Lux Fixarum & Planetarum distincte ad nos transmissa, demonstrat medium cœleste nulla vi refractiva pollere. Nam quod dicitur Fixas ab *Ægyptiis* comatas nonnunquam visas fuisse, id quoniam rarissime contingit, adscribendum est nubium refractioni fortuitæ. Fixarum quoque radiatio & scintillatio ad refractiones tum Oculorum tum Aeris tremuli referendæ sunt: quippe quæ admotis oculo Telescopiis

 evane-

evanescunt. Aeris & ascendentium vaporum tremore fit ut radii facile de angusto pupillæ spatio per vices detorqueantur, de latiore autem vitri objectivi apertura neutiquam. Inde est quod scintillatio in priori casu generetur, in posteriore autem cesset: & cessatio in posteriore casu demonstrat regularem transmissionem lucis per cœlos absque omni refractione sensibili. Nequis contendat quod caudæ non soleant videri in Cometis cum eorum lux non est satis fortis, quia tunc radii secundarii non habent satis virium ad oculos movendos, & propterea caudas Fixarum non cerni: sciendum est quod lux Fixarum plus centum vicibus augeri potest mediantibus Telescopiis, nec tamen caudæ cernuntur. Planetarum quoque lux copiosior est, caudæ vero nullæ: Cometæ autem sæpe caudatissimi sunt, ubi capitum lux tenuis est & valde obtusa: sic enim Cometa Anni 1680, Mense *Decembri*, quo tempore caput luce sua vix æquabat stellas secundæ magnitudinis, caudam emittebat splendore notabili usque ad gradus 40, 50, 60 longitudinis & ultra: postea *Jan.* 27 & 28 caput apparebat ut stella septimæ tantum magnitudinis, cauda vero luce quidem pertenui sed satis sensibili longa erat 6 vel 7 gradus, & luce obscurissima, quæ cerni vix posset, porrigebatur ad gradum usque duodecimum vel paulo ultra: ut supra dictum est. Sed & *Feb.* 9 & 10 ubi caput nudis oculis videri desierat, caudam gradus duos longam per Telescopium contemplatus sum. Porro si cauda oriretur & refractione materiæ cœlestis, & pro figura cœlorum deflecteretur de Solis oppositione, deberet deflexio illa in iisdem cœli regionibus in eandem semper partem fieri. Atqui Cometa Anni 1680 *Decemb.* 28. hora $8\frac{1}{2}$ P. M. *Londini*, versabatur in ♓ $8^{gr.}$ 41′ cum latitudine boreali $28^{gr.}$ 6′, Sole existente in ♑ $18^{gr.}$ 26′. Et Cometa Anni 1577, *Dec.* 29. versabatur in ♓ $8^{gr.}$ 41′ cum latitudine boreali $28^{gr.}$ 40′, Sole etiam existente in ♑ $18^{gr.}$ 26′ circiter. Utroque in casu Terra versabatur in eodem loco, & Cometa apparebat in eadem cœli parte: in priori tamen casu cauda Cometæ (ex meis & aliorum Observationibus) declinabat angulo graduum $4\frac{1}{2}$ ab oppositione Solis aquilonem versus; in posteriore vero (ex Observationibus *Tychonis*) declinatio erat graduum 21 in austrum. Igitur repudiata cœlorum refractione, superest ut Phænomena Caudarum ex materia aliqua reflectente deriventur.

Caudas autem a capitibus oriri & in regiones a Sole aversas ascendere confirmatur ex legibus quas observant. Ut quod in

planis

planis Orbium Cometarum per Solem transeuntibus jacentes, deviant ab oppositione Solis in eas semper partes, quas capita in Orbibus illis progredientia relinquunt. Quod spectatori in his planis constituto apparent in partibus a Sole directe aversis; digrediente autem spectatore de his planis, deviatio paulatim sentitur, & indies apparet major. Quod deviatio cæteris paribus minor est ubi cauda obliquior est ad Orbem Cometæ, ut & ubi caput Cometæ ad Solem propius accedit; præsertim si spectetur deviationis angulus juxta caput Cometæ. Præterea quod caudæ non deviantes apparent rectæ, deviantes autem incurvantur. Quod curvatura major est ubi major est deviatio, & magis sensibilis ubi cauda cæteris paribus longior est: nam in brevioribus curvatura ægre animadvertitur. Quod deviationis angulus minor est juxta caput Cometæ, major juxta caudæ extremitatem alteram, atque adeo quod cauda convexo sui latere partes respicit a quibus fit deviatio, quæque in recta sunt linea a Sole per caput Cometæ in infinitum ducta. Et quod caudæ quæ prolixiores sunt & latiores, & luce vegetiore micant, sint ad latera convexa paulo splendidiores & limite minus indistincto terminatæ quam ad concava. Pendent igitur Phænomena caudæ a motu capitis, non autem a regione cœli in qua caput conspicitur; & propterea non fiunt per refractionem cœlorum, sed a capite suppeditante materiam oriuntur. Etenim ut in Aere nostro fumus corporis cujusvis igniti petit superiora, idque vel perpendiculariter si corpus quiescat, vel oblique si corpus moveatur in latus: ita in Cœlis ubi corpora gravitant in Solem, fumi & vapores ascendere debent à Sole (uti jam dictum est) & superiora vel recta petere, si corpus fumans quiescit; vel oblique, si corpus progrediendo loca semper deserit a quibus superiores vaporis partes ascenderant. Et obliquitas ista minor erit ubi ascensus vaporis velocior est: nimirum in vicinia Solis & juxta corpus fumans. Ex obliquitatis autem diversitate incurvabitur vaporis columna: & quia vapor in columnæ latere præcedente paulo recentior est, ideo etiam is ibidem aliquanto densior erit, lucemque propterea copiosius reflectet, & limite minus indistincto terminabitur. De Caudarum agitationibus subitaneis & incertis, deque earum figuris irregularibus, quas nonnulli quandoque describunt, hic nihil adjicio; propterea quod vel a mutationibus Aeris nostri, & motibus nubium caudas aliqua ex parte obscurantium oriantur; vel forte a partibus Viæ Lacteæ, quæ cum caudis prætereuntibus confundi possint, ac tanquam earum partes spectari.

LIBER TERTIUS.

 Vapo-

Vapores autem, qui spatiis tam immensis implendis sufficiant, ex Cometarum Atmosphæris oriri posse, intelligetur ex raritate Aeris nostri. Nam Aer juxta superficiem Terræ spatium occupat quasi 850 partibus majus quam Aqua ejusdem ponderis, ideoque Aeris columna cylindrica pedes 850 alta, ejusdem est ponderis cum Aquæ columna pedali latitudinis ejusdem. Columna autem Aeris ad summitatem Atmosphæræ assurgens æquat pondere suo columnam Aquæ pedes 33 altam circiter; & propterea si columnæ totius Aereæ pars inferior pedum 850 altitudinis dematur, pars reliqua superior æquabit pondere suo columnam Aquæ altam pedes 32. Inde vero (ex Hypothesi multis experimentis confirmata, quod compressio Aeris sit ut pondus Atmosphæræ incumbentis, quodque gravitas sit reciproce ut quadratum distantiæ locorum a centro Terræ) computationem per Corol. Prop. XXII. Lib. II. ineundo, inveni quod Aer, si ascendatur a superficie Terræ ad altitudinem semidiametri unius terrestris, rarior sit quam apud nos in ratione longe majori, quam spatii omnis infra Orbem Saturni ad globum diametro digiti unius descriptum. Ideoque globus Aeris nostri digitum unum latus, ea cum raritate quam haberet in altitudine semidiametri unius terrestris, impleret omnes Planetarum regiones ad usque sphæram Saturni & longe ultra. Proinde cum Aer adhuc altior in immensum rarescat; & coma seu Atmosphæra Cometæ, ascendendo ab illius centro, quasi decuplo altior sit quam superficies nuclei, deinde cauda adhuc altius ascendat, debebit cauda esse quam rarissima. Et quamvis, ob longe crassiorem Cometarum Atmosphæram, magnamque corporum gravitationem Solem versus, & gravitationem particularum Aeris & vaporum in se mutuo, fieri possit ut Aer in spatiis cœlestibus inque Cometarum caudis non adeo rarescat; perexiguam tamen quantitatem Aeris & vaporum, ad omnia illa caudarum Phænomena abunde sufficere, ex hac computatione perspicuum est. Nam & caudarum insignis raritas colligitur ex astris per eas translucentibus. Atmosphæra terrestris luce Solis splendens, crassitudine sua paucorum milliarium, & astra omnia & ipsam Lunam obscurat & extinguit penitus: per immensam vero caudarum crassitudinem, luce pariter Solari illustratam, astra minima absque claritatis detrimento translucere noscuntur. Neque major esse solet caudarum plurimarum splendor, quam Aeris nostri in tenebroso cubiculo latitudine digiti unius duorumve, lucem Solis in jubare reflectentis.

Quo

Quo temporis spatio vapor a capite ad terminum caudæ ascendit, cognosci fere potest ducendo rectam a termino caudæ ad Solem, & notando locum ubi recta illa Trajectoriam secat. Nam vapor in termino caudæ, si recta ascendat a Sole, ascendere cœpit a capite quo tempore caput erat in loco intersectionis. At vapor non recta ascendit à Sole, sed motum Cometæ, quem ante ascensum suum habebat, retinendo, & cum motu ascensus sui eundem componendo, ascendit oblique. Unde verior erit Problematis solutio, ut recta illa quæ Orbem secat, parallela sit longitudini caudæ, vel potius (ob motum curvilineum Cometæ) ut eadem a linea caudæ divergat. Hoc pacto inveni quod vapor qui erat in termino caudæ *Jan.* 25, ascendere cœperat a capite ante *Dec.* 11, adeoque ascensu suo toto dies plus 45 consumpserat. At cauda illa omnis quæ *Dec.* 10. apparuit, ascenderat spatio dierum illorum duorum, qui a tempore Perihelii Cometæ elapsi fuerant. Vapor igitur sub initio in vicinia Solis celerrime ascendebat, & postea cum motu per gravitatem suam semper retardato ascendere pergebat; & ascendendo augebat longitudinem caudæ: cauda autem quamdiu apparuit ex vapore fere omni constabat qui a tempore Perihelii ascenderat; & vapor, qui primus ascendit, & terminum caudæ composuit, non prius evanuit quam ob nimiam suam tam a Sole illustrante quam ab oculis nostris distantiam videri desiit. Unde etiam caudæ Cometarum aliorum quæ breves sunt, non ascendunt motu celeri & perpetuo à capitibus & mox evanescunt, sed sunt permanentes vaporum & exhalationum columnæ, a capitibus lentissimo multorum dierum motu propagatæ, quæ, participando motum illum capitum quem habuere sub initio, per cœlos una cum capitibus moveri pergunt. Et hinc rursus colligitur spatia cœlestia vi resistendi destitui; utpote in quibus non solum solida Planetarum & Cometarum corpora, sed etiam rarissimi caudarum vapores motus suos velocissimos liberrime peragunt ac diutissime conservant.

Ascensum caudarum ex Atmosphæris capitum & progressum in partes a Sole aversas *Keplerus* adscribit actioni radiorum lucis materiam caudæ secum rapientium. Et auram longe tenuissimam in spatiis liberrimis actioni radiorum cedere, non est a ratione prorsus alienum, non obstante quod substantiæ crassæ, impeditissimis in regionibus nostris, a radiis Solis sensibiliter propelli nequeant. Alius particulas tam leves quam graves dari posse existimat, & materiam caudarum levitare, perque levitatem suam a Sole ascendere.

 dere. Cum autem gravitas corporum terreſtrium ſit ut materia in corporibus, ideoque ſervata quantitate materiæ intendi & remitti nequeat, ſuſpicor aſcenſum illum ex rarefactione materiæ caudarum potius oriri. Aſcendit fumus in camino impulſu Aeris cui innatat. Aer ille per calorem rarefactus aſcendit, ob diminutam ſuam gravitatem ſpecificam, & fumum implicatum rapit ſecum. Quidni cauda Cometæ ad eundem modum aſcenderit a Sole? Nam radii Solares non agitant Media quæ permeant, niſi in reflexione & refractione. Particulæ reflectentes ea actione calefactæ calefacient auram æthercam cui implicantur. Illa calore ſibi communicato rarefiet, & ob diminutam ea raritate gravitatem ſuam ſpecificam qua prius tendebat in Solem, aſcendet & ſecum rapiet particulas reflectentes ex quibus cauda componitur: Ad aſcenſum vaporum conducit etiam quod hi gyrantur circa Solem & ea actione conantur a Sole recedere, at Solis Atmoſphæra & materia cœlorum vel plane quieſcit, vel motu ſolo quem a Solis rotatione acceperint, tardius gyratur. Hæ ſunt cauſæ aſcenſus caudarum in vicinia Solis, ubi Orbes curviores ſunt, & Cometæ intra denſiorem & ea ratione graviorem Solis Atmoſphæram conſiſtunt, & caudas quam longiſſimas mox emittunt. Nam caudæ quæ tunc naſcuntur, conſervando motum ſuum & interea verſus Solem gravitando, movebuntur circa Solem in Ellipſibus pro more capitum, & per motum illum capita ſemper comitabuntur & iis liberrime adhærebunt. Gravitas enim vaporum in Solem non magis efficiet ut caudæ poſtea decidant a capitibus Solem verſus, quam gravitas capitum efficere poſſit ut hæc decidant a caudis. Communi gravitate vel ſimul in Solem cadunt, vel ſimul in aſcenſu ſuo retardabuntur; adeoque gravitas illa non impedit, quo minus caudæ & capita poſitionem quamcunque ad invicem a cauſis jam deſcriptis, aut aliis quibuſcunque, facillime accipiant & poſtea liberrime ſervent.

Caudæ igitur quæ in Cometarum Periheliis naſcuntur, in regiones longinquas cum eorum capitibus abibunt, & vel inde poſt longam annorum ſeriem cum iiſdem ad nos redibunt, vel potius ibi rarefactæ paulatim evaneſcent. Nam poſtea in deſcenſu capitum ad Solem caudæ novæ breviuſculæ lento motu a capitibus propagari debebunt, & ſubinde, in Periheliis Cometarum illorum qui aduſque Atmoſphæram Solis deſcendunt, in immenſum augeri. Vapor enim in ſpatiis illis liberrimis perpetuo rareſcit ac dilatatur. Qua ratione fit ut cauda omnis ad extremitatem ſuperiorem

riorem latior fit quam juxta caput Cometæ. Ea autem rarefactione vaporem perpetuo dilatatum diffundi tandem & spargi per cœlos universos, deinde paulatim in Planetas per gravitatem suam attrahi & cum eorum Atmosphæris misceri, rationi consentaneum videtur. Nam quemadmodum Maria ad constitutionem Terræ hujus omnino requiruntur, idque ut ex iis per calorem Solis vapores copiose satis excitentur, qui vel in nubes coacti decidant in pluviis, & terram omnem ad procreationem vegetabilium irrigent & nutriant; vel in frigidis montium verticibus condensati (ut aliqui cum ratione philosophantur) decurrant in fontes & flumina: sic ad conservationem marium & humorum in Planetis, requiri videntur Cometæ, ex quorum exhalationibus & vaporibus condensatis, quicquid liquoris per vegetationem & putrefactionem consumitur & in terram aridam convertitur, continuo suppleri & refici possit. Nam vegetabilia omnia ex liquoribus omnino crescunt, dein magna ex parte in terram aridam per putrefactionem abeunt, & limus ex liquoribus putrefactis perpetuo decidit. Hinc moles Terræ aridæ indies augetur, & liquores, nisi aliunde augmentum sumerent, perpetuo decrescere deberent, ac tandem deficere. Porro suspicor Spiritum illum, qui Aeris nostri pars minima est sed subtilissima & optima, & ad rerum omnium vitam requiritur, ex Cometis præcipue venire.

Atmosphæræ Cometarum in descensu eorum in Solem, excurrendo in caudas, diminuuntur, & (ea certe in parte quæ Solem respicit) angustiores redduntur: & vicissim in recessu eorum a Sole, ubi jam minus excurrunt in caudas, ampliantur si modo Phænomena eorum *Hevelius* recte notavit. Minimæ autem apparent ubi capita jam modo ad Solem calefacta in caudas maximas & fulgentissimas abiere, & nuclei fumo forsan crassiore & nigriore in Atmosphærarum partibus infimis circundantur. Nam fumus omnis ingenti calore excitatus, crassior & nigrior esse solet. Sic caput Cometæ de quo egimus, in æqualibus a Sole ac Terra distantiis, obscurius apparuit post Perihelium suum quam antea. Mense enim *Decembri* cum stellis tertiæ magnitudinis conferri solebat, at Mense *Novembri* cum stellis primæ & secundæ. Et qui utrumque viderant, majorem describunt Cometam priorem. Nam Juveni cuidam *Cantabrigiensi*, *Novemb.* 19, Cometa hicce luce sua quantumvis plumbea & obtusa, æquabat Spicam Virginis, & clarius micabat quam postea. Et *D. Storer* literis quæ in manus nostras incidere, scripsit caput ejus Mense *Decembri*, ubi caudam

DE MUNDI SYSTEMATE. maximam & fulgentissimam emittebat, parvum esse & magnitudine visibili longe cedere Cometæ, qui Mense *Novembri* ante Solis ortum apparuerat. Cujus rei rationem esse conjectabatur, quod materia capitis sub initio copiosior esset, & paulatim consumeretur.

Eodem spectare videtur quod capita Cometarum aliorum, qui caudas maximas & fulgentissimas emiserunt, apparuerint subobscura & exigua. Nam Anno 1668. *Mart.* 5. St. nov. hora septima vespertina *R. P. Valentinus Estancius*, *Brasiliæ* agens, Cometam vidit Horizonti proximum ad occasum Solis brumalem, capite minimo & vix conspicuo, cauda vero supra modum fulgente, ut stantes in littore speciem ejus e mari reflexam facile cernerent. Speciem utique habebat trabis splendentis longitudine 23 graduum, ab occidente in austrum vergens, & Horizonti fere parallela. Tantus autem splendor tres solum dies durabat, subinde notabiliter decrescens; & interea decrescente splendore aucta est magnitudine cauda. Unde etiam in *Portugallia* quartam fere cœli partem (id est, gradus 45) occupasse dicitur, ab occidente in orientem splendore cum insigni protensa; nec tamen tota apparuit, capite semper in his regionibus infra Horizontem delitescente. Ex incremento caudæ & decremento splendoris manifestum est quod caput a Sole recessit, eique proximum fuit sub initio, pro more Cometæ anni 1680. Et similis legitur Cometa anni 1106, *cujus Stella erat parva & obscura* (ut ille anni 1680) *sed splendor qui ex ea exivit valde clarus & quasi ingens trabs ad Orientem & Aquilonem tendebat*, ut habet *Hevelius* ex *Simeone Dunelmensi* Monacho. Apparuit initio Mensis *Februarii*, circa vesperam, ad occasum Solis brumalem. Inde vero & ex situ caudæ colligitur caput fuisse Soli vicinum. *A Sole*, inquit Matthæus Parisiensis, *distabat quasi cubito uno, ab hora tertia* [rectius sexta] *usque ad horam nonam radium ex se longum emittens.* Talis etiam erat ardentissimus ille Cometa ab *Aristotele* descriptus Lib. I. Meteor. 6. *cujus caput primo die non conspectum est, eo quod ante Solem vel saltem sub radiis solaribus occidisset, sequente vero die quantum potuit visum est. Nam quam minima fieri potest distantia Solem reliquit, & mox occubuit. Ob nimium ardorem* [caudæ scilicet] *nondum apparebat capitis sparsus ignis, sed procedente tempore* (ait Aristoteles) *cum* [cauda] *jam minus flagraret, reddita est* [capiti] *Cometæ sua facies. Et splendorem suum ad tertiam usque cœli partem* [id est, ad 60 gr.] *extendit. Apparuit autem*

tempore

tempore hyberno, & ascendens usque ad cingulum Orionis ibi evanuit. Cometa ille anni 1618, qui è radiis Solaribus caudatissimus emersit, stellas primæ magnitudinis æquare vel paulo superare videbatur, sed majores apparuere Cometæ non pauci qui caudas breviores habuere. Horum aliqui Jovem, alii Venerem vel etiam Lunam æquasse traduntur.

Diximus Cometas esse genus Planetarum in Orbibus valde eccentricis circa Solem revolventium. Et quemadmodum e Planetis non caudatis, minores esse solent qui in Orbibus minoribus & Soli propioribus gyrantur, sic etiam Cometas, qui in Periheliis suis ad Solem propius accedunt, ut plurimum minores esse, ne Solem attractione sua nimis agitent, rationi consentaneum videtur. Orbium vero transversas diametros & revolutionum tempora periodica, ex collatione Cometarum in iisdem Orbibus post longa temporum intervalla redeuntium, determinanda relinquo. Interea huic negotio Propositio sequens lumen accendere potest.

PROPOSITIO XLII. PROBLEMA XXII.

Trajectoriam Cometæ Graphice inventam corrigere.

Oper. 1. Assumatur positio plani Trajectoriæ, per Propositionem superiorem Graphice inventa; & seligantur tria loca Cometæ observationibus accuratissimis definita, & ab invicem quam maxime distantia; sitque A tempus inter primam & secundam, ac B tempus inter secundam ac tertiam. Cometam autem in eorum aliquo in Perigæo versari convenit, vel saltem non longe a Perigæo abesse. Ex his locis apparentibus inveniantur, per operationes Trigonometricas, loca tria vera Cometæ in assumpto illo plano Trajectoriæ. Deinde per loca illa inventa, circa centrum Solis ceu umbilicum, per operationes Arithmeticas, ope Prop. XXI. Lib. I. institutas, describatur Sectio Conica: & ejus areæ, radiis a Sole ad loca inventa ductis terminatæ, sunto D & E; nempe D area inter observationem primam & secundam, & E area inter secundam ac tertiam. Sitque T tempus totum quo area tota D+E, velocitate Cometæ per Prop. XVI. Lib. I. inventa, describi debet.

Oper. 2. Augeatur longitudo Nodorum Plani Trajectoriæ, additis ad longitudinem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur P; & servetur plani illius inclinatio ad planum Eclipticæ. Deinde ex

De Mundi Systemate, prædictis tribus Cometæ locis observatis, inveniantur in hoc novo plano loca tria vera (ut supra:) deinde etiam Orbis per loca illa transiens, & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint d & e, nec non tempus totum t quo area tota $d+e$ describi debeat.

Oper. 3. Servetur Longitudo Nodorum in operatione prima, & augeatur inclinatio Plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, additis ad inclinationem illam 20′ vel 30′, quæ dicantur Q. Deinde ex observatis prædictis tribus Cometæ locis apparentibus, inveniantur in hoc novo Plano loca tria vera, Orbisque per loca illa transiens, ut & ejusdem areæ duæ inter observationes descriptæ, quæ sint δ & ϵ, & tempus totum τ quo area tota $\delta+\epsilon$ describi debeat.

Jam sit C ad 1 ut A ad B, & G ad 1 ut D ad E, & g ad 1 ut d ad e, & γ ad 1 ut δ ad ϵ; sitque S tempus verum inter observationem primam ac tertiam; & signis + & — probe observatis quærantur numeri m & n, ea lege, ut sit $2\,G-2\,C=mG-mg+nG-n\gamma$, & $2\,T-2\,S$ æquale $mT-mt+nT-n\tau$. Et si, in operatione prima, I designet inclinationem plani Trajectoriæ ad planum Eclipticæ, & K longitudinem Nodi alterutrius, erit $I+nQ$ vera inclinatio Plani Trajectoriæ ad Planum Eclipticæ, & $K+mP$ vera longitudo Nodi. Ac denique si in operatione prima, secunda ac tertia, quantitates R, r & ϱ designent Latera recta Trajectoriæ, & quantitates $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ ejusdem Latera transversa respective: erit $R+mr-mR+n\varrho-nR$ verum Latus rectum, & $\frac{1}{L+ml-mL+n\lambda-nL}$ verum Latus transversum Trajectoriæ quam Cometa describit. Dato autem Latere transverso datur etiam tempus periodicum Cometæ. *Q. E. I.*

Cæterum Cometarum revolventium tempora periodica, & Orbium latera transversa, haud satis accurate determinabuntur, nisi per collationem Cometarum inter se, qui diversis temporibus apparent. Si plures Cometæ, post æqualia temporum intervalla, eundem Orbem descripsisse reperiantur, concludendum erit hos omnes esse unum & eundem Cometam, in eodem Orbe revolventem. Et tum demum ex revolutionum temporibus, dabuntur Orbium latera transversa, & ex his lateribus determinabuntur Orbes Elliptici.

In

In hunc finem computandæ sunt igitur Cometarum plurium Trajectoriæ, ex hypothesi quod sint Parabolicæ. Nam hujusmodi Trajectoriæ cum Phænomenis semper congruent quamproxime. Id liquet, non tantum ex Trajectoria Parabolica Cometæ anni 1680, quam cum observationibus supra contuli, sed etiam ex ea Cometæ illius insignis, qui annis 1664 & 1665 apparuit, & ab *Hevelio* observatus fuit. Is ex observationibus suis longitudines & latitudines hujus Cometæ computavit, sed minus accurate. Ex iisdem observationibus, *Halleius* noster loca Cometæ hujus denuo computavit, & tum demum ex locis sic inventis Trajectoriam Cometæ determinavit. Invenit autem ejus Nodum ascendentem in ♊ 21$^{gr.}$ 13'. 55'', Inclinationem Orbitæ ad planum Eclipticæ 21$^{gr.}$ 18' 40'', distantiam Perihelii a Nodo in Orbita 49$^{gr.}$ 27'. 30''. Perihelium in ♌ 8$^{gr.}$ 40'. 30'' cum Latitudine austrina heliocentrica 16$^{gr.}$ 1'. 45''. Cometam in Perihelio *Novemb.* 24^{d}. 11^{h}. 52' P.M. tempore æquato *Londini*, vel 13^{h}. 8' *Gedani*, stylo veteri, & Latus rectum Parabolæ 410286, existente mediocri Terræ a Sole distantia 100000. Quam probe loca Cometæ in hoc Orbe computata, congruunt cum observationibus, patebit ex Tabula sequente ab *Halleio* supputata.

Temp. Appar. *Gedani*	Observata Cometæ distantia	gr. ′ ″	Loca observata.		gr. ′ ″	Loca computata in Orbe. gr. ′ ″
Decemb. 3^{d}. 18^{h}. 29½	a Corde Leonis a Spica Virginis	46 . 24 . 20 22 . 52 . 10	Long. Lat. aust.	♎	7 . 1 . 0 21 . 39 . 0	♎ 7 . 1 . 29 21 . 38 . 50
4 . 18 . 1½	a Corde Leonis a Spica Virginis	46 . 2 . 45 23 . 52 . 40	Long. Lat. a.	♎	6 . 15 . 0 22 . 24 . 0	♎ 6 . 16 . 5 22 . 24 . 0
7 . 17 . 48	a Corde Leonis a Spica Virginis	44 . 48 . 0 27 . 56 . 40	Long. Lat. a	♎	3 . 6 . 0 25 . 22 . 0	♎ 3 . 7 . 33 25 . 21 . 40
17 . 14 . 43	a Corde Leonis ab Humero Orionis dext.	53 . 15 . 15 45 . 43 . 30	Long. Lat. a.	♌	2 . 56 . 0 49 . 25 . 0	♌ 2 . 56 . 0 49 . 25 . 0
19 . 9 . 25	a Procyone a Lucid. Mandib. Ceti	35 . 13 . 50 52 . 56 . 0	Long. Lat. a.	♊	28 . 40 . 30 45 . 48 . 0	♊ 28 . 43 . 0 45 . 46 . 0
20 . 9 . 53½	a Procyone a Lucid. Mandib. Ceti	40 . 49 . 0 40 . 4 . 0	Long. Lat. a.	♊	13 . 3 . 0 39 . 54 . 0	♊ 13 . 5 . 0 39 . 53 . 0
21 . 9 . 9½	ab Hum. dext. Orionis a Lucid. Mandib. Ceti	26 . 21 . 25 29 . 28 . 0	Long. Lat. a.	♊	2 . 16 . 0 33 . 41 . 0	♊ 2 . 18 . 30 33 . 39 . 40
22 . 9 . 0	ab Hum. dext. Orionis a Lucid. Mandib. Ceti	29 . 47 . 0 20 . 29 . 30	Long. Lat. a.	♉	24 . 24 . 0 27 . 45 . 0	♉ 24 . 27 . 0 27 . 46 . 0
26 . 7 . 58	a Lucida Arietis ab Aldebaran	23 . 20 . 0 26 . 44 . 0	Long. Lat. a.	♉	9 . 0 . 0 12 . 36 . 0	♉ 9 . 2 . 28 12 . 34 . 13

Temp. Appar. *Gedani*	Observata Cometæ distantia		Loca observata		Loca computata in Orbe.
d. h. ′		gr. ′ ″		gr. ′ ″	gr. ′ ″
27 . 6 . 45	a Lucida Arietis ab Aldebaran	20 . 45 . 0 28 . 10 . 0	Long. Lat. a.	♉ 7 . 5 . 40 10 . 23 . 0	♉ 7 . 8 . 54 10 . 23 . 13
28 . 7 . 39	a Lucida Arietis a Palilicio	18 . 29 . 0 29 . 37 . 0	Long. Lat. a.	♉ 5 . 24 . 45 8 . 22 . 50	♉ 5 . 27 . 52 8 . 23 . 37
31 . 6 . 45	a Cing. Androm. a Palilicio	30 . 48 . 10 32 . 53 . 30	Long. Lat. a.	♉ 2 . 7 . 40 4 . 13 . 0	♉ 2 . 8 . 20 4 . 16 . 25
Jan. 7 . 7 . 37½	a Cing. Androm. a Palilicio	25 . 11 . 0 37 . 12 . 25	Long. Lat. bor.	♈ 28 . 24 . 47 0 . 54 . 0	♈ 28 . 24 . 0 0 . 58 . 0
25 . 7 . 29	a Palilicio a Cing. Androm.	40 . 5 . 0 20 . 12 . 15	Long. Lat. bor.	♈ 26 . 29 . 15 5 . 25 . 50	♈ 26 . 28 . 50 5 . 26 . 0
Mar. 1 . 8 . 6	Cometa ab *Hookio* prope secundam Arietis observabatur, *Mar.* 1d. 7h. 0′ *Londini*, cum		Long. Lat. bor.	♈ 29 . 17 . 20 8 . 37 . 10	♈ 29 . 18 . 20 8 . 36 . 12

Apparuit hic Cometa per menses tres, signaque fere sex descripsit, & uno die gradus fere viginti confecit. Cursus ejus a circulo maximo plurimum deflexit, in boream incurvatus; & motus ejus sub finem ex retrogrado factus est directus. Et non obstante cursu tam insolito, Theoria a principio ad finem cum observationibus non minus accurate congruit, quam Theoriæ Planetarum cum eorum observationibus congruere solent, ut inspicienti Tabulam patebit. Subducenda tamen sunt minuta duo prima circiter, ubi Cometa velocissimus fuit; id quod fiet auferendo duodecim minuta secunda ab angulo inter Nodum ascendentem & Perihelium, seu constituendo angulum illum 49gr. 27′. 18″. Cometæ utriusque (& hujus & superioris) parallaxis annua insignis fuit, & inde demonstratur motus annuus Terræ in Orbe magno.

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ qui apparuit anno 1683. Hic fuit retrogradus in Orbe cujus planum cum plano Eclipticæ angulum fere rectum continebat. Hujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♍ 23gr. 23′; Inclinatio Orbitæ ad Eclipticam 83gr. 11′; Perihelium in ♊ 25gr. 29′. 30″; Distantia perihelia a Sole 56020, existente radio Orbis magni 100000, & tempore Perihelii *Julii* 2d. 3h. 50′. Loca autem Cometæ in hoc Orbe ab *Halleio* computata, & cum locis a *Flamstedio* observatis collata, exhibentur in Tabula sequente.

1683 Temp.

1683 Temp. Æquat.	Locus Solis.	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obf.	Lat. Bor. Obser.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Jul. 13.12.55	♌ 1. 2.30	♋ 13. 5.42	29.28.13	♋ 13. 6.42	29.28.20	+1. 0	+0. 7
15.11.15	2.53.12	11.37.48	29.34. 0	11.39.43	29.34.50	+1.55	+0.50
17.10.20	4.45.45	10. 7. 6	29.33.30	10. 8.40	29.34. 0	+1.34	+0.30
23.13.40	10.38.21	5.10.27	28.51.42	5.11.30	28.50.28	+1. 3	−1.14
25.14. 5	12.35.28	3.27.53	24.24.47	3.27. 0	28.23.40	−0.53	−1. 7
31. 9.42	18. 9.22	♊ 27.55. 3	26.22.52	♊ 27.54.24	26.22.25	−0.39	−0.27
31.14.55	18.21.53	27.41. 7	26.16.57	27.41. 8	26.14.50	+0. 1	−2. 7
Aug. 2.14.56	20.17.16	25.29.32	25.16.19	25.28.46	25.17.28	−0.46	+1. 9
4.10.49	22. 2.50	23.18.20	24.10.49	23.16.55	24.12.19	−1.25	+1.30
6.10. 9	23.56.45	20.42.23	22.47. 5	20.40.32	22.49. 5	−1.51	+2. 0
9.10.26	26.50.52	16. 7.57	20. 6.37	16. 5.55	20. 6.10	−2. 2	−0.27
15.14. 1	♍ 2.47.13	3.30.48	11.37.33	3.26.18	11.32. 1	−4.30	−5.32
16.15. 0	3.48. 2	0.43. 7	9.34.16	0.41.55	9.34.13	−1.12	−0. 3
18.15.44	5.45.33	♉ 24.52.53	5.11.15 Austr.	♉ 24.49. 5	5. 9.11 Austr.	−3.48	−2. 4
22.14.44	9.35.49	11. 7.14	5.16.53	11. 7.12	5.16.50	−0. 2	−0. 3
23.15.52	10.36.48	7. 2.18	8.17. 9	7. 1.17	8.16.41	−1. 1	−0.28
26.16. 2	13.31.10	♈ 24.45.31	16.38. 0	♈ 24.44. 0	16.38.20	−1.31	+0.20

Confirmatur etiam Theoria per motum Cometæ retrogradi qui apparuit anno 1682. Hujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 21 gr. 16′. 30″. Inclinatio Orbitæ ad planum Eclipticæ 17 gr. 56′ 0″. Perihelium in ♒ 2 gr. 52′. 50″. Distantia perihelia a Sole 58328. Et tempus æquatum Perihelii *Sept.* 4^d. 7^h. 39′. Loca vero ex observationibus *Flamstedii* computata, & cum locis per Theoriam computatis collata, exhibentur in Tabula sequente.

1682 Temp. Appar.	Locus Solis.	Cometæ Long. Comp.	Lat. Bor. Comp.	Cometæ Long. Obf.	Lat. Bor. Observ.	Differ. Long.	Differ. Lat.
d. h. ′	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	gr. ′ ″	′ ″	′ ″
Aug. 19.16.38	♍ 7. 0. 7	♌ 18.14.28	25.50. 7	♌ 18.14.40	25.49.55	−0.12	+0.12
20.15.38	7.55.52	24.46.23	26.14.42	24.46.22	26.12.52	+0. 1	+1.50
21. 8.21	8.36.14	29.37.15	26.20. 3	29.38. 2	26.17.37	−0.47	+2.26
22. 8. 8	9.33.55	♍ 6.29.53	26. 8.42	♍ 6.30. 3	26. 7.12	−0.10	+1.30
29. 8.20	16.22.40	♎ 12.37.54	18.37.47	♎ 12.37.49	18.34. 5	+0. 5	+3.42
30. 7.45	17.19.41	15.36. 1	17.26.43	15.35.18	17.27.17	+0.43	−0.34
Sept. 1. 7.33	19.16. 9	20.30.53	15.13. 0	20.27. 4	15. 9.49	+3.49	+3.11
4. 7.22	22.11.28	25.42. 0	12.23.48	25.40.58	12.22. 0	+1. 2	+1.48
5. 7.32	23.10.29	27. 0.46	11.33. 8	26.59.24	11.33.51	+1.22	−0.43
8. 7.16	26. 5.58	29.58.44	9.26.46	29.58.45	9.26.43	−0. 1	+0. 3
9. 7.26	27. 5. 9	♏ 0.44.10	8.49.10	♏ 0.44. 4	8.48.25	+0. 6	+0.45

His exemplis abunde satis manifestum est, quod motus Cometarum per Theoriam a nobis expositam non minus accurate exhibentur,

hibentur, quam solent motus Planetarum per eorum Theorias. Et propterea Orbes Cometarum per hanc Theoriam enumerari possunt, & tempus periodicum Cometæ in quolibet Orbe revolventis tandem sciri, & tum demum Orbium Ellipticorum latera transversa & Apheliorum altitudines innotescent.

Cometa retrogradus qui apparuit anno 1607, descripsit Orbem cujus Nodus ascendens (computante *Halleio*) erat in ♉ 20$^{gr.}$ 21′. Inclinatio plani Orbis ad planum Eclipticæ erat 17$^{gr.}$ 2′. Perihelium erat in ♒ 2$^{gr.}$ 16′, & distantia perihelia a Sole erat 58680, existente radio Orbis magni 100000. Et Cometa erat in Perihelio *Octob.* 16^{d}. 3^{h}. 50′. Congruit hic Orbis quamproxime cum Orbe Cometæ qui apparuit anno 1682. Si Cometæ hi duo fuerint unus & idem, revolvetur hic Cometa spatio annorum 75, & axis major Orbis ejus erit ad axem majorem Orbis magni, ut $\sqrt{c}: 75 \times 75$ ad 1, seu 1778 ad 100 circiter. Et distantia aphelia Cometæ hujus a Sole, erit ad distantiam mediocrem Terræ a Sole, ut 35 ad 1 circiter. Quibus cognitis, haud difficile fuerit Orbem Ellipticum Cometæ hujus determinare. Atque hæc ita se habebunt si Cometa spatio annorum septuaginta quinque, in hoc Orbe posthac redierit. Cometæ reliqui majori tempore revolvi videntur & altius ascendere.

Cæterum Cometæ, ob magnum eorum numerum, & magnam Apheliorum a Sole distantiam, & longam moram in Apheliis, per gravitates in se mutuo nonnihil turbari debent, & eorum eccentricitates & revolutionum tempora nunc augeri aliquantulum, nunc diminui. Proinde non est expectandum ut Cometa idem, in eodem Orbe & iisdem temporibus periodicis, accurate redeat. Sufficit si mutationes non majores obvenerint, quam quæ a causis prædictis oriantur.

Et hinc ratio redditur cur Cometæ non comprehendantur Zodiaco (more Planetarum) sed inde migrent & motibus variis in omnes cœlorum regiones ferantur. Scilicet eo fine, ut in Apheliis suis ubi tardissime moventur, quam longissime distent ab invicem & se mutuo quam minime trahant. Qua de causa Cometæ qui altius descendunt, adeoque tardissime moventur in Apheliis, debent altius ascendere.

Cometa qui anno 1680 apparuit, minus distabat a Sole in Perihelio suo quam parte sexta diametri Solis; & propter summam velocitatem in vicinia illa, & densitatem aliquam Atmosphæræ Solis, resistentiam nonnullam sentire debuit, & aliquantulum retardari,

dari & propius ad Solem accedere: & singulis revolutionibus accedendo ad Solem, incidet is tandem in corpus Solis. Sed & in Aphelio ubi tardissime movetur, aliquando per attractionem aliorum Cometarum retardari potest & subinde in Solem incidere. Sic etiam Stellæ fixæ quæ paulatim expirant in lucem & vapores, Cometis in ipsas incidentibus refici possunt, & novo alimento accensæ pro Stellis Novis haberi. Vapores autem qui ex Sole & Stellis fixis & caudis Cometarum oriuntur, incidere possunt per gravitatem suam in Atmosphæras Planetarum, & ibi condensari & converti in aquam & spiritus humidos, & subinde per lenium calorem in sales, & sulphura, & tincturas, & limum, & lutum, & argillam, & arenam, & lapides, & coralla, & substantias alias terrestres paulatim migrare. Decrescente autem corpore Solis motus medii Planetarum circum Solem paulatim tardescent, & crescente Terra motus medius Lunæ circum Terram paulatim augebitur. Et collatis quidem observationibus Eclipsium *Babylonicis* cum iis *Albategnii* & cum hodiernis, *Halleius* noster motum medium Lunæ cum motu diurno Terræ collatum, paulatim accelerari, primus omnium quod sciam deprehendit.

SCHOLIUM GENERALE.

Hypothesis Vorticum multis premitur difficultatibus. Ut Planeta unusquisque radio ad Solem ducto areas describat tempori proportionales, tempora periodica partium Vorticis deberent esse in duplicata ratione distantiarum a Sole. Ut periodica Planetarum tempora sint in proportione sesquiplicata distantiarum a Sole, tempora periodica partium Vorticis deberent esse in eadem distantiarum proportione. Ut Vortices minores circum Saturnum, Jovem & alios Planetas gyrati conserventur & tranquille natent in Vortice Solis, tempora periodica partium Vorticis Solaris deberent esse æqualia. Revolutiones Solis & Planetarum circum axes suos ab omnibus hisce proportionibus discrepant. Motus Cometarum sunt summe regulares, & easdem leges cum Planetarum motibus observant, & per Vortices explicari nequeunt. Feruntur Cometæ motibus valde eccentricis in omnes cœlorum partes, quod fieri non potest nisi Vortices tollantur.

Projectilia, in aere nostro, solam aeris resistentiam sentiunt. Sublato aere, ut fit in Vacuo *Boyliano*, resistentia cessat, siquidem pluma tenuis & aurum solidum æquali cum velocitate in hoc

Vacuo cadunt. Et par est ratio spatiorum cœlestium quæ sunt supra atmosphæram Terræ. Corpora omnia in istis spatiis liberrime moveri debent; & propterea Planetæ & Cometæ in orbibus specie & positione datis, secundum leges supra expositas, perpetuo revolvi. Perseverabunt quidem in orbibus suis per leges gravitatis, sed regularem orbium situm primitus acquirere per leges hasce minime potuerunt.

Planetæ sex principales revolvuntur circum Solem in circulis Soli concentricis, eadem motus directione, in eodem plano quamproxime. Lunæ decem revolvuntur circum Terram, Jovem & Saturnum in circulis concentricis, eadem motus directione, in planis orbium Planetarum quamproxime. Et hi omnes motus regulares originem non habent ex causis Mechanicis; siquidem Cometæ in Orbibus valde eccentricis, & in omnes cœlorum partes libere feruntur. Quo motus genere Cometæ per Orbes Planetarum celerrime & facillime transeunt, & in Apheliis suis ubi tardiores sunt & diutius morantur, quam longissime distant ab invicem, & se mutuo quam minime trahunt. Elegantissima hæcce Solis, Planetarum & Cometarum compages non nisi consilio & dominio Entis intelligentis & potentis oriri potuit. Et si Stellæ fixæ sint centra similium systematum; hæc omnia simili consilio constructa, suberunt *Unius* dominio: præsertim cum lux Fixarum sit ejusdem naturæ ac lux Solis, & systemata omnia lucem in omnia invicem immittant.

Hic omnia regit, non ut Anima mundi, sed ut universorum Dominus; & propter dominium suum Dominus Deus * παντοκράτωρ dici solet. Nam *Deus* est vox relativa & ad servos refertur: & *Deitas* est dominatio Dei non in corpus proprium, (uti sentiunt quibus Deus est Anima Mundi) sed in servos. *Deus summus* est Ens æternum, infinitum, absolute perfectum; sed Ens utcunque perfectum sine dominio, non est *Dominus Deus*. Dicimus enim *Deus meus*, *Deus vester*, *Deus Israelis*: sed non dicimus *Æternus meus*, *Æternus vester*, *Æternus Israelis*; non dicimus *Infinitus meus*, *Infinitus vester*, *Infinitus Israelis*; non dicimus *Perfectus meus*, *Perfectus vester*, *Perfectus Israelis*. Hæ appellationes relationem non habent ad servos. Vox *Deus* passim significat *Dominum*, sed omnis Dominus non est Deus. Dominatio Entis spiritualis *Deum* constituit, vera verum, summa summum, ficta fictum. Et ex dominatione vera sequitur, Deum verum esse vivum, intelligentem & potentem; ex reliquis perfectionibus summum esse.

* Id est, *Imperator universalis*.

esse vel summe perfectum. *Æternus* est & *Infinitus*, *Omnipotens* & *Omnisciens*, id est, durat ab æterno in æternum & adest ab infinito in infinitum, omnia regit & omnia cognoscit quæ fiunt aut sciri possunt. Non est æternitas vel infinitas, sed æternus & infinitus; non est duratio vel spatium, sed durat & adest. Durat semper & adest ubique, & existendo semper & ubique durationem & spatium, æternitatem & infinitatem constituit. Cum unaquæque spatii particula sit *semper*, & unumquodque durationis indivisibile momentum *ubique*; certe rerum omnium Fabricator ac Dominus non erit *nunquam nusquam*. Omnipræsens est non per *virtutem* solam, sed etiam per *substantiam*; nam virtus sine substantia subsistere non potest. In ipso * continentur & moventur universa, sed absque mutua *passione*. Deus nihil patitur ex corporum motibus: illa nullam sentiunt resistentiam ex omnipræsentia Dei. Deum summum necessario existere in confesso est: Et eadem necessitate *semper* est & *ubique*. Unde etiam totus est sui similis, totus oculus, totus auris, totus cerebrum, totus brachium, totus vis sentiendi, intelligendi & agendi; sed more minime humano, more minime corporeo, more nobis prorsus incognito. Ut cæcus ideam non habet colorum, sic nos ideam non habemus modorum quibus Deus sapientissimus sentit & intelligit omnia. Corpore omni & figura corporea prorsus destituitur, ideoque videri non potest, nec audiri, nec tangi, nec sub specie rei alicujus corporeæ coli debet. Ideas habemus attributorum ejus, sed quid sit rei alicujus Substantia minime cognoscimus. Videmus tantum corporum figuras & colores, audimus tantum sonos, tangimus tantum superficies externas, olfacimus odores solos, & gustamus sapores; Intimas substantias nullo sensu, nulla actione reflexa cognoscimus, & multo minus ideam habemus substantiæ Dei. Hunc cognoscimus solummodo per proprietates suas & attributa, & per sapientissimas & optimas rerum structuras, & causas finales; veneramur autem & colimus ob dominium. Deus enim sine dominio, providentia, & causis finalibus, nihil aliud est quam Fatum & Natura. Et hæc de Deo; de quo utique ex Phænomenis disserere, ad *Philosophiam Experimentalem* pertinet.

* Ita sentiebant veteres, *Aratus* in Phænom. sub initio. *Paulus* in Act. 7. 27. 28. *Moses* Deut. 4. 39. & 10. 14. *David* Psal. 139. 7, 8 *Solomon* 1. Reg. 8. 27. *Job.* 22. 12. *Jeremias* Propheta 23. 23, 24.

Hactenus Phænomena cœlorum & maris nostri per Vim gravitatis exposui, sed causam Gravitatis nondum assignavi. Oritur utique hæc Vis a causa aliqua quæ penetrat ad usque centra Solis

& Planetarum, sine virtutis diminutione; quæque agit non pro quantitate *superficierum* particularum in quas agit (ut solent causæ Mechanicæ,) sed pro quantitate materiæ *solidæ*; & cujus actio in immensas distantias undique extenditur, decrescendo semper in duplicata ratione distantiarum. Gravitas in Solem componitur ex gravitatibus in singulas Solis particulas, & recedendo a Sole decrescit accurate in duplicata ratione distantiarum ad usque orbem Saturni, ut ex quiete Apheliorum Planetarum manifestum est, & ad usque ultima Cometarum Aphelia, si modo Aphelia illa quiescant Rationem vero harum Gravitatis proprietatum ex Phænomenis nondum potui deducere, & Hypotheses non fingo. Quicquid enim ex Phænomenis non deducitur, *Hypothesis* vocanda est; & Hypotheses seu Metaphysicæ, seu Physicæ, seu Qualitatum occultarum, seu Mechanicæ, in *Philosophia Experimentali* locum non habent. In hac Philosophia Propositiones deducuntur ex Phænomenis, & redduntur generales per Inductionem. Sic impenetrabilitas, mobilitas, & impetus corporum & leges motuum & gravitatis innotuerunt. Et satis est quod Gravitas revera existat, & agat secundum leges a nobis expositas, & ad corporum cœlestium & maris nostri motus omnes sufficiat.

Adjicere jam liceret nonnulla de Spiritu quodam subtilissimo corpora crassa pervadente, & in iisdem latente, cujus vi & actionibus particulæ corporum ad minimas distantias se mutuo attrahunt, & contiguæ factæ cohærent; & corpora Electrica agunt ad distantias majores, tam repellendo quam attrahendo corpuscula vicina; & Lux emittitur, reflectitur, refringitur, inflectitur, & corpora calefacit; & Sensatio omnis excitatur, & membra Animalium ad voluntatem moventur, vibrationibus scilicet hujus Spiritus per solida nervorum capillamenta ab externis sensuum organis ad cerebrum & a cerebro in musculos propagatis. Sed hæc paucis exponi non possunt; neque adest sufficiens copia Experimentorum, quibus leges actionum hujus Spiritus accurate determinari & monstrari debent.

F I N I S.

I N-

INDEX RERUM

ALPHABETICUS.

N. B. *Citationes factæ sunt ad normam sequentis Exempli.* III, 10: 444, 20: 471, 28 *designant Libri tertii Propositionem decimam: Paginæ 444[tæ] lineam 20[am]: Paginæ 471[mæ] lineam 28[am].*

Motus

P. Para-

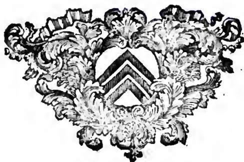
P.

Q.

R.

Veloci-

F I N I S.



ANALYSIS

Per Quantitatum

SERIES, FLUXIONES,

AC

DIFFERENTIAS:

CUM

Enumeratione Linearum

TERTII ORDINIS.



AMSTÆLODAMI,

SUMPTIBUS SOCIETATIS.

M. D. CCXXIII.



PRÆFATIO EDITORIS.

*T*Ractatus aliquot Mathematicos Viri Illustrissimi D. Newtoni in lucem edimus, quorum primus & ultimus nunc primum prodeunt, reliqui vero vel à se vel ab aliis ante hac publici juris facti sunt. Hæc autem Editio casui, sed tamen non sine ipsius consensu prius impetrato, ortum acceptum refert.*

Etenim secundus jam agitur annus ex quo scrinia D. Collinsii *(qui, uti notum est, amplissimum cum sui seculi Mathematicis commercium habuit) meas in manus inciderunt; & in illis plurima reperi à cunctis fere totius* Europæ *eruditis ipsi communicata; & inter ea non pauca, quæ à Viro Cl.* D. Newtono *scripta fuerunt; quæ cum tantæ molis essent, ut simul Tractatum breviusculum possent conficere, cæpi de iis edendis cogitare. Quum autem animadvertissem scripta ejus quæ jam in lucem prodierunt ferme idem cum hisce argumentum habere, haud operæ pretium me facturum, si typis mandarem, existimavi.*

Unus tamen erat brevis de Curvarum Quadratura Tractatus adeo luculenter & concinne scriptus, atque ita accommodatus ad instituendos eos, qui nondum totam istam Metho-

dum perspectam habeant, ut abstinere non potuerim, quominus Auctoris licentiam eundem edendi peterem. Quam Ille non solum summa cum humanitate concessit; sed & insuper veniam dedit reliqua ipsius colligendi, quæ ad idem argumentum spectabant.

Hicce Tractatus, quem D. Collinsii *manu exaratum comperi, inscriptus fuit* De Analysi per Æquationes Infinitas, *& licet neque Auctoris nomen, neque tempus quo scriptus fuerat ullibi comparuerit; multa tamen continere ad D.* Newtoni *Methodos spectantia statim agnovi, utpote Epistolarum autographo illi ad amussim respondentia, quod antea ipse D.* Newtonus *ad D.* Oldenburgum *miserat. Unde suspicabar totum ex eodem fonte emanasse; nihilominus suspenso eram animo, usque dum inventis, inter easdem chartas, Epistolis aliquot D.* Barrovii *ad D.* Collinsium *scriptis; tres reperi ad hunc Tractatum immediate spectantes; ex quibus facile intellexi quomodo D.* Collinsius *eum obtinuerat.*

In una Epistolarum e Collegio S. S. Tr. data 20 Julii *1669, versus finem D.* Barrovius *hæc scribit.*

* Amicus quidam apud nos commorans, qui eximio in ,, his rebus pollet ingenio, nudiustertius chartas quasdam mihi tradidit, in quibus Magnitudinum dimensiones supputandi Methodos, *Mercatoris* methodo similes, maxime vero Generales, descripsit, simulque Æ- ,, qua-

* A Friend of mine here, that hath an excellent Genius to these things, brought me the other Day, some Papers, wherein he hath set down Methods of Calculating the Dimensions of Magnitudes, like that of Mr. *Mercator*, but very general, as also of Resolving Equations, which I suppose will please you, and I shall send you them by the next.

,, quationes resolvendi, quæ, ut opinor, tibi placebunt, quas una cum proximis literis ad te mittam.

In hac Epistola narrat argumentum chartarum Amici sui fuisse Computationem dimensionum Magnitudinum, & Æquationum resolutionem, quod cum Tractatus hujus argumento quadrat.

Versus finem alterius Epistolæ ad D. Collinsium *e Collegio S. S. Tr. datæ ult.* Julii 1669, *D.* Barrovius *ita scribit.*

† Mitto quas pollicitus eram Amici chartas, quæ uti
,, spero haud parum te oblectabunt. Remittas, quæso,
,, quum eas quantum tibi visum fuerit perlegeris; id enim
,, postulavit Amicus meus, cum primum eum rogavi, ut
,, eas tecum communicare mihi liceret. Quantocyus igi-
,, tur, obsecro, te eas recepisse fac me certiorem, quod
,, illis metuo, quippe qui eas per Veredarium publicum
,, ad te mittere non dubitaverim, quo tibi morem gere-
,, rem quam citissime.

Ex hac Epistola constat D. Barrovium *dictum Librum misisse, ea lege, ut sibi remitteretur. Unde manifestum est, quare Tractatus, quem inveni, D.* Collinsii *manu scriptus fuit, autographo nempe ipsi Auctori restituto.*

In tertia a D. Barrovio *ad D.* Collinsium *Epistola da-*

† I send you the Papers of my Friend I promis'd, which I presume will give you much satisfaction; I pray, having perused them so much as you think good, remand them to me, according to his desire when I ask'd him the liberty to impart them to you; I pray give me notice of your receiving them, with your soonest convenience, that I may be satisfied of their reception; because I am afraid of them, venturing them by the Post, that I may not longer delay to correspond with your desire.

ta 20 Augusti 1669, *constat D.* Newtonum *fuisse*, *Amicum illum*, *de quo D.* Barrovius *in duabus prioribus Epistolis mentionem fecerat*, *quod his verbis consignat.*

* Amici chartas tibi placuisse gaudeo; est illi nomen
„ *Newtonus*, Collegii nostri Socius, & juvenis, (secun-
„ dus enim, ex quo Artium Magistri gradum cepit, jam
„ agitur annus,) & qui, eximio quo est acumine, per-
„ magnos in hac re progressus fecit. Illas, si vis, cum
„ Nobili Domino Vicecomite *Brounkero* communica.

Perspecto jam D. Newtonum *hujus Tractatus Auctorem esse*; *ab eo sciscitatus sum num penes se adhuc esset autographum*, *quod quidem ille exquirens invenit*, *& mihi tradidit*, *cum exemplari* Collinsiano *ad verbum usque conveniens.*

Etiamsi vero hic Tractatus ad D. Collinsium *missus fuisset mense* Julii 1669, *quod aliquantulum erat posteaquam D.* Mercator *Logarithmotechniam suam in lucem ediderat*; *manifestum est ex quibusdam aliis Epistolis*, (*quæ itidem inter D.* Collinsii *chartas fuerunt*,) *quod antea scriptus esset*, *imo quod D.* Newtonus *invenisset Methodum investigandi Magnitudinum Dimensiones per Infinitas Series vel aliquot annos antequam D.* Mercator *Librum suum in vulgus edidit*; *ut liquet ex Epistola a* Collinsio *ad* D. Jacobum Gregorium *data* 25. Novemb. 1669, *ubi hæc sunt verba.*

* *Bar-*

* I am glad my Friend's Paper gives you so much satisfaction; his Name is Mr. *Newton*; a Fellow of our College, and very young, (being but the second Year Master of Arts,) but of an extraordinary Genius and Proficiency in these things; you may impart the Papers, if you please, to my Lord *Brounker*.

* *Barrovius* Provinciam suam Publice prælegendi remi-
,, sit cuidam nomine *Newtono Cantabrigiensi*, quem tan-
,, quam Virum acutissimi ingenii, in Præfatione Prælec-
,, lectionum Opticarum memorat, & qui, antequam
,, ederetur *Mercatoris* Logarithmotechnia, Methodum
,, invenerat eandem, eamque ad omnes Curvas generali-
,, ter, & ad Circulum diversimode applicârat.

Quinetiam D. Collinsius *in Epistola ad D.* Strode, *data* 26. Julii 1672, *sic scribit.*

† Mense *Septembri* 1668, *Mercator* Logarithmotech-
,, niam edidit suam, quæ specimen hujus Methodi (i. e.
,, Serierum Infinitarum) in unica tantum Figura, nempe,
,, Quadratura Hyperbolæ continet. Haud multo post-
,, quam in publicum prodiret liber, exemplar unum Cl.
,, *Wallisio Oxoniam* misi, qui suum de eo judicium in *Ac-*
,, *tis Philosophicis* statim fecit: alterum *Barrovio Canta-*
,, *brigiam*, qui quasdam *Newtoni* chartas, qui jam *Bar-*
,, *rovium* in Mathematicis Prælectionibus publicis excipit,
,, extemplo remisit: Ex quibus & aliis, quæ olim ab
,, Auc-

* Mr. *Barrow* hath resign'd his Lecture's Place to one Mr. *Newton* of *Cambridge*, whom he mentions in his Optic Preface as a very ingenious Person; one who hath, before Mr. *Mercator's* Logarithmotechnia was extant, invented the same Method, and applied it generally to all Curves, and divers ways to the Circle.

† In *September* 1668. Mr. *Mercator* publish'd his Logarithmotechnia, containing a Specimen of this Method, (that is, of Infinite Series) in one only Figure, to wit in the Quadrature of the Hyperbola. Not long after the Book came out, I sent one of them to Dr. *Wallis* at *Oxford*, who forthwith gave his sense of it in the Philos. Transactions: another of them I sent to Dr. *Barrow* at *Cambridge*, who forthwith sent me up some Papers of Mr. *Newton*, who is since become the Doctor's Successor in the Mathematical Lectures there. By which, and former communications made thereof from the Author to the Doctor, it appears that the said Method was invented some Years before by the said Mr. *Newton*, and generally applied: so that thereby in any Curvilinear Figure propos'd, that is determin'd by one or more common Properties, by the same Method may be obtain'd the Quadrature or Area of the said Figure, accurately when it can be done, but always infinitely near; the Evolution, or Length of the said Curve Line; the Centre of the Figure; its round Solids made by Rotation, and their Surfaces; and all perform'd without any Extraction of Roots.

,, Auctore cum *Barrovio* communicata fuerant, patet il-
,, lam Methodum a dicto *Newtono* aliquot annis ante ex-
,, cogitatam, & modo generali applicatam fuisse: ita ut
,, ejus ope in quavis Figura Curvilinea proposita, quæ
,, una vel pluribus Proprietatibus definitur, Quadratura
,, vel Area dictæ Figuræ, accurata si possibile sit, sin mi-
,, nus infinite propinqua; Evolutio vel Longitudo lineæ
,, Curvæ; Centrum gravitatis Figuræ; Solida ejus rota-
,, tione genita, & eorum Superficies; sine ulla Radicum
,, Extractione obtineri queant.

Ubi obiter notemus in hac Collinsii *historiola*, *methodum argumentandi usurpatam a D.* Newtono *in Tractatu suo* De Quadratura Curvarum, *quasi digito monstrari*, *dum dicit hanc Methodum exhibere Quadraturam Figurarum accuratam*, *si modo fieri possit*, *sin minus in infinitum approximantem*, *atque ista omnia fieri sine ulla Extractione Radicum*; *Hæc enim ipsa est argumentatio in dicto Tractatu observata*: *& propterea hanc Methodum saltem Anno* 1672 *coætaneam extitisse non est dubitandum.*

Inveni etiam in exemplari Epistolæ, *à D.* Collinsio *ad D.* Davidem Gregorium *prædicti* Jacobi *fratrem*, *datæ* 11 Aug. 1676, *præter eadem fere quæ D.* Strode *scripserat*, *etiam verba sequentia.*

* ,, Supradicta Serierum Infinitarum doctrina, a *Newtono*
,, biennium ante excogitata fuit, quam ederetur *Mercato-
ris*

* The said Doctrine of Infinite Series was invented by Mr. *Newton*, about two Years before the Publication of Mr. *Mercator*'s Logarithmotechnia, and generally applied to all Curves.

„ *ris* Logarithmotechnia, & generaliter omnibus Figuris
„ applicata.

Simulque affirmat se olim cum quibusdam Academicis Parisiensibus *hæc eadem scripto communicasse.*

Quapropter, cum D. Mercator *Librum suum Anno* 1668 *in lucem ediderit, sequitur eandem Doctrinam Infinitarum Serierum Figuris omnibus generaliter applicatam fuisse Anno* 1666.

Denique in Epistola, circa idem tempus ad D. Oldenburgum *scripta, asserit* Collinsius, *Jacobum Gregorium* non nisi conspecta aliqua e Seriebus *Newtoni*, quam illi impertierat, in eandem Serierum Methodum incidisse.

Ex Newtoni *autem Schedis quibusdam a me visis intellexi, quod is Quadraturam Circuli, Hyperbolæ, & aliarum quarundam Curvarum per Series Infinitas ex* Wallisii *nostri* Arithmetica Infinitorum, *per Interpolationem Serierum ejus, primo deduxit, idque Anno* 1665; *deinde Methodum excogitavit easdem Series per Divisiones & Extractiones Radicum inveniendi, quam Anno sequente generalem reddidit.*

Et cum scriptus fuerit hic Tractatus, quo tempore hæc recens inventa essent, ideo Cl. Auctor dignatus est multa in eo dilucidare, ad Resolutionem Æquationum per Infinitas Series spectantia, quæ in aliis Libris frustra quæras.

His subjunximus diversa Epistolarum Auctoris fragmenta, quæ ad easdem Doctrinas pertinent, quæque olim inter Cl.

Wallisii *Opera in lucem prodiere. Epistolas haud dedi integras, ut evitarem repetitionem non necessariam multarum rerum, quæ supra in Tractatu* De Analysi per Æquationes Infinitas *traditæ sunt: Quinimo Exempla quædam in iis Epistolis prætermisi ipsius Cl. Auctoris monitu; Regulas suas per se satis claras esse credentis, neque ullam dilucidationem desiderare.*

Inter D. Collinsii *schedas reperi autographum Epistolæ datæ* 8. Novemb. 1676, *cujus fragmentum sub finem adjeci, & dignum luce putavi; quoniam in eo memoratur solutio Problematis admodum generalis in Comparatione Curvarum usûs, quæ perficitur in Cor.* 2. *Prop.* 10. *Tract.* De Quadratura Curvarum: *Unde Lector intelligat solutionem illam Auctori jam tum innotuisse.*

Hisce Fragmentis annexus est ille ipse Tractatus De Quadratura Curvarum; *una cum altero* De Enumeratione Linearum Tertii Ordinis; *quorum uterque primum typis mandatus est Anno* 1704, *ad finem* Optices *eximiæ ejusdem Cl. Auctoris.*

Coronidis loco subjicitur Tractatulus, cui titulo est, Methodus Differentialis, *quem Cl. Auctoris permissu ex ejus autographo descripsi; Complectitur autem Doctrinam describendi Curvas ex datis Differentiis differentiarum Ordinatarum. Hæc* Methodus Differentialis *innititur Problemati ducendi Curvam Parabolici generis per data quotcunque puncta; de quo Cl. Auctor olim mentionem fecerat in Epistola sua ad D.* Oldenburgum 1676 *missa; & cujus solutionem dedit in Lem.* 5. *Lib.* 3. Princip. Philos. *non tamen prorsus eandem*

quoad

quoad Constructionem cum ea quam impræsentiarum tradimus.

Hujus Geometriæ Newtonianæ *non minimam esse laudem duco, quod dum per limites Rationum Primarum & Ultimarum argumentatur, æque demonstrationibus Apodicticis ac illa Veterum munitur; utpote quæ haud innititur duriusculæ illi Hypothesi quantitatum Infinite parvarum vel Indivisibilium, quarum Evanescentia obstat quominus eas tanquam quantitates speculemur. Neque parum præcellere videtur, quod tam paucis innixa Propositionibus tam late sese extendat hæc Mathesis, intra se omnia Problemata difficiliora vulgatas Methodos eludentia complectens; siquidem quicquid proponitur poterit Geometrice per alicujus Curvæ Aream effingi; vel per Methodum Universalem Extrahendi Radices ex Æquatione quavis erui; vel ad summum, ducendo Curvam per terminos quantitatum datarum solvi.*

W. JONES.

INDEX

INDEX OPUSCULORUM

Quæ in hoc Libro continentur.



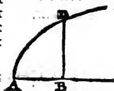
DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum

INFINITAS.

M*Ethodum generalem quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.*

BASI *AB* Curvæ alicujus *AD*, sit Applicata *BD* perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint *a*, *b*, *c*, &c. Quantitates datæ, & *m*, *n*, Numeri Integri. Deinde,



Curvarum Simplicium Quadratura.

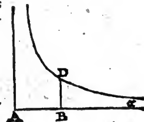
REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ = *Areæ ABD.*

Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 (=1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a=1=n$, & $m=2$; Erit $\frac{1}{3}x^3=$ ABD.
2. Si $4\sqrt{x}\ (=4x^{\frac{1}{2}}) = y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\ (=\frac{8}{3}\sqrt{x^3}) =$ ABD.
3. Si $\sqrt[3]{x^5}\ (=x^{\frac{5}{3}}) = y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\ (=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}) =$ ABD.
4. Si $\frac{1}{x^2}\ (=x^{-2}) = y$, id est, si $a=1=n$, & $m=-2$;

Erit $(-\frac{1}{1}x^{\frac{-1}{1}} =) -x^{-1}\ (= \frac{-1}{x}) = \alpha$BD, infinite versus α protensæ, quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.



5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}}\ (= x^{\frac{-3}{2}}) = y$; Erit $(-\frac{2}{1}x^{\frac{-1}{2}} =) \frac{-2}{\sqrt{x}}$ = BDα.
6. Si $\frac{1}{x}\ (=x^{-1}) = y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0}$ = Infinitæ, qualis est Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.

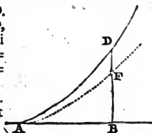
Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REGULA II.

Si valor ipsius y *ex pluribus istiusmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ a singulis Terminis emanant.*

Exempla Prima.

Si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ = ABD. Etenim si semper sit x^2=BF, & $x^{\frac{3}{2}}$=FD, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3$= superficiei AFB descriptæ per Lineam BF, & $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ = AFD descriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ = toti ABD.

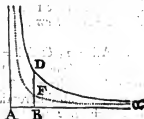


Sic si $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$=ABD.
Et si $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$; Erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5$=ABD.

Ex-

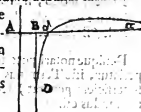
Exempla Secunda.

Si $x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha BD$. Vel si $x^{-2}-x^{-\frac{3}{2}}=y$; Erit $-x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha BD$.



Quarum signa si mutaveris habebis Affirmativum valorem ($x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}$ vel $x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}$) superficiei αBD, modo tota cadat supra basim $AB\alpha$.

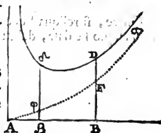
Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cum Curva decussat suam Basin inter B & α, ut hic vides in δ,) ista parte a parte superiori subducta, habebis valorem Differentiæ: Earum vero Summam si cupis, quære utramque Superficiem seorsim, & adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.



Exempla Tertia.

Si $x^{2}+x^{-2}=y$; Erit $\frac{1}{3}x^{3}-x^{-1}$ = Superficiei descriptæ. Sed hic notandum est, quod dictæ Superficiei partes sic inventæ jacent ex diverso latere Lineæ BD.

Nempe, posito $x^{2}=BF$, & $x^{-2}=FD$; Erit $\frac{1}{3}x^{3}=ABF$ Superficiei per BF descriptæ, & $-x^{-1}=DF\alpha$ Superficiei descriptæ per DF.



Et hoc semper accidit cum Indices $\left(\frac{m+n}{n}\right)$ rationum Basis x in valore Superficiei quæsitæ, sint variis Signis affecti. In hujusmodi Casibus;

ſibus, pars aliqua BD$\delta\beta$ Superficiei media (quæ ſola dari poterit, cum Superficies ſit utrinque infinita) ſic invenitur.

Subtrahe Superficiem ad minorem Baſin Aβ pertinentem, a Superficie ad majorem Baſin AB pertinente, & habebis βBDδ Superficiem differentiæ Baſium inſiſtentem. Sic in hoc Exemplo. (*Vide Fig. Præcedentem.*)

Si AB $= 2$, & A$\beta = 1$; Erit βBD$\delta = \frac{17}{6}$.

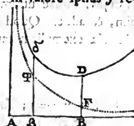
Etenim Superficies ad AB pertinens (viz. ABF—DFα) erit $\frac{8}{3} - \frac{1}{2}$ ſive $\frac{13}{6}$; & ſuperficies ad Aβ pertinens (viz. A$\phi\beta$—$\delta\phi\alpha$) erit $\frac{1}{3} - 1$, ſive $-\frac{2}{3}$: & earum differentia (viz. ABF—DFα—A$\phi\beta$ + $\delta\phi\alpha$ = βBDδ) erit $\frac{13}{6} + \frac{2}{3}$ ſive $\frac{17}{6}$.

Eodem modo, ſi A$\beta = 1$, AB $= x$; Erit βBD$\delta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$.

Sic ſi $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{-\frac{3}{5}} = y$, & A$\beta = 1$;

Erit βBD$\delta = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{9}x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} - \frac{49}{18}$.

Denique notari poterit quod ſi quantitas x^{-1} in valore ipſius y reperiatur, iſte Terminus (cum Hyperbolicam ſuperficiem generat) ſeorſim a reliquis conſiderandus eſt.



Ut ſi $x^2 + x^{-3} + x^{-1} = y$; Sit $x^{-1} =$ BF, & $x^2 + x^{-3} =$ FD, ac A$\beta = 1$; Et erit $\delta\phi$FD $= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex Terminis $x^2 + x^{-3}$ generatur.

Quare, ſi reliqua Superficies $\beta\phi$FB, quæ Hyperbolica eſt, ex Calculo aliquo ſit data, dabitur tota βBDδ.

Aliarum

Aliarum Omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipsius y, *vel aliquis ejus Terminus sit præcedentibus magis compositus, in Terminos Simpliciores reducendus est; operando in Literis ad eundem Modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes solvunt; & ex istis Terminis quæsitam Curvæ Superficiem per præcedentes Regulas deinceps elicies.*

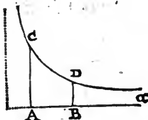
Exempla Dividendo.

Sit $\frac{aa}{b+x}=y$; Curva nempe existente Hyperbola.

Jam ut Æquatio ista a Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituo.

$$b+x)\ aa+0\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\right.\ \&c.$$

$$\begin{array}{l} aa+\frac{aax}{b} \\ \hline 0-\frac{aax}{b}+0 \\ -\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2} \\ \hline 0+\frac{aax^2}{b^2}+0 \\ +\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3} \\ \hline 0-\frac{aax^3}{b^3}+0 \\ -\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4} \\ \hline 0+\frac{aax^4}{b^4} \\ \&c. \end{array}$$



Et sic vice hujus $y=\frac{aa}{b+x}$, nova prodit $y=\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}$, &c. Serie istac infinite continuata; Adeoque (per Regulam Secundam)

Area quæsita ABDC æqualis erit ipsi $\frac{a^2x}{b} - \frac{a^2x^2}{2b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^2x^4}{4b^4}$ &c. infinitæ etiam seriei; cujus tamen Termini pauci initiales sunt in usum quemvis satis exacti, si modo x sit aliquoties minor quam b.

Eodem modo, si sit $\frac{1}{1+xx} = y$, Dividendo prodibit $y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$ &c. Unde (per Regulam Secundam) erit ABDC $= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c.

Vel si Terminus xx ponatur in divisore primus, hoc modo $xx + 1$), prodibit $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8}$ &c. pro valore ipsius y; Unde (per Regulam Secundam) erit BD$\alpha = -x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{7}x^{-7}$ &c. Priori modo procede cum x est satis parva, posteriori cum satis magna supponitur.

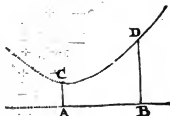
Denique si $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = y$; Dividendo prodit $2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit ABDC $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$ &c.

Exempla Radicem Extrahendo.

Si sit $\sqrt{aa+xx} = y$, Radicem sic extraho,

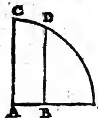
$$aa + xx \left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ \&c.} \right.$$

$$\begin{array}{l} aa \\ \hline 0 + xx \\ \quad xx + \frac{x^4}{4a^2} \\ \hline \quad 0 - \frac{x^4}{4a^2} \\ \quad - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6} \\ \hline \quad 0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\ \quad + \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\ \hline \quad 0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\ \quad \text{\&c.} \end{array}$$



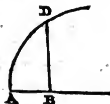
Unde

Unde, pro Æquatione $\sqrt{aa+xx}=y$, nova producitur, viz. $y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Et (per Reg. 2.) Area quæsita ABDC erit $= ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc est Quadratura Hyperbolæ.



Eodem modo, si sit $\sqrt{aa-xx}=y$, ejus Radix erit $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Adeoque Area quæsita ABDC erit æqualis $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc est Quadratura Circuli.

Vel si ponas $\sqrt{x-xx}=y$; erit Radix æqualis infinitæ seriei. $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$ &c. Et Area quæsita ABD æqualis erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$ &c. sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$ &c. Et hæc est Areæ Circuli Quadratura.



Si $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ Ellipticæ;) Extrahendo radicem utramque prodit

$$\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8} \text{ \&c.}$$

Et Dividendo, sicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{array}{lllll} 1 + \frac{1}{2}b\chi^2 & + \frac{3}{8}b^2\chi^4 & + \frac{5}{16}b^3\chi^6 & + \frac{35}{128}b^4\chi^8 & \text{\&c.} \\ \quad + \frac{1}{2}ba & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}ab^2 & + \frac{5}{32}ab^3 & \\ & - \frac{1}{8}a^2 & - \frac{1}{16}a^2b & - \frac{3}{64}a^2b^2 & \\ & & + \frac{1}{16}a^3 & + \frac{1}{32}a^3b & \\ & & & - \frac{5}{128}a^4 & \end{array}$$

Adeoque Aream quæsitam

$$\begin{array}{lll} \chi + \frac{1}{6}b\chi^3 & + \frac{3}{40}b^2\chi^5 & \text{\&c.} \\ \quad + \frac{1}{6}a & + \frac{1}{20}ab & \\ & - \frac{1}{40}a^2 & \end{array}$$

Sed observandum est, quod Operatio non raro abbreviatur per debitam

bitam Æquationis præparationem, ut in allato Exemplo $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$. Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices prodibit

$\frac{\sqrt{1+ax^2-bx^2-abx^4}}{1+bx^2} = y$, &. reliquum opus perficitur extrahendo Radicem Numeratoris tantum, & dividendo per Denominatorem.

Ex hisce, credo, satis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipsius y (quibuscumque Radicibus vel Denominatoribus sit perplexus, ut hic videre est;

$x^3 + \frac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{axx+x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+xx} - \sqrt[2]{2x-x^3}} = y$) in series Infinitas

simplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæsita Superficies cognoscetur.

Exempla per Resolutionem Æquationum.

NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO

Quia tota difficultas in Resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illustrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, resolvenda: Et sit 2, numerus qui minus quam decima sui parte differt a Radice quæsita. Tum pono $2 + p = y$, & substituo hunc ipsi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus Radix p exquirenda est, ut quotienti addatur: Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, sive $p = 0,1$ prope veritatem est; itaque scribo $0,1$ in quotiente, & suppono $0,1 + q = p$, & hunc ejus valorem, ut prius substituo, unde prodit $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$.

Et cum $11,23q + 0,061$ veritati prope accedit, sive fere sit q æqualis $-0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ quot locis primæ Figuræ hujus & principalis quotientis exclusive distant) scribo $-0,0054$ in inferiori parte quotientis, cum negativa sit.

Et supponens $-0,0054 + r = q$, hunc ut prius substituo, & operationem sic produco quo usque placuerit. Verum si ad bis tot figuras

figuras tantum quot in Quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare cupiam, pro q substituo $-0{,}0054+r$ in hanc $6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061$, scilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem

$y^3-2y-5=0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544853$ $+2{,}09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$	$+8+12p+6p^2+p^3$
	$+2y$	$-4-2p$
	-5	-5
	Summa	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0{,}1+q=p$	$+p^3$	$+0{,}001+0{,}03q+0{,}3q^2+q^3$
	$+6p^2$	$+0{,}06 \quad +1{,}2 \quad +6{,}0$
	$+10p$	$+1{,} \quad +10{,}$
	-1	$-1{,}$
	Summa	$+0{,}061+11{,}23q+6{,}3q^2+q^3$
$-0{,}0054+r=q$	$+6{,}3q^2$	$+0{,}000183708-0{,}06804r+6{,}3r^2$
	$+11{,}23q$	$-0{,}060642 \quad +11{,}23$
	$+0{,}061$	$+0{,}061$
	Summa	$+0{,}000541708+11{,}16196r+6{,}3r^2$
$-0{,}00004854+s=r$		

suam neglecto, & prodit $6{,}3r^2 + 11{,}16196r + 0{,}000541708 = 0$ fere, sive (rejecto $6{,}3r^2$) $r = \frac{-0{,}000541708}{11{,}16196} = -0{,}00004853$ fere, quam scribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa subducens habeo 2,09455147 Quotientem quæsitam.

Æquationes plurium dimensionum nihilo secius resolvuntur, & operam sub fine, ut hic factum fuit, levabis, si primos ejus terminos gradatim omiseris.

Præterea notandum est quod in hoc exemplo, si dubitarem an $0{,}1 = p$ veritati satis accederet, pro $10p - 1 = 0$, finxissem $6p^2 + 10p - 1 = 0$, & ejus radicis primam figuram in Quotiente scripsissem; & secundam vel tertiam Quotientis figuram sic explorare convenit, ubi in Æquatione ista ultimo resultante quadratum coefficientis penultimi termini, non sit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

 Imo

bitam Æquationis præparationem, ut in allato Exemplo $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$. Si utramque partem fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices prodibit $\frac{\sqrt{1+ax^2-abx^4 \atop -b}}{1+bxx} = y$, &. reliquum opus perficitur extrahendo Radicem Numeratoris tantum, & dividendo per Denominatorem.

Ex hisce, credo, satis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipsius y (quibuscumque Radicibus vel Denominatoribus sit perplexus, ut hic videre est;

$$x^3 + \frac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{axx+x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+x^3}-\sqrt{2x-x^{\frac{3}{3}}}} = y)$$ in series Infinitas

simplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæsita Superficies cognoscetur.

Exempla per Resolutionem Æquationum.

NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO

Quia tota difficultas in Resolutione latet, modum quo ego utor in Æquatione Numerali primum illustrabo.

Sit $y^3 - 2y - 5 = 0$, resolvenda: Et sit 2, numerus qui minus quam decima sui parte differt a Radice quæsita. Tum pono $2 + p = y$, & substituo hunc ipsi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, cujus Radix p exquirenda est, ut quotienti addatur: Nempe (neglectis $p^3 + 6p^2$ ob parvitatem) $10p - 1 = 0$, sive $p = 0,1$ prope veritatem est; itaque scribo $0,1$ in quotiente, & suppono $0,1 + q = p$, & hunc ejus valorem, ut prius substituo, unde prodit $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$.

Et cum $11,23q + 0,061$ veritati prope accedit, sive fere sit q æqualis $- 0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ quot locis primæ Figuræ hujus & principalis quotientis exclusive distant) scribo $- 0,0054$ in inferiori parte quotientis, cum negativa sit.

Et supponens $- 0,0054 + r = q$, hunc ut prius substituo, & operationem sic produco quo usque placuerit. Verum si ad bis tot figuras

figuras tantum quot in Quotiente jam reperiuntur una dempta, operam continuare cupiam, pro q substituo $-0{,}0054+r$ in hanc $6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061$, scilicet primo ejus termino (q^3) propter exilitatem

$y^3-2y-5=0$		$+2{,}10000000$ $-0{,}00544853$ $+2{,}09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$ $+2y$ -5	$+8+12p+6p^2+p^3$ $-4-2p$ -5
	Summa	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0{,}1+q=p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0{,}001+0{,}03q+0{,}3q^2+q^3$ $+0{,}06\ +1{,}2\ +6{,}0$ $+1,\ +10,$ $-1,$
	Summa	$+0{,}061+11{,}23q+6{,}3q^2+q^3$
$-0{,}0054+r=q$	$+6{,}3q^2$ $+11{,}23q$ $+0{,}061$	$+0{,}000183708-0{,}06804r+6{,}3r^2$ $-0{,}060642\ +11{,}23$ $+0{,}061$
	Summa	$+0{,}000541708+11{,}16196r+6{,}3r^2$
$-0{,}00004854+s=r$		

suam neglecto, & prodit $6{,}3r^2 + 11{,}16196r + 0{,}000541708 = 0$ fere, sive (rejecto $6{,}3r^2$) $r = \frac{-0{,}000541708}{11{,}16196} = -0{,}00004853$ fere, quam scribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa subducens habeo $2{,}09455147$ Quotientem quæsitam.

Æquationes plurium dimensionum nihilo secius resolvuntur, & operam sub fine, ut hic factum fuit, levabis, si primos ejus terminos gradatim omiseris.

Præterea notandum est quod in hoc exemplo, si dubitarem an $0{,}1=p$ veritati satis accederet, pro $10p-1=0$, finxissem $6p^2+10p-1=0$, & ejus radicis primam figuram in Quotiente scripsissem; & secundam vel tertiam Quotientis figuram sic explorare convenit, ubi in Æquatione ista ultimo resultante quadratum coefficientis penultimi termini, non sit decies majus quam factus ex ultimo termino ducto in coefficientem termini antepenultimi.

 Imo

Imo laborem plerumque minues præſertim in Æquationibus plurimarum dimenſionum, ſi figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc eſt extrahendo minorem radicum, ex tribus ultimis terminis Æquationis noviſſime reſultantis) exquiras: Iſto enim modo figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus reſolvendi Æquationes pervulgata an ſit neſcio, certe mihi videtur præ reliquis ſimplex, & uſui accommodata. Demonſtratio ejus ex ipſo modo operandi patet, unde cum opus ſit, in memoriam facile revocatur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Termini deſint, eadem fere facilitate tractantur; & Æquatio ſemper relinquitur, cujus Radix una cum acquiſita Quotiente adæquat Radicem Æquationis primò propoſitæ. Unde Examinatio Operis hic æque poterit inſtitui ac in reliqua Arithmetica, auferendo nempe Quotientem a Radice primæ Æquationis (ſicut Analyſtis notum eſt) ut Æquatio ultima vel Termini ejus duo treſve ultimi producantur inde. Quicquid laboris hic eſt, iſtud in Operatione ſubſtituendi quantitates unas pro aliis reperietur: Id quod varie perficias, at ſequentem modum maxime expeditum puto, præſertim ubi Numeri Coefficientes conſtant ex pluribus Figuris.

Sit $p+3$ ſubſtituenda pro y in hanc $y^4-4y^3+5y^2-12y+17=0$. Et cum iſta poſſit reſolvi in hanc formam $\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0$. Æquatio nova ſic generabitur $\overline{p-1}\times\overline{p+3}=p^2+2p-3$. & p^2+2p+2 in $p+3=p^3+5p^2+8p+6$. & p^3+5p^2+8p-6 in $p+3=p^4+8p^3+23p^2+18p-18$. & $p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$, quæ quærebatur.

LITERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO

His in numeris ſic oſtenſis: Sit Æquatio literalis $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$, reſolvenda.

Primum inquiro valorem ipſius y cum x ſit nulla, hoc eſt, elicio Radicem hujus Æquationis $y^3+a^2y-2a^3=0$, & invenio eſſe $+a$. Itaque ſcribo $+a$ in Quotiente, & ſupponens $+a+p=y$, ſubſtituo pro y valorem ejus, & Terminos inde reſultantes ($p^3+3ap^2+4a^2p$, &c.) margini appono; Ex quibus aſſumo $+4a^2p+a^2x$ terminos utique ubi

ubi p & x seorsim sunt minimarum dimensionum, & eos nihilo fere æquales esse suppono, sive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et scribens $-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, substituo $-\frac{1}{4}x + q$ pro p; Et terminos inde resultantes iterum in margine scribo, ut vides in annexo schemate, & inde assumo Quantitates $+ 4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, in quibus utique q & x seorsim sunt minimarum dimensionum, & fingo $q = \frac{xx}{64a}$ fere, sive $q = + \frac{xx}{64a} + r$; & adnectens $+ \frac{xx}{64a}$ Quotienti, substituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q; & sic procedo quo usque placuerit.

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} - \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} \text{ \&c.}$$

$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3$
	$+a^2y$	$+a^3 + a^2p$
	$+axy$	$+a^2x + axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2q - \frac{3}{4}xq^2 + q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aq^2$
	$+4a^2p$	$-a^2x + 4a^2q$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}ax^2 + axq$
	$+a^2x$	$+a^2x$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}x^2r + 3ar^2$
	$+4a^2q$	$+\frac{1}{16}ax^2 + 4a^2r$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}x^2q$	$-\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}x^2r$
	$-\frac{1}{16}ax^2$	$-\frac{1}{16}ax^2$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$

$$+ 4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a} \left(+ \frac{132x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}\right.$$

Sin duplo tantum plures Quotienti terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: Primo termino (q^3) Æquationis novissime resultantis misso, & ista etiam parte ($-\frac{3}{4}xq^2$) secundi, ubi x est tot dimensionum quot in penultimo Quotientis; In reliquos terminos ($3aq^2$

$+4a^2q$,

$+4a^2q$, &c.) margini adſcriptos ut vides, ſubſtituo $\frac{x^2}{64a}+r$ pro q; & ex ultimis duobus terminis $(\frac{15x^4}{4096a}-\frac{131}{512}x^3+\frac{9}{32}x^2r-\frac{3}{2}axr+4a^2r)$ Æquationis inde reſultantis, facta diviſione $4a^2-\frac{3}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{512}x^3-\frac{15x^4}{4096a}($ elicio $+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ Quotienti adnectendos.

Denique Quotiens iſta $(a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}$, &c.) per Regulam ſecundam, dabit $ax-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{192a}+\frac{131x^4}{2048a^2}+\frac{509x^5}{81920a^3}$, &c. pro Area quæſita, quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x ſit minor.

Alius modus eaſdem Reſolvendi.

Sin valor Areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x ſit major; Exemplum eſto $y^3+axy+x^2y-a^3-2x^3=0$. Itaque hanc reſoluturus excerpo terminos $y^3+x^2y-2x^3$ in quibus x & y vel ſeorſim, vel ſimul multiplicatæ, ſunt & plurimarum, & æqualium ubique dimenſionum; & ex iis quaſi nihilo æqualibus Radicem elicio. Hanc invenio eſſe x, & in Quotiente ſcribo. Vel quod eodem recidit, ex y^3+y-2 (unitate pro x ſubſtituta) Radicem extraho quæ hic prodit 1, & eam per x multiplico, & factum (x) in Quotiente ſcribo. Denique pono $x+p=y$, & ſic procedo ut in priori Exemplo, donec habeam Quotientem $x-\frac{a}{4}+\frac{aa}{64x}+\frac{131a^3}{512x^2}+\frac{509a^4}{16384x^3}$, &c. adeoque Aream $\frac{x^2}{2}-\frac{ax}{4}+\boxed{\frac{aa}{64x}}-\frac{131a^3}{512x}-\frac{509a^4}{32768x^2}$, de qua vide exempla tertia Regulæ ſecundæ. Lucis gratia dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modo x & a ſibi invicem ibi ſubſtituantur, ut non opus eſſet aliud Reſolutionis exemplum hic adjungere.

Area autem $(\frac{xx}{2}-\frac{ax}{4}+\boxed{\frac{aa}{64x}}$ &c. terminatur ad Curvam quæ juxta Aſymptoton aliquam in infinitum ſerpit; & Termini initiales $(x-\frac{1}{4}a)$ valoris extracti de y, in Aſymptoton iſtam ſemper terminantur; unde portionem Aſymptoti facile invenies. Idem ſemper notandum eſt cum Area deſignatur terminis plus pluſque diviſis per x continue, præterquam quod vice Aſymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola Conica, vel alia magis compoſita.

Sed

Sed hunc modum miſſum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem Curvis in orbem ad inſtar Ellipſium flexis; de altero modo per exemplum $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$, ſupra oſtenſo (ſcilicet quo dimenſiones ipſius x in numeratoribus quotientis perpetuo augeantur) annotabo ſequentia.

1. Si quando accidit quod valor ipſius y, cum x nullum eſſe fingitur, ſit quantitas ſurda vel penitus ignota, licebit illam litera aliqua deſignare. Ut in exemplo, $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$, ſi radix hujus $y^3+a^2y-2a^3$ fuiſſet ſurda vel ignota, finxiſſem quamlibet (b) pro ea ponendam; & reſolutionem ut ſequitur perfeciſſem. Scribens b in Quotiente, ſuppono $b+p=y$, & iſtum pro y ſubſtituo, ut vides; unde nova p^3+3bp^2, &c. reſultat, rejectis terminis $b^3+a^2b-2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quod b ſupponitur Radix hujus $y^3+a^2y-2a^3=0$. Deinde termini $3b^2p+a^2p+abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2+a^2}$ quotienti apponendum, & $-\frac{abx}{3b^2+a^2}+q$ ſubſtituendum pro p, &c.

$y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0.$ Sit $cc=3b^2+a^2$.		
$y=b-\frac{abx}{c^2}+\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x^3}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}-\frac{a^6bx^3}{c^8}+\frac{a^6b^3x^3}{c^{10}}$ &c.		
$b+p=y$	y^3	$+b^3+3b^2p+3bp^2+p^3$
	$+axy$	$+abx+axp$
	$+aay$	$+aab+aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$-\frac{abx}{cc}+q=p$	p^3	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$ &c.
	$+3bp^2$	$+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4}-\frac{6ab^2x}{c^2}q$ &c.
	$+axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2}+axq$
	$+ccp$	$-abx+ccq$
	$-x^3$	$-x^3$
	$+abx$	$+abx$
$c^2+ax-\frac{6ab^2x}{cc})\ \frac{a^4bx^2}{c^4}+x^3+\frac{a^3b^3x^3}{c^6}\ (\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}$ &c.		

Completo opere, ſumo numerum aliquem pro a, & hanc $y^3+a^2y-2a^3=0$, ſicut de numerali æquatione oſtenſum ſupra reſolvo; & radicem ejus pro b ſubſtituo.

2. Si dictus valor ſit nihil, hoc eſt ſi in æquatione reſolvenda nullus

lus ſit terminus niſi qui per x vel y ſit multiplicatus, ut in hac $y^3 - axy + x^3 = 0$; tum terminos $(-axy + x^3)$ ſeligo in quibus x ſeorſim & y etiam ſeorſim ſi fieri poteſt, alias per x multiplicata, ſit minimarum dimenſionum. Et illi dant $+\frac{xx}{a}$ pro primo termino quotientis, & $\frac{xx}{a} + p$ pro y ſubſtituendum. In hac $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, licebit primum terminum quotientis vel ex $-a^2y - x^3$, vel ex $y^3 - a^2y$ elicere.

3. Si valor iſte ſit imaginarius, ut in hac $y^4 + y^2 - 2y + 6 - x^2y^2 - 2x + x^2 + x^4 = 0$, augeo vel imminuo quantitatem x donec dictus valor evadit realis.

Sic in annexo ſchemate, cum AC (x) nulla eſt, tum CD (y) eſt imaginaria.

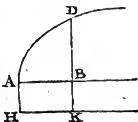
Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x; tum poſito quod BC (x) ſit nulla, CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet poteſt eſſe primus terminus quotientis, prout ſuperficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC deſideratur. In aliis etiam caſibus, ſi quando hæſitas, te hoc modo extricabis.

Denique ſi index poteſtatis ipſius x vel y ſit fractio, reduco ipſum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$. Poſito $y^{\frac{1}{2}} = v$, & $x^{\frac{1}{3}} = z$, reſultabit $v^6 - z^3v + z^4 = 0$, cujus radix eſt $v = z + z^3$, &c. ſive (reſtituendo valores) $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x$, &c. & quadrando $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis curvarum inveſtigandis dicta ſufficiant. Imo cum Problemata omnia de curvarum Longitudine, de quantitate & ſuperficie ſolidorum, deque Centro Gravitatis, poſſunt eo tandem reduci ut quæratur quantitas Superficiei planæ linea curva terminatæ, non opus eſt quicquam de iis adjungere. In iſtis autem quo ego operor modo dicam breviſſime.

Applicatio prædictorum ad reliqua iſtiuſmodi Problemata.

Sit ABD curva quævis, & AHKB rectangulum cujus latus AH vel BK eſt unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK deſcribere; & quod BK (1) ſit momentum quo AK (x) & BD (y) momentum quo ABD gradatim augetur; & quod ex momento BD perpetim dato, poſſis, per prædictas regulas, aream ABD ipſo deſcriptam inveſtigare, ſive cum AK (x) momento 1 deſcripta conferre.

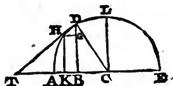


Jam

Jam qua ratione Superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per præcedentes regulas elicitur, eadem quælibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.

Longitudines Curvarum invenire.

Sit ADLE circulus cujus arcus AD longitudo est indaganda. Ducto tangente DHT, & completo indefinite parvo rectangulo HGBK, & posito AE $= 1 = 2$AC. Erit ut BK sive GH, momentum Basis AB (x), ad HD momentum Arcus AD : : BT : DT : : BD ($\sqrt{x-xx}$) : DC ($\frac{1}{2}$) : : 1 (BK) : $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ (DH). Adeoque $\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ sive $\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ est momentum Arcus AD.



Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$ &c.

Quare, per regulam secundam, longitudo Arcus AD est

$x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$ &c.

sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5$, &c.

Non secus ponendo CB esse x, & radium CA esse 1, invenies Arcum LD esse $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c.

Sed notandum est quod unitas ista quæ pro momento ponitur est Superficies cum de Solidis, & linea cum de superficiebus, & punctum cum de lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate in punctis, sive lineis infinite parvis, siquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indivisibilium.

Ex his fiat conjectura de superficiebus & quantitatibus solidorum, ac de Centris Gravitatum.

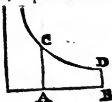
Invenire prædictorum conversum.

Verum si e contra ex area vel longitudine &c. Curvæ alicujus data longitudo Basis AB desideratur, ex æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur radix de x.

Inven-

Inventio Basis ex Area data.

Ut si ex area ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x}=y$) data, cupiam basim AB investigare, area ista z nominata, extraho radicem hujus z (ABCD) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis terminis in quibus x est plurium dimensionum quam z in quotiente desideratur.



Ut si vellem quod z ad quinque tantum dimensiones in quotiente ascendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8$, &c. & radicem hujus tantum $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$ extraho.

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.		
$z + p = x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z + p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-z^2p$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\ \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{120}z^5\ (\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}z^5$		

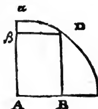
Analysin ut vides exhibui propter adnotanda duo sequentia.

1. Quod inter substituendum, istos terminos semper omitto quos nulli deinceps usui fore prævideam. Cujus rei regula esto, quod post primum terminum ex qualibet quantitate sibi collaterali resultantem non

non addo plures terminos dextrorsum quam istius primi termini index dimensionis ab indice dimensionis maximæ unitatibus distat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimensio est 5, omisi omnes terminos post z^5, post z^4 posui unicum, & duos tantum post z^3. Cum radix extrahenda (x) sit parium ubique, vel imparium dimensionum, hæc esto regula; Quod post primum terminum ex qualibet quantitate sibi collaterali resultantem non addo plures terminos dextrorsum, quam istius primi termini index dimensionis ab indice dimensionis maximæ binis unitatibus distat; vel ternis unitatibus, si indices dimensionum ipsius x unitatibus ubique ternis a se invicem distant, & sic de reliquis.

2. Cum video p, q, vel r, &c. in æquatione novissime resultante esse unius tantum dimensionis, ejus valorem, hoc est, reliquos terminos quotienti addendos, per divisionem quæro. Ut hic vides factum.

Inventio Basis ex data Longitudine Curvæ.



Si ex dato arcu αD Sinus AB desideratur; æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. supra inventæ, (posito nempe $AB = x$, $\alpha D = z$, & $A\alpha = 1$,) radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

Et præterea si Cosinum $A\beta$ ex isto arcu dato cupis, fac $A\beta \left(= \sqrt{1-xx}\right) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}$, &c.

De Serie progressionum continuanda.

Hic obiter notetur, quod 5 vel 6 terminis istarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogia observata poteris ad arbitrium producere.

Sic hanc $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c. produces dividendo ultimum terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

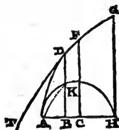
Et hanc $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, 10×11, &c.

Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, 9×10, &c.

Et hanc $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times7}{8\times9}$, &c. Et sic in reliquis.

Applicatio prædictorum ad Curvas Mechanicas.

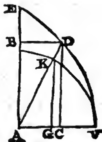
Et hæc de curvis Geometricis dicta sufficiant. Quinetiam curva etiamsi Mechanica sit, methodum tamen nostram nequaquam respuit.



Exemplo sit Trochoides, ADFG, cujus vertex A, & axis AH, & AKH rota qua describitur. Et quæratur Superficies ABD. Jam posito $AB = x$, $BD = y$, ut supra, & $AH = 1$; primo quæro Longitudinem ipsius BD. Nempe ex natura Trochoidis est KD = arcui AK. Quare tota BD = BK + arc. AK. Sed est BK $(= \sqrt{x-xx}) - x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c. & (ex prædictis) arcus $AK = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c.

Vel brevius sic: Cum recta AK tangenti TD parallela sit, erit AB ad BK sicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc est $x : \sqrt{x-xx} :: 1 : \frac{1}{x}\sqrt{x-xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Quare (per Reg. 2.) BD $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et superficies ABD $= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3168}x^{\frac{11}{2}}$, &c.

Non dissimili modo (posito C centro circuli, & $CB = x$) obtinebis aream CBDF, &c.



Sit area ABDV Quadratricis VDE (cujus vertex est V, & A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ducta qualibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque KG : AG :: AB (x) : BD (y), sive $\frac{x \times AG}{KG} = y$. Verum ex natura Quadratricis est BA (= DC) = arcui VK, sive $VK = x$. Quare posito $AV = 1$, erit $GK = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, &c. ex supra ostensis, & $GA = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$, &c.

Adeoque

Adeoque $y\ (= \frac{x \times AG}{KG}) = \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6}$ &c, sive, divisione facta, $y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6$, &c. & (per Reg. 2.) area AVDB $= x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis est.

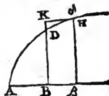
Nec quicquam hujusmodi scio ad quod hæc methodus idque variis modis, sese non extendit. Imo tangentes ad curvas Mechanicas (si quando id non alias fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analysis per æquationes ex finito terminorum numero constantes (quando id sit possibile) perficit, hæc per æquationes infinitas semper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analysis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa sunt quam in illa, nec æquationes minus exactæ; licet omnes earum terminos, nos homines & rationis finitæ nec designare neque ita concipere possimus, ut quantitates inde desideratas exacte cognoscamus: Sicut radices surdæ finitarum æquationum nec numeris nec quavis arte Analytica ita possunt exhiberi ut alicujus quantitas a reliquis distincta exacte cognoscatur.

Denique ad Analyticam merito pertinere censeatur cujus beneficio curvarum areæ & longitudines &c. (id modo fiat) exacte & Geometrice determinentur. Sed ista narrandi non est locus, respicienti duo præ reliquis demonstranda occurrunt.

1. *Demonstratio quadraturæ curvarum simplicium in Regula prima.*

Præparatio pro Regula prima demonstranda.

Sit itaque curvæ alicujus $AD\delta$ Basis $AB = x$, perpendiculariter applicata $BD = y$, & area $ABD = z$, ut prius. Item sit $B\beta = o$, $BK = v$, & rectangulum $B\beta HK$ (ov) æquale spatio $B\beta\delta D$.



Est ergo $A\beta = x + o$, & $A\delta\beta = z + ov$. His præmissis, ex relatione inter x & z ad arbitrium assumpta quæro y isto, quem sequentem vides, modo.

Pro lubitu sumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, sive $\frac{4}{9}x^3 = zz$. Tum $x + o$ $(A\beta)$ pro x, & $z + ov$ $(A\delta\beta)$ pro z substitutis, prodibit

bit $\frac{4}{9}$ in $x^3+3x^2o+3xo^2+o^3=$ (ex natura curvæ) $z^2+2zov+o^2v^2$. Et sublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zz) æqualibus, reliquisque per o divisis, restat $\frac{4}{9}$ in $3x^2+3xo+o^2=2zv+ov^2$. Si jam supponamus $B\beta$ in infinitum diminui & evanescere, sive o esse nihil, erunt v & y æquales, & termini per o multiplicati evanescent, quare restabit $\frac{4}{9}\times 3xx=2zv$, sive $\frac{2}{3}xx\,(=zy)$ $=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, sive $x^{\frac{1}{2}}\,(=\frac{x^2}{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}})=y$. Quare e contra si $x^{\frac{1}{2}}=y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$.

Demonstratio.

Vel generaliter, si $\frac{n}{m+n}\times ax^{\frac{m+n}{n}}=z$; sive, ponendo $\frac{na}{m+n}=c$, & $m+n=p$, si $cx^{\frac{p}{n}}=z$, sive $c^nx^p=z^n$: tum $x+o$ pro x, & $z+ov$ (sive, quod perinde est, $z+oy$) pro z, substitutis, prodit c^n in x^p+pox^{p-1}, &c. $=z^n+noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe terminis, qui tandem evanescerent, omissis. Jam sublatis c^nx^p & z^n æqualibus, reliquisque per o divisis, restat $c^npx^{p-1}=nyz^{n-1}$ $(=\frac{nyz^n}{z}=\frac{nyc^nx^p}{cx^{\frac{p}{n}}})$ sive, dividendo per c^nx^p, erit $px^{-1}=\frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ sive $pcx^{\frac{p-n}{n}}=ny$; vel restituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m+n$ pro p, hoc est, m pro $p-n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}}=y$. Quare e contra, si $ax^{\frac{m}{n}}=y$, erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}=z$. Q. E. D.

Inventio curvarum quæ possunt quadrari.

Hinc in transitu notetur modus quo curvæ tot quot placuerit, quarum areæ sunt cognitæ, possunt inveniri; sumendo nempe quamlibet æquationem pro relatione inter aream z & basin x ut inde quæratur applicata y. Ut si supponas $\sqrt{aa+xx}=z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}}=y$. Et sic de reliquis.

2. *Demonstratio resolutionis æquationum affectarum.*

Alterum demonstrandum est literalis æquationum affectarum resolutio. Nempe quod Quotiens, cum x sit satis parva, quo magis producі-

ducitur eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q, vel r, &c.) quo distat ab exacto valore ipsius y, tandem evadat minor quavis data quantitate; & in infinitum producta sit ipsi y æqualis. Quod sic patebit.

1. Quoniam ex ultimo termino æquationum quarum $p, q, r,$ &c. sunt radices, quantitas illa in qua x est minimæ dimensionis (hoc est, plusquam dimidium istius ultimi termini, si supponis x satis parvam esse) in qualibet operatione perpetuo tollitur: iste ultimus terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; & prorsus evanescet si opus infinite continuatur.

Nempe si $x = \frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x + x^2 + x^3 + x^4$, &c. & x^2 dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4 + x^5$, &c. Itaque si $x \sqsubset \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + x^2 + x^3$, &c. & x^2 plusquam dimidium omnium $x^2 + x^3 + x^4$, &c. Sic si $\frac{x}{b} \sqsubset \frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x + \frac{xx}{b} + \frac{x^3}{bb}$, &c. Et sic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque decrescunt perpetuo, vel si quando increscant, tantum opus est ut x aliquoties adhuc minor supponatur.



2. Si ultimus terminus alicujus æquationis continuo diminuatur donec tandem evanescat, una ex ejus radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo termino simul evanescat.

3. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuo decrescit donec tandem, cum opus in infinitum producitur, penitus evanescat.

4. Sed valores istarum p, q, vel r, &c. una cum quotiente eatenus extracta adæquant radices æquationis propositæ (Sic in resolutione æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, supra ostensa, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r$, &c.) Unde satis liquet propositum quod quotiens infinite producta est una ex valoribus de y.

Idem patebit substituendo quotientem pro y in æquationem propositam. Videbis enim terminos illos sese perpetuo destruere in quibus x est minimarum dimensionum.

CUM in Epistolis D. Newtoni, *vel in lucem jamdudum editis, vel quæ in manus nostras inciderunt, reperiantur aliqua quæ ad hanc Doctrinam pertinent, ea excerpere & huic Tractatui adjungere visum est.*

EXCERPTA

Ex Epiſtolis D. *NEWTONI* Ad Methodum FLUXIONUM, ET SERIERUM INFINITARUM Spectantibus.

Fragmentum Epiſtolæ ad* D. Oldenburgium 13 Junii *1676 miſſæ.*

FRactiones in Infinitas Series reducuntur per diviſionem; & quantitates radicales per extractionem radicum, perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Hæc ſunt fundamenta harum reductionum; ſed extractiones radicum, multum abbreviantur per hoc *Theorema.*

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi $P+PQ$ ſignificat quantitatem cujus Radix, vel etiam dimenſio quævis, vel radix dimenſionis, inveſtiganda eſt. P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem indicem dimenſionis ipſius $P+PQ$: Sive dimenſio illa integra ſit; ſive (ut ita loquar) fracta; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro aa, aaa, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c:a^5}$, ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}.

Et

* *Extat Epiſtola in Tom.* 3. *Operum* Walliſii.

Et sic pro $\frac{aa}{\sqrt{c:a^3+b^2x}}$ scribo $aa\times\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{1}{3}}$; & pro $\frac{a^2b}{\sqrt{c:\overline{a^3+b^2x}\times\overline{a^3+b^2x}}}$ scribo $a^2b\times\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{2}{3}}$: In quo ultimo casu, si $\overline{a^3+b^2x}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur esse $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regula; erit $P=a^3$, $Q=\frac{b^2x}{a^3}$, $m=-2$, & $n=3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, usurpo A, B, C, D, &c. nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$, B pro secundo $\frac{m}{n}$ AQ, & sic deinceps. Cæterum usus Regulæ patebit exemplis.

Exempl. 1. Est $\sqrt{cc+xx}$ (seu $\overline{c^2+x^2}|^{\frac{1}{2}}$) $=c+\frac{x^2}{2c}-\frac{x^4}{8c^3}+\frac{x^6}{16c^5}-\frac{5x^8}{128c^7}+\frac{7x^{10}}{256c^9}$ &c. Nam, in hoc casu, est $P=c^2$, $Q=\frac{x^2}{c^2}$, $m=1$, $n=2$, $A(=P^{\frac{m}{n}}=\overline{cc}|^{\frac{1}{2}})=c$, $B(=\frac{m}{n}AQ)=\frac{x^2}{2c}$, $C(=\frac{m-n}{2n}BQ)=-\frac{x^4}{8c^3}$, & sic deinceps.

Exempl. 2. Est $\sqrt{5:c^5+c^4x-x^5}$ (i. e. $\overline{c^5+c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $=c+\frac{c^4x-x^5}{5c^4}-\frac{2c^8x^2+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9}$ + &c. Ut patebit substituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Potest etiam $-x^5$ substitui pro P, & $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q, & tunc evadet $\sqrt{5:c^5+c^4x-x^5}=-x+\frac{c^4x+c^5}{5x^4}+\frac{2c^8x^2+4c^9x+2c^{10}}{25x^9}$ + &c. Prior modus eligendus est, si x valde parvum sit; posterior, si valde magnum.

Exempl. 3. Est $\frac{N}{\sqrt{3:y^3-aay}}$ (hoc est, $N\times\overline{y^3-a^2y}|^{-\frac{1}{3}}$) æqualis $N\times\overline{\frac{1}{y}+\frac{aa}{3y^3}+\frac{2a^4}{9y^5}+\frac{14a^6}{81y^7}+\&c.}$ Nam $P=y^3$, $Q=\frac{-aa}{yy}$, $m=-1$, $n=3$. $A(=P^{\frac{m}{n}}=y^3\times^{-\frac{1}{3}})=y^{-1}$, hoc est $\frac{1}{y}$. $B(=\frac{m}{n}AQ=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{y}\times\frac{-aa}{yy})=\frac{aa}{3y^3}$, &c.

Exempl. 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipsius $d+e$, (hoc est, $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$) est $d^{\frac{4}{3}}+\frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3}+\frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}}-\frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}$ + &c.

Nam $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=4$, $n=3$, $A(=P^{\frac{m}{n}})=d^{\frac{4}{3}}$, &c.

Exempl. 5. Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut si quadrato-cubus ipsius $d+e$, (hoc est, $\overline{d+e}|^5$, seu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$) desideretur: erit, juxta Regulam, $P=d$, $Q=\frac{e}{d}$, $m=5$, & $n=1$; adeoque $A(=P^{\frac{m}{n}})=d^5$, $B(=\frac{m}{n}AQ)=5d^4e$, & sic $C=10d^3e^2$, $D=10d^2e^3$, $E=5de^4$, $F=e^5$, & $G(=\frac{m-5n}{6n}FQ)=0$. Hoc est, $\overline{d+e}|^5=d^5+5d^4e+10d^3e^2+10d^2e^3+5de^4+e^5$.

Exem-

Exempl. 6. Quinetiam Divisio, sive simplex sit, sive repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut si $\frac{1}{d+e}$ (hoc est $\overline{d+e}|^{-1}$ sive $\overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}$) in seriem simplicium terminorum resolvendum sit: Erit juxta Regulam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = -1$, $n = 1$, & A ($= P^{\frac{m}{n}} = d^{-\frac{1}{1}}$) $= d^{-1}$ seu $\frac{1}{d}$, B ($= \frac{m}{n} AQ = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d} = -\frac{e}{d^2}$), & sic C $= \frac{ee}{d^3}$, D $= -\frac{e^3}{d^4}$, &c. Hoc est $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{d^2} + \frac{e^2}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} + \&c.$

Exempl. 7. Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$ (hoc est unitas ter divisa per $d+e$, vel semel per cubum ejus,) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6e^2}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} + \&c.$

Exempl. 8. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc est N divisum per radicem cubicam ipsius $d+e$,) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2e^2}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} + \&c.$

Exempl. 9. Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$ (hoc est N divisum per radicem quadrato-cubicam ex cubo ipsius $d+e$, sive $\frac{N}{\sqrt{5: d^3 + 3d^2e + 3de^2 + e^3}}$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12e^2}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}} + \&c.$

Per eandem Regulam Genesis Potestatum, Divisiones per Potestates aut per quantitates radicales, & Extractiones radicum altiorum in numeris etiam commode instituuntur.

Extractiones Radicum affectarum in speciebus imitantur earum extractiones in numeris, sed methodus *Vietæ* & *Oughtredi* nostri huic negotio minus idonea est: Quapropter aliam excogitare adactus sum. [*Hujus specimen exhibetur in Tractatu præcedente Pag.* 8.]

Quomodo ex æquationibus, sic ad infinitas series reductis, Areæ & Longitudines curvarum, Contenta & Superficies solidorum, vel quorumlibet segmentorum figurarum quarumvis, eorumque Centra gravitatis determinantur; & quomodo etiam Curvæ omnes Mechanicæ ad ejusmodi æquationes infinitarum serierum reduci possint, indeque Problemata circa illas resolvi perinde ac si Geometricæ essent; nimis longum foret describere, sufficiat specimina quædam talium Problematum recensuisse: Inque iis, brevitatis gratia, literas A, B, C, D, &c. pro terminis seriei, sicut sub initio, nonnunquam usurpabo.

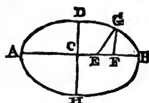
1. *Si ex dato sinu recto, vel sinu verso, Arcus desideretur:* Sit radius

dius r, & ſinus rectus x: Eritque Arcus $= x + \frac{x^3}{6r^2} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}$ &c. hoc eſt, $= x + \frac{1\times1\times xx}{2\times3\times rr}A + \frac{3\times3xx}{4\times5rr}B + \frac{5\times5xx}{6\times7rr}C + \frac{7\times7xx}{8\times9rr}D +$ &c.

Vel, ſit d diameter, ac x ſinus verſus; & erit Arcus æqualis $d^{\frac{1}{2}}$ in $x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$ &c. hoc eſt, $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3x^2}{40d^2} + \frac{5x^3}{112d^3} +$ &c.

2. Si viciſſim, *ex dato Arcu deſideretur ſinus:* Sit radius r, & arcus z. Eritque ſinus rectus $= z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$ &c. hoc eſt, $= z - \frac{zz}{2\times3rr}A - \frac{zz}{4\times5rr}B - \frac{zz}{6\times7rr}C -$ &c. Et ſinus verſus $= \frac{z^2}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$ &c. hoc eſt, $= \frac{zz}{1\times2r} - \frac{zz}{3\times4rr}A - \frac{zz}{5\times6rr}B - \frac{zz}{7\times8rr}C -$ &c.

3. *Si Arcus capiendus ſit in ratione data ad alium Arcum:* Eſto diameter $= d$, chorda arcus dati $= x$, & arcus quæſitus ad arcum illum datum ut n ad 1; Eritque arcus quæſiti Chorda $= nx + \frac{1-nn}{2\times3dd}xxA + \frac{9-nn}{4\times5dd}xxB + \frac{25-nn}{6\times7dd}xxC + \frac{36-nn}{8\times9dd}xxD + \frac{49-nn}{10\times11dd}xxE +$ &c. Ubi nota, quod cum n eſt numerus impar, ſeries deſinet eſſe infinita, & evadet eadem quæ prodit per Vulgarem Algebram ad multiplicandum datum angulum per iſtum numerum n.



4. Si in Axe alterutro AB, Ellipſeos ABD (cujus centrum C, & axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG occurrens Ellipſi in G, motu angulari feretur; & ex data area ſectoris Elliptici BEG, quæratur recta GF, quæ a puncto G ad axem AB normaliter demittitur: Eſto BC $= q$, DC $= r$, EB $= t$, ac duplum areæ BEG $= z$; & erit GF $= \frac{1}{t}z - \frac{q}{6r^2t^4}z^3 + \frac{10q^2-9qt}{120r^4t^7}z^5 - \frac{280q^3-504q^2t+225qt^2}{5040r^6t^{10}}z^7 +$ &c. Sic itaque Aſtronomicum illud *Kepleri* Problema reſolvi poteſt.

5. In eadem Ellipſi, ſi ſtatuatur CD $= r$, $\frac{CB_q}{CD} = c$, & CF $= x$:

Erit

Erit arcus Ellipticus DG $= x + \frac{1}{6c^2}x^3 + \frac{1}{10rc^3}x^5 + \frac{1}{14r^2c^4}x^7 + \frac{1}{18r^3c^5}x^9 + \frac{1}{22r^4c^6}$ x^{11} + &c.

$$\begin{array}{rrrr} -\frac{1}{40c^4} & -\frac{1}{28rc^5} & -\frac{1}{24r^2c^6} & -\frac{1}{22r^3c^7} \\ & +\frac{1}{112c^6} & +\frac{1}{48rc^7} & \pm\frac{3}{88r^2c^8} \\ & & -\frac{5}{1152c^8} & -\frac{5}{352rc^9} \\ & & & +\frac{7}{2816c^{10}} \end{array}$$

Hic numerales Coefficientes fupremorum terminorum ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, &c.) funt in Mufica progreffione : Et numerales Coefficientes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuo numeralem Coefficientem fupremi termini per terminos hujus progreffionis $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, $\frac{\frac{3}{3}n-3}{4}$, $\frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$, $\frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$, $\frac{\frac{9}{6}n-9}{10}$, &c. Ubi n fignificat numerum dimenfionum ipfius c in denominatore iftius fupremi termini. E. *g.* ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$, numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipfius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc eft, in 1; & prodit $\frac{1}{22}$, numeralis coefficiens termini proxime inferioris : dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{3}n-3}{4}$, five in $\frac{n-3}{4}$, hoc eft, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in ifta columna. Atque ifta $\frac{3}{88}$ $\times \frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ numeralem coefficientem quarti termini; & $\frac{5}{352} \times \frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum ufque columnis præftari poteft : Adeoque valor ipfius DG per hanc Regulam pro lubitu produci.

Adhæc, fi BF dicatur x, fitque r latus rectum Ellipfeos, & $e = \frac{r}{AB}$; Erit Arcus Ellipticus

$$BG = \sqrt{rx} \text{ in } \overline{1 + \frac{2 - \frac{3}{2}e}{3r}x + \frac{-2 + 3e - \frac{7}{8}e^2}{5r^2}x^2 + \frac{+4 - 9e + \frac{23}{4}e^2 - \frac{7}{16}e^3}{7r^3}x^3 + \frac{-10 + 30e - \frac{123}{4}e^2 + \frac{91}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^4}{9r^4}x^4}, + \&c.$$

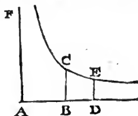
Quare, fi ambitus totius Ellipfeos defideretur; Bifeca CB in F, & quære Arcum DG, per prius Theorema, & Arcum BG per pofterius.

 6. Si

6. Si, vice versa, *ex dato arcu Elliptico* DG, *quæratur Sinus ejus* CF; tum dicto CD $= r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$, & arcu illo DG $= z$; Erit

$$CF = z - \frac{1}{6cc}z^3 - \frac{1}{10rc^3}z^5 - \frac{1}{84r^2c^4}z^7 - \&c.$$
$$\qquad\qquad + \frac{13}{120c^4} \qquad + \frac{71}{420rc^5}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{493}{5040c^6}$$

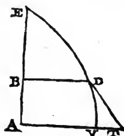
Quæ autem de Ellipsi dicta sunt, omnia facile accommodantur ad Hyperbolam; mutatis tantum signis ipsorum c & e ubi sunt imparium dimensionum.



7. Præterea, si sit CE Hyperbola, cujus Asymptoti AD, AF rectum angulum FAD constituant; & ad AD erigantur utcunque perpendicula BC, DE occurrentia Hyperbolæ in C & E: & AB dicatur a, BC b, & area BCED z;

Erit BD $= \frac{z}{b} + \frac{z^2}{2ab^2} + \frac{z^3}{6a^2b^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} + \&c.$ Ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus Arithmeticæ progressionis, 1, 2, 3, 4, 5, &c. in se continuo. Et hinc ex Logarithmo dato potest numerus ei competens invenire.

8. Esto VDE *Quadratrix*, cujus vertex est V, existente A centro & AE semi-diametro Circuli ad quem aptatur, & angulo VAE *recto*: Demissoque ad AE perpendiculo quovis DB, & acta Quadratricis Tangente DT occurrente axi ejus AV in T:



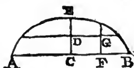
Dic AV $= a$, & AB $= x$; Eritque DB $= a - \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} - \&c.$ Et VT $= \frac{x^2}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} + \&c.$ Et Area AVDB $= ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} - \&c.$ Et Arcus VD $= x + \frac{2x^3}{27a^2} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} + \&c.$ Unde vicissim, ex dato BD, vel VT, aut area AVDB, arcuve VD, per resolutionem affectarum æquationum erui potest x seu AB.

9. Esto denique AEB *Sphæroides*, revolutione Ellipseos AEB circa axem AB genita, & secta planis quatuor, AB per axem transeunte, DG parallelo AB, CDE perpendiculariter bisecante axem, & FG parallelo CE: sitque recta CB $= a$, CE $= c$, CF $= x$, & FG $= y$.

Et

Et Sphæroideos ſegmentum CDGF dictis quatuor planis comprehenſum, erit $+2cxy - \frac{x}{3c}y^3 - \frac{x}{20c^3}y^5 - \frac{x}{56c^5}y^7 - \frac{5x}{576c^7}y^9 -$ &c.

$$- \frac{cx^3}{3a^2} - \frac{x^3}{18ca^2} - \frac{x^3}{40c^3a^2} - \frac{5x^3}{336c^5a^2} - \text{\&c.}$$
$$- \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x^5}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - \text{\&c.}$$
$$- \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - \text{\&c.}$$
$$- \frac{5cx^9}{576a^8} - \text{\&c.}$$
$$- \text{\&c.}$$



Ubi numerales coefficientes ſupremorum terminorum ($2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56} - \frac{5}{576}$, &c.) in infinitum producuntur multiplicando primum coefficientem 2 continuo per terminos hujus progreſſionis $-\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}$, &c. Et numerales coefficientes terminorum in unaquaque columna deſcendentium in infinitum producuntur multiplicando continuo coefficientem ſupremi termini in prima columna per eandem progreſſionem, in ſecunda autem per terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}$, &c. in tertia per terminos hujus $\frac{3\times1}{2\times3}, \frac{5\times3}{4\times5}, \frac{7\times5}{6\times7}, \frac{9\times7}{8\times9}$, &c. in quarta per terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}, \frac{7\times3}{4\times5}, \frac{9\times5}{6\times7}$, &c. in quinta per terminos hujus $\frac{7\times1}{2\times3}, \frac{9\times3}{4\times5}, \frac{11\times5}{6\times7}$, &c. Et ſic in infinitum.

Et eodem modo ſegmenta aliorum ſolidorum deſignari, & valores eorum aliquando commode per ſeries quaſdam numerales in infinitum produci poſſunt.

Ex his videre eſt, quantum fines Analyſeos per hujuſmodi infinitas æquationes amplientur: Quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pæne dixerim problemata (ſi numeralia *Diophanti* & ſimilia excipias) ſeſe extendit.

Non tamen omnino univerſalis evadit, niſi per ulteriores quaſdam methodos eliciendi ſeries infinitas. Sunt enim quædam Problemata in quibus non liceat ad ſeries infinitas per diviſionem vel extractionem radicum ſimplicium affectarumve, pervenire. Sed quomodo in iſtis caſibus procedendum ſit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere quæ circa reductionem infinitarum ſerierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius ſcribo, quod hæ ſpeculationes diu mihi faſtidio eſſe cœperint, adeo ut ab iiſdem jam per quinque fere annos abſtinuerim.

Unum tamen addam: quod poſtquam Problema aliquod ad infinitam æquationem deducitur, poſſint inde variæ approximationes

in usum Mechanicæ, nullo fere negotio formari; quæ, per alias methodos quæsitæ, multo labore temporisque dispendio constare solent.

Cujus rei exemplo esse possunt Tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadratura circuli. Nam, ut ex data arcus chorda A, & dimidii arcus chorda B, arcum illum proxime assequaris; finge arcum illum esse z, & circuli radium r; juxtaque superiora erit A (nempe duplum sinus dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4 \times 6rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} -$ &c. Et B $= \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} -$ &c. Duc jam B in numerum fictitium n, & a producto aufer A, & residui secundum terminum (nempe $-\frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^3}{4 \times 6rr}$) eo ut evanescat, pone $= 0$; indeque emerget $n = 8$, & erit 8B $-$ A $= 3z * - \frac{3z^5}{64 \times 120r^4} +$ &c. hoc est $\frac{8B - A}{3} = z$; errore tantum existente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ &c. in excessu. Quod est Theorema *Hugenianum*.

Insuper, si in Arcus Bb, sagitta AD indefinite producta, quæratur punctum G, a quo actæ rectæ GB, Gb abscindant Tangentem Ee quam proxime æqualem Arcui isti: Esto circuli centrum C, diameter AK $= d$, & sagitta AD $= x$: Et erit DB $(= \sqrt{dx - xx})$

$= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} -$ &c.

Et AE (= AB) $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$ &c.

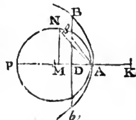
Et AE $-$ DB : AD :: AE : AG; Quare AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{175d} -$ vel $+$ &c. Finge ergo AG $= \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$; & vicissim erit DG $(\frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x)$: DB :: DA : AE $-$ DB. Quare AE $-$ DB $= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}} +$ &c. Adde DB; & prodit AE $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}} +$ &c. Hoc aufer de valore ipsius AE supra habito, & restabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}} +$ vel $-$ &c. Quare in AG, cape AH quintam partem DA, & KG = HC, & actæ GBE,

G*be*

Gbe abſcindent Tangentem Ee quam proxime æqualem arcui BAb; errore tantum exiſtente $\frac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx}$ + vel — &c. multo minore ſcilicet quam in Theoremate *Hugenii.* Quod ſi fiat $7AK : 3AH :: 3DH : n$; & capiatur $KG = CH - n$, erit error adhuc multo minor.

Atque ita, ſi Circuli ſegmentum aliquod BAb per Mechanicam deſignandum eſſet: Primo reducerem Aream illam in Infinitam ſeriem, puta hanc $BbA = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}$ — &c. Dein quærerem conſtructiones Mechanicas quibus hanc ſeriem proxime aſſequerer; cujuſmodi ſunt hæ: Age rectam AB, & erit ſegmentum $BbA = \overline{\tfrac{2}{3}AB + BD} \times \tfrac{4}{5}AD$ proxime; exiſtente ſcilicet errore tantum $\frac{x^3}{70d^2}\sqrt{dx}$ + &c. in defectu: Vel proximius, erit ſegmentum illud (biſecto AD in F, & acta recta BF) $= \frac{4BF+AB}{15} \times 4AD$; exiſtente errore ſolummodo $\frac{x^3}{560d^2}\sqrt{dx}$ + &c. qui ſemper minor erit quam $\frac{1}{1500}$ totius ſegmenti, etiamſi ſegmentum illud ad uſque ſemicirculum augeatur.

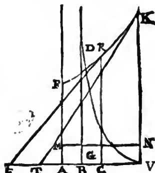
Sic & in Ellipſi BAb, [*Vid. Fig. Præcedent.*] cujus vertex A, axis alteruter AK, & latus rectum AP; cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK - 21AP}{10AK} \times AP$. In Hyperbola vero, cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19AK + 21AP}{10AK} \times AP$. Et acta recta GBE abſcindet tangentem AE quam proxime æqualem arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo Arcus ille non ſit nimis magnus.



Et pro Area ſegmenti Hyperbolici BbA; in DP cape $MD = \frac{3AD^2}{4AK}$, & ad D & M erige perpendicula $D\beta$, MN occurrentia ſemicirculo ſuper Diametro AP deſcripto: Eritque $\frac{4AN + A\beta}{15} \times 4AD = BbA$ proxime: Vel proximius, erit $\frac{21AN + 4A\beta}{75} \times 4AD = BbA$; ſi modo capiatur $DM = \frac{5AD^2}{7AK}$.

Frag-

Fragmentum Epistolæ D. Newtoni, *ad* D. Oldenburgium 24 Octob. 1676 *missæ*.



LOngitudo *Cissoidis* sic construitur. Sit VD *Cissois*, AV Diameter Circuli ad quem aptatur, V vertex, AF Asymptota ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demissum. Cum semi-axe AF = AV, & semi-parametro AG = ⅓ AV, describatur Hyperbola F*k*K; & inter AB & AV sumpta AC media proportionali, erigantur ad C & V perpendicula C*k*, VK Hyperbolæ occurrentia in *k* & K; Et agantur rectæ KT, *kt* tangentes Hyperbolam in eisdem K & *k*, & occurrentes AV in T & *t*; Et ad AV constituatur rectangulum AVNM æquale spatio TK*kt*. Et *Cissoidis* VD longitudo erit Sextupla altitudinis VN. Demonstratio perbrevis est.

[Quæ sequuntur scripta sunt in explicationem Epistolæ præcedentis.]

Quod vero attinet ad Inventionem terminorum *p*, *q*, *r*, (*vide* pag. 25 & 8:) in extractione Radicis affectæ, primum *p* sic eruo.

Fig. 1.

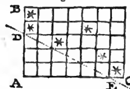
B

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4
0	y	y^2	y^3	y^4

A C

Descripto Angulo recto BAC, latera ejus BA, CA divido in partes æquales; & inde normales erigo distribuentes angulare spatium in æqualia parallelogramma vel quadrata, quæ concipio denominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum specierum, puta x & y, regulariter ascendentium a termino A; prout vides in Fig. 1. inscriptas. Ubi y denotat Radicem extrahendam; & x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus potestatibus series conficienda est. Deinde, cum Æquatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliqua: Et Regula ad duo vel forte plura ex insignitis parallelogrammis applicata; quorum unum sit humillimum in columna sinistra juxta AB, & alia ad Regulam dextrorsum sita, cæteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant; Seligo ter-

terminos Æquationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos, & inde quæro quantitatem Quotienti addendam.



Sic ad extrahendam Radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua *; ut vides in Fig. 2. Dein applico Regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistra columna; eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec alium similiter vel forte plura e reliquis signatis locis cœperit attingere. Videoque loca sic attacta esse x^3, x^2y^2, & y^6. E terminis itaque, $y^6 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (& insuper si placet reductis ad $v^6 - 7v^2 + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino Quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est.

Sic Æquatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam resolvebam in priori Epistola, dat $-2a^3 + aay + y^3 = 0$, & inde $y = a$ proxime: Cum itaque a sit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & substituo $a + p = y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; sed ex iis, credo, lector se proprio marte extricabit.) Subsequentes vero termini q, r, s, &c. eodem modo ex æquationibus secundis, tertiis, cæterisque eruuntur, quo primus p e prima, sed cura leviori; quia cæteri valores y solent prodire dividendo terminum involventem infimam potestatem indefinitæ quantitatis x per Coefficientem radicis p, q, r, aut s.

Intellexti credo ex superioribus, regressionem ab Areis curvarum ad Lineas rectas, fieri per hanc extractionem Radicis affectæ. Sed duo alii sunt modi quibus idem perficio.

Eorum unus affinis est Computationibus quibus colligebam approximationes sub finem alterius Epistolæ, & intelligi potest per hoc exemplum. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ $z = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$, &c. Et partibus ejus multiplicatis in se, emerget $z^2 = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$, &c. $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$, &c. $z^4 = x^4 + 2x^5$, &c. $z^5 = x^5$, &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}zz$, & restat $z - \frac{1}{2}zz = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{13}{60}x^5$, &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, & fit $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$, &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & restat $z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$,

$-\frac{1}{120}x^5$, &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5=x$ quamproxime; five $x=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$, &c.

Eodem modo, Series de una indefinita quantitate, in aliam transferri possunt. Quemadmodum si posito r radio circuli, x sinu recto arcus z, & $x+\frac{x^3}{6rr}+\frac{3x^5}{40r^4}+$&c. longitudine arcus istius; atque hanc Seriem a Sinu recto ad Tangentem vellem transferre: Quæro longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr-xx}}$, & reduco in infinitam Seriem $x+\frac{x^3}{2rr}+\frac{3x^5}{8r^4}$ + &c. Vocetur hæc quantitas, t. Colligo potestates ejus $t^3=x^3+\frac{3x^5}{2rr}$ &c. $t^5=x^5+$&c. Aufero autem t de z, & restat $z-t=-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{10}x^5-$&c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z-t+\frac{1}{3}t^3=\frac{1}{5}x^5+$&c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & restat $z-t+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5=0$ quamproxime. Quare est $z=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-$&c. Sed siquis in usus Trigonometricos me jussisset exhibere expressionem Arcus per Tangentem; eam non hoc circuitu, sed directa methodo quæsivissem.

Per hoc genus Computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus constantes; & Radices affectarum Æquationum magna ex parte extrahuntur. Sed ad hunc posteriorem usum adhibeo potius methodum in altera Epistola descriptam tanquam generaliorem, & (Regulis pro Elisione superfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

Pro Regressione vero ab Areis ad Lineas rectas, & similibus, possunt hujusmodi *Theoremata* adhiberi.

THEOREMA I. Sit $z=ay+by^2+cy^3+dy^4+ey^5$, &c.

Et vicissim erit

$$y=\frac{z}{a}-\frac{b}{a^3}z^2+\frac{2b^2-ac}{a^5}z^3+\frac{5abc-5b^3-a^2d}{a^7}z^4+\frac{3a^2c^2-21ab^2c+6a^2bd+14b^4-a^3e}{a^9}z^5+\text{\&c.}$$

Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ, $z=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. Et substitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; vicissim exurgit, $y=z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+$&c.

THEO.

THEOREMA II. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 + \&c.$

Et viciſſim erit
$$y = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^4}z^3 + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55ab^2c + 10a^2bd + 5c^2 - a^3e}{a^{13}}z^9 + \&c.$$

Exempli gratia. Proponatur Æquatio ad Arcum circuli, $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \&c.$ Et ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6r^2}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d &c; orietur $y = z - \frac{z^3}{6r^2} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \&c.$

Fragmentum * *Epiſtolæ* D. Newtoni, *ad* D. Walliſium *Anno* 1692, *miſſæ.*

SUb finem Epiſtolæ anni 1676 [*Hæc ſunt verba* Walliſii] ſcribit [*D. Newtonus*] etiam Problema determinandi Curvas per conditiones Tangentium in ſua poteſtate eſſe, una cum aliis difficilioribus; ad quæ ſolvenda ſe uſum eſſe dicit duplici methodo, una concinniore, altera generaliore; & utramque literis tranſpoſitis celat: quæ in ordinem redactæ hanc ſententiam exhibent. *Una methodus conſiſtit in Extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus. Altera tantum in aſſumptione ſeriei pro quantitate qualibet incognita ex qua cætera commode derivari poſſunt; & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis ad eruendos terminos aſſumptæ Seriei.* Harum methodorum Secunda ex verbis jam recitatis abſque ulteriore explicatione intelligi poteſt; priorem ab Authore jam accepi ut ſequitur.

Hæc methodus, ait, ejuſdem eſt generis cum ea pro extrahendo radices ex æquationibus affectis ſuperius deſcripta. Pone quod Problema reſolvendum reducatur ad æquationem fluentes quantitates y & z una cum earum fluxionibus $\dot{y}$ & $\dot{z}$ involventem, & quod fluxio ipſius z uniformis ſit. Ut hæc fluxio ex æquatione evaneſcat, pro ea ponatur unitas, & manebit æquatio ſolas y, z & $\dot{y}$ involvens, *quam Reſolvendam* vocat. Proponitur, inventio ipſius y in Serie infinita convergente, quæ ſolam z involvet. Hoc in aliquibus æquationibus impoſſibile eſt, in aliis præparationem æquationum requirit, ubi vero directe confici poſſit reſolutio eſt hujuſmodi.

E 2 PRO-

* *Extat Epiſtola in Tom.* 2. *Operum* Walliſii.

PROBLEMA.

Ex æquatione fluxionem radicis involvente radicem extrahere.

RESOLUTIO.

TErmini omnes, ex eodem æquationis latere consistentes, æquentur nihilo, & ipsarum y & y dignitates (si opus sit) exaltentur vel deprimantur, sic ut earum indices nec alicubi negativi sint, nec tamen altiores quam ad hunc effectum requiritur; & sit kz^{λ} terminus infimæ dignitatis eorum qui neque per y neque per ejus fluxionem $\dot{y}$ neque per earum dignitatem quamvis multiplicantur. Sit $lz^{\mu}y^{\alpha}y^{\beta}$ terminus alius quilibet, & omnes ordine terminos percurrendo collige ex singulis seorsim numerum $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ sic, ut tot habeas ejusmodi numeros quot sunt termini. Horum numerorum maximus vocetur ν, & z^{ν} erit dignitas primi termini Seriei. Pro ejus coefficiente ponatur a, & in æquatione quæ *resolvenda* dicitur scribe az^{ν} pro y, & $\nu az^{\nu-1}$ pro $\dot{y}$; ac termini omnes resultantes in quibus z ejusdem est dignitatis ac in termino kz^{λ}, sub propriis signis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam hæc æquatio debite reducta dabit coefficientem a. Sic habes az^{ν} terminum primum Seriei.

OPERATIO SECUNDA.

Pro reliquis omnibus hujus Seriei terminis nondum inventis pone p, & habebis Æquationem $y=az^{\nu}+p$, & inde etiam Æquationem $\dot{y}=\nu az^{\nu-1}+\dot{p}$. In resolvenda, pro y & $\dot{y}$ scribe hos eorum valores & habebis Resolvendam novam, ubi p officium præstat ipsius y: & ex hac Resolvenda primum extrahes terminum Seriei p eodem modo atque terminum primum Seriei totius $y=az^{\nu}+p$ ex Resolvenda prima extraxisti.

OPE-

OPERATIO TERTIA ET SEQUENTES.

Dein tertiam Resolvendam eadem ratione invenias atque secundam invenisti, & ex ea terminum tertium Seriei totius extrahes. Et similiter Resolvendam quartam invenies, & ex ea quartum Seriei terminum, & sic in infinitum. Series autem sic inventa erit radix Æquationis quam extrahere oportuit.

EXEMPLUM.

Ex Æquatione $\dot{y}^2\dot{z}^2 - z^2\dot{z}\dot{y} - d^2\dot{z}\dot{z} + dz\dot{z}^2 = 0$, extrahenda sit radix y. Pone $\dot{z} = 1$, & Æquatio evadet $\dot{y}^2 - z^2\dot{y} - dd + dz = 0$, quæ est Resolvenda. Jam vero terminus infimus in quo nec y neque $\dot{y}$ reperitur, est dd, qui ipsi kz^λ æquatus dat $\lambda = 0$. Terminis reliquis $\dot{y}^2$, $-z^2\dot{y}$ pone $lz^\mu y^\alpha \dot{y}^\beta$ æqualem successive, & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$, in secundo $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ fit in primo casu 0, in secundo -1. Unde ν est 0, & az^ν & $\nu az^{\nu-1}$ sunt a & 0; quarum ultimæ duæ a & 0 in Resolvenda pro y & $\dot{y}$ scriptæ, producunt $aa + 0z^2 - dd + dz$; & termini aa & $-dd$, in quibus index dignitatis z est λ seu 0, positi æquales nihilo dant $a = d$. Unde primus Seriei terminus az^ν evadit d.

OPERATIO SECUNDA.

Pro terminis reliquis pone p, & habebis æquationem $y = d + p$, & inde $\dot{y} = \dot{p}$; qui valores in Resolvenda pro y & $\dot{y}$ substituti dant Resolvendam novam $2d\dot{p} + \dot{p}\dot{p} - zz\dot{p} + dz = 0$, ubi p & $\dot{p}$ vices subeunt ipsarum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur est dz, qui cum termino kz^λ collatus dat $\lambda = 1$. Terminis reliquis $2d\dot{p}$, $\dot{p}\dot{p}$ & $-zz\dot{p}$ pone $lz^\mu p^\alpha \dot{p}^\beta$ æqualem successive; & inde in primo casu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$; in secundo $\mu = 0$, $\alpha = 2$, & $\beta = 0$; & in tertio $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda-\mu+\beta}{\alpha+\beta}$ evadit primo casu 1, in secundo $\frac{1}{2}$, in tertio 0. Unde ν est 1, & az^ν & $\nu az^{\nu-1}$ sunt az & a. Termini duo ultimi az & a in Resolvenda pro p & $\dot{p}$ respective scripti, producunt $2daz + a^2z^2 - az^2 + dz$. Et termini $2daz$ &

& dz in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 1, poſiti æquales nihilo, dant $a = -\frac{1}{2}$. Unde az^{ν} terminus primus Seriei p fit $-\frac{1}{2}z$.

OPERATIO TERTIA.

Pro terminis reliquis nondum inventis pone q & habebis æquationem $p = -\frac{1}{2}z + q$, & inde $\dot{p} = -\frac{1}{2} + \dot{q}$: Qui valores pro p & $\dot{p}$ in Reſolvenda noviſſima ſubſtituti producunt Reſolvendam novam $2d\dot{q} - zq + qq + \frac{1}{4}zz - zz\dot{q} = 0$. Ubi q & $\dot{q}$ vices ſupplent ipſorum y & $\dot{y}$. Terminus unicus in quo neque q nec $\dot{q}$ reperitur eſt $\frac{1}{4}zz$, qui cum kz^{λ} collatus dat $\lambda = 2$. Terminis reliquis $2d\dot{q}$, $-zq$, $+qq$, $-zz\dot{q}$ pone $lz^{\mu}q^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ æqualem ſucceſſive; & inde in primo caſu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$; in ſecundo, $\mu = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$; in tertio, $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$: in quarto $\mu = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$: & inde $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ evadit in primo caſu 2, in ſecundo, tertio, & quarto 1. Et hinc ν eſt 2, vel az^{ν} & $\nu az^{\nu - 1}$ ſunt az^2 & $2az$: qui valores in Reſolvenda pro q & $\dot{q}$ ſubſtituti dant $2daz^2 - az^3 + aaz^4 + \frac{1}{4}zz - 2az^3$; & termini $2dazz + \frac{1}{4}zz$ in quibus index dignitatis z eſt λ ſeu 2, poſiti æquales nihilo, dant $a = -\frac{3}{8d}$. Unde az^{ν} terminus primus Seriei q evadit $-\frac{3zz}{8d}$.

OPERATIO QUARTA.

Pro reliquis Seriei terminis nondum inventis pone r, & habebis æquationes $q = -\frac{3zz}{8d} + r$, & $\dot{q} = -\frac{3z}{4d} + \dot{r}$; & inde reſolvendam novam $2d\dot{r} + \frac{9z^3}{8d} - zr + \frac{9z^4}{64dd} - \frac{3zzr}{4d} + rr - zz\dot{r} = 0$; & ex ea per Methodum ſuperiorem habebis $-\frac{9z^3}{16dd}$ terminum primum Seriei r. Et ſic pergitur in infinitum.

Eſt igitur radix extrahenda $y = d + p = d - \frac{1}{2}z + q = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} + r = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} - \frac{9z^3}{16dd} -$ &c. Et operationem continuando producere licet radicem ad terminos plures.

Et eadem methodo, dicit *Newtonus*, radices æquationum, fluxiones ſecundas, tertias, quartas, ($\ddot{y}$, $\dddot{y}$, $\ddddot{y}$,) aliaſque involventium, extrahi poſſe.

His utitur radicum extractionibus ubi aliæ Methodi nil proſunt. Nam

Nam in Epiſtola prædicta anni 1676 docet, quod in Solutione problematum de Tangentibus inverſorum, caſus aliqui dantur in quibus hæc Methodus generalis non requiritur: & particulariter, ſi in triangulo rectangulo quod ab ordinata, tangente, & interjacente parte abſciſſæ conſtituitur, relatio duorum quorumlibet e lateribus tribus per æquationem quamvis definiatur; Problema abſque Methodo hacce generali ſolvi poterit.

Methodi autem hæ omnes tam particulares quam generales collectim ſumptæ, ſolutionem exhibent ſecundæ partis problematis, quod *Newtonus* ſub initio iſtius Epiſtolæ his verbis propoſuit. *Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire, & vice verſa.* Nam tota fluxionum Methodus in hujus directa & inverſa ſolutione conſiſtit.

Part of a Letter from Sir *Iſ. Newton*, to Mr. *J. Collins*, *Novemb.* 8. 1676.

THere is no Curve-line expreſs'd by any Equation of three terms, tho' the unknown quantities affect one another in it, or the Indices of their Dignities be ſurd quantities (ſuppoſe $ax^{\lambda} + bx^{\mu}y^{\sigma} + cy^{\tau} = 0$*, where* x *ſignifies the Baſe*, y *the Ordinate*, λ, μ, σ, τ *the Indices of the dignities of* x *and* y, *and* a, b, c *known quantities with their ſigns + or —,) I ſay, there is no ſuch Curve-line, but I can, in leſs than half a quarter of an hour, tell whether it may be Squar'd, or what are the ſimpleſt Figures it may be compar'd with, be thoſe Figures Conic Sections, or others: And then by a direct and ſhort way, (I dare ſay the ſhorteſt the nature of the thing admits of, for a general one,) I can compare them. And ſo if any two Figures expreſs'd by ſuch Equations be propounded, I can, by the ſame Rule, compare them if they may be compar'd. This may ſeem a bold aſſertion, becauſe it's hard to ſay a Figure may, or may not, be Squard, or Compar'd with another; but it's plain to me by the fountain I draw it from, tho' I will not undertake to prove it to others. The ſame Method extends to Equations of four Terms, and others alſo, but not ſo generally.*

Frag-

Fragmentum Epistolæ D. Newtoni *ad D.* Collinsium, Novemb. 8. 1676, *Latine redditum.*

NUlla extat Curva cujus Æquatio ex tribus constat terminis, in qua, licet quantitates incognitæ se mutuo afficiant, vel Indices dignitatum sint surdæ quantitates (v. g. $ax^{\lambda}+bx^{\mu}y^{\sigma}+cy^{\tau}=0$, ubi x designat Basin, y Ordinatam λ, μ, σ, τ Indices dignitatum ipsius x & y, & a, b, c quantitates cognitas una cum signis suis + vel —) nulla inquam hujusmodi est Curva, de qua, an Quadrari possit, necne, vel quænam sint Figuræ simplicissimæ quibuscum comparari possit, sive sint Conicæ sectiones sive aliæ magis complicatæ, intra horæ octantem respondere non possim. Deinde * methodo directa & brevi, imo methodorum omnium generalium brevissima eas comparare queo. Quinetiam si duæ quævis Figuræ per hujusmodi Æquationes expressæ proponantur, per eandem Regulam, eas, modo comparari possint, comparo.

Affirmatio quidem videri potest temeraria, propterea quod perdifficile sit dictu an Figura Quadrari vel cum alia comparari possit, necne; mihi autem manifestum est, ex eo unde deduxi fonte, quanquam id aliis demonstrare in me suscipere nollem. Eadem methodus Æquationes quatuor terminorum aliasque complectitur, haud tamen adeo generaliter.



TRAC-

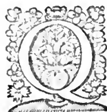
* *Methodum habes in Coroll. 2. Prop. 10. Tract. sequentis.*

TRACTATUS

DE

Quadratura Curvarum.

INTRODUCTIO
AD
Quadraturam Curvarum.



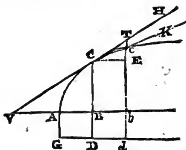
Uantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineæ describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium sed per motum continuum punctorum, superficies per motum linearum, solida per motum superficierum, anguli per rotationem laterum, tempora per fluxum continuum, & sic in cæteris. Hæ Geneses in rerum natura locum vere habent & in motu corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres ducendo rectas mobiles in longitudinem rectarum immobilium genesin docuerunt rectangulorum.

Considerando igitur quod quantitates æqualibus temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro velocitate majori vel minori qua crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores; methodum quærebam determinandi quantitates ex velocitatibus motuum vel incrementorum quibus generantur; & has motuum vel incrementorum velocitates nominando *Fluxiones* & quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim *Annis* 1665 & 1666 in Methodum Fluxionum qua hic usus sum in Quadratura Curvarum.

Fluxiones sunt quam proxime ut Fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quam minimis genita, &, ut accurate loquar, sunt in prima ratione augmentorum nascentium; exponi autem possunt per lineas quascunque quæ sunt ipsis proportionales.

Ut si areæ ABC, ABDG Ordinatis BC, BD super basi AB uniformi cum motu progredientibus describantur, harum arearum fluxiones erunt inter se ut Ordinatæ describentes BC & BD, & per Ordina-

natas illas exponi possunt, propterea quod Ordinatæ illæ sunt ut arearum augmenta nascentia.



Progrediatur ordinata BC de loco suo BC in locum quemvis novum bc. Compleatur parallelogrammum BCEb, ac ducatur recta VTH quæ Curvam tangat in C ipsisque bc & BA productis occurrat in T & V: & Abscissæ AB, Ordinatæ BC, & Lineæ Curvæ ACc augmenta modo genita erunt Bb, Ec & Cc; & in horum augmentorum nascentium ratione prima sunt latera trianguli CET, ideoque fluxiones ipsarum AB, BC & AC sunt ut trianguli illius CET latera CE, ET & CT & per eadem latera exponi possunt, vel quod perinde est per latera trianguli consimilis VBC.

Eodem recidit si sumantur fluxiones in ultima ratione partium evanescentium. Agatur recta Cc & producatur eadem ad K. Redeat Ordinata bc in locum suum priorem BC, & coeuntibus punctis C & c, recta CK coincidet cum tangente CH, & triangulum evanescens CEc in ultima sua forma evadet simile triangulo CET, & ejus latera evanescentia CE, Ec & Cc erunt ultimo inter se ut sunt trianguli alterius CET latera CE, ET & CT, & propterea in hac ratione sunt fluxiones linearum AB, BC & AC. Si puncta C & c parvo quovis intervallo ab invicem distant recta CK parvo intervallo a tangente CH distabit. Ut recta CK cum tangente CH coincidat & rationes ultimæ linearum CE, Ec & Cc inveniantur, debent puncta C & c coire & omnino coincidere. Errores quam minimi in rebus Mathematicis non sunt contemnendi.

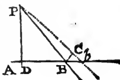
Simili argumento si circulus centro B radio BC descriptus in longitudinem Abscissæ AB ad angulos rectos uniformi cum motu ducatur, fluxio solidi geniti ABC erit ut circulus ille generans, & fluxio superficiei ejus erit ut perimeter Circuli illius & fluxio lineæ curvæ AC conjunctim. Nam quo tempore solidum ABC generatur ducendo circulum illum in longitudinem abscissæ AB, eodem superficies ejus generatur ducendo perimetrum circuli illius in longi-

gi-

gitudinem Curvæ AC. Hujus methodi accipe etiam exempla quæ sequuntur.

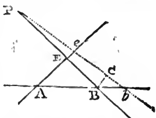
Recta PB circa polum datum P revolvens secet aliam positione datam rectam AB: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & PB.

Progrediatur recta PB de loco suo PB in locum novum Pb. In Pb capiatur PC ipsi PB æqualis, & ad AB ducatur PD sic, ut angulus bPD æqualis sit angulo bBC; & ob similitudinem triangulorum bBC, bPD erit augmentum Bb ad augmentum Cb ut Pb ad Db. Redeat jam Pb in locum suum priorem PB ut augmenta illa evanescant, & evanescentium ratio ultima, id est ratio ultima Pb ad Db, ea erit quæ est PB ad DB, existente angulo PDB recto, & propterea in hac ratione est fluxio ipsius AB ad fluxionem ipsius PB.



Recta PB circa datum Polum P revolvens secet alias duas positione datas rectas AB & AE in B & E: quæritur proportio fluxionum rectarum illarum AB & AE.

Progrediatur recta revolvens PB de loco suo PB in locum novum Pb rectas AB, AE in punctis b & e secantem, & rectæ AE parallela BC ducatur ipsi Pb occurrens in C, & erit Bb ad BC ut Ab ad Ae, & BC ad Ee ut PB ad PE, & conjunctis rationibus Bb ad Ee ut Ab×PB ad Ae×PE. Redeat jam linea Pb in locum suum priorem PB, & augmentum evanescens Bb erit ad augmentum evanescens Ee ut AB×PB ad AE×PE, ideoque in hac ratione est fluxio rectæ AB ad fluxionem rectæ AE.



Hinc si recta revolvens PB lineas quasvis Curvas positione datas secet in punctis B & E, & rectæ jam mobiles AB, AE Curvas illas tangant in Sectionum punctis B & E: erit fluxio Curvæ quam recta AB tangit ad fluxionem Curvæ quam recta AE tangit ut AB×PB ad AE×PE. Id quod etiam eveniet si recta PB Curvam aliquam positione datam perpetuo tangat in mobili P.

 Fluat.

Fluat quantitas x *uniformiter & invenienda ſit fluxio quantitatis* x^n. Quo tempore quantitas x fluendo evadit $x+o$, quantitas x^n evadet $\overline{x+o}|^n$, id eſt per methodum ſerierum infinitarum, $x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&c.$ Et augmenta o & $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \&c.$ ſunt ad invicem ut 1 & $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} + \&c.$ Evaneſcant jam augmenta illa, & eorum ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1}: ideoque fluxio quantitatis x eſt ad fluxionem quantitatis x^n ut 1 ad nx^{n-1}.

Similibus argumentis per methodum rationum primarum & ultimarum colligi poſſunt fluxiones linearum ſeu rectarum ſeu curvarum in caſibus quibuſcunque, ut & fluxiones ſuperficierum, angulorum & aliarum quantitatum. In finitis autem quantitatibus Analyſin ſic inſtituere, & finitarum naſcentium vel evaneſcentium rationes primas vel ultimas inveſtigare, conſonum eſt Geometriæ Veterum: & volui oſtendere quod in Methodo Fluxionum non opus ſit figuras infinite parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen poteſt Analyſis in figuris quibuſcunque ſeu finitis ſeu infinite parvis quæ figuris evaneſcentibus finguntur ſimiles, ut & in figuris quæ per Methodos Indiviſibilium pro infinite parvis haberi ſolent, modo caute procedas.

Ex Fluxionibus invenire Fluentes Problema difficilius eſt, & ſolutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum; de qua ſequentia olim ſcripſi.



DE

DE
Quadratura Curvarum.

Quantitates indeterminatas ut motu perpetuo crescentes vel decrescentes, id est ut fluentes vel defluentes in sequentibus considero, designoque literis $z, y, x, v,$ & earum fluxiones seu celeritates crescendi noto iisdem literis punctatis $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$. Sunt & harum fluxionum fluxiones seu mutationes magis aut minus celeres quas ipsarum $z, y, x, v,$ fluxiones secundas nominare licet & sic designare $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, & harum fluxiones primas seu ipsarum z, y, x, v fluxiones tertias sic $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$, & quartas sic $\ddddot{z}, \ddddot{y}, \ddddot{x}, \ddddot{v}$. Et quemadmodum $\dddot{z}, \dddot{y}, \dddot{x}, \dddot{v}$ sunt fluxiones quantitatum $\ddot{z}, \ddot{y}, \ddot{x}, \ddot{v}$, & hæ sunt fluxiones quantitatum $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$, & hæ sunt fluxiones quantitatum primarum z, y, x, v: sic hæ quantitates considerari possunt ut fluxiones aliarum quas sic designabo, $\overset{\prime}{z}, \overset{\prime}{y}, \overset{\prime}{x}, \overset{\prime}{v}$, & hæ ut fluxiones aliarum, $\overset{\prime\prime}{z}, \overset{\prime\prime}{y}, \overset{\prime\prime}{x}, \overset{\prime\prime}{v}$, & hæ ut fluxiones aliarum $\overset{\prime\prime\prime}{z}, \overset{\prime\prime\prime}{y}, \overset{\prime\prime\prime}{x}, \overset{\prime\prime\prime}{v}$. Designant igitur $\overset{\prime\prime}{z}, \overset{\prime}{z}, z, \dot{z}, \ddot{z}, \dddot{z}, \ddddot{z}$, &c. seriem quantitatum quarum quælibet posterior est fluxio præcedentis & quælibet prior est fluens quantitas fluxionem habens subsequentem. Similis est series $\sqrt{\overset{\prime\prime}{az-zz}}, \sqrt{\overset{\prime}{az-zz}}, \sqrt{az-zz}, \sqrt{\overset{\cdot}{az-zz}}, \sqrt{\overset{\cdot\cdot}{az-zz}}, \sqrt{\overset{\cdot\cdot\cdot}{az-zz}}$, ut & series $\frac{az+zz}{a-z}\overset{\prime\prime}{}, \frac{az+zz}{a-z}\overset{\prime}{}, \frac{az+zz}{a-z}, \frac{az+zz}{a-z}\overset{\cdot}{}, \frac{az+zz}{a-z}\overset{\cdot\cdot}{}, \frac{az+zz}{a-z}\overset{\cdot\cdot\cdot}{}$.

Et notandum est quod quantitas quælibet prior in his seriebus est ut area figuræ curvilineæ cujus ordinatim applicata rectangula est quantitas posterior & abscissa est z: uti $\sqrt{\overset{\prime}{az-zz}}$ area curvæ cujus ordinata est $\sqrt{az-zz}$ & abscissa z. Quo autem spectant hæc omnia patebit in Propositionibus quæ sequuntur.

PROP.

PROP. I. PROB. I.

Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, invenire fluxiones.

Solutio.

Multiplicetur omnis æquationis terminus per indicem dignitatis quantitatis cujusque fluentis quam involvit, & in singulis multiplicationibus mutetur dignitatis latus in fluxionem suam, & aggregatum factorum omnium sub propriis signis erit æquatio nova.

Explicatio.

Sunto a, b, c, d &c. quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur æquatio quævis quantitates fluentes z, y, x &c. involvens, uti $x^3 - xy^2 + a^2z - b^3 = 0$. Multiplicentur termini primo per indices dignitatum x, & in singulis multiplicationibus pro dignitatis latere, seu x unius dimensionis, scribatur $\dot{x}$, & summa factorum erit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$. Idem fiat in y & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z & prodibit $aa\dot{z}$. Ponatur summa factorum æqualis nihilo, & habebitur æquatio $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Dico quod hac æquatione definitur ratio fluxionum.

Demonstratio.

Nam sit o quantitas admodum parva & sunto $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, quantitatum z, y, x momenta id est incrementa momentanea synchrona. Et si quantitates fluentes jam sunt z, y & x hæ post momentum temporis incrementis suis $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ auctæ, evadent $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$, quæ in æquatione prima pro z, y, & x scrip-

ſcriptæ dant æquationem $x^3 + 3x^2o\dot{x} + 3xo^2\dot{x}\dot{x} + o^3\dot{x}^3 - xy^2 - o\dot{x}y^2 - 2xo\dot{y}y - 2\dot{x}o^2\dot{y}y - xo^2\dot{y}\dot{y} - \dot{x}o^3\dot{y}\dot{y} + a^2z + a^2o\dot{z} - b^3 = 0$.

Subducatur æquatio prior, & reſiduum diviſum per o erit $3\dot{x}x^2 + 3\dot{x}\dot{x}xo + \dot{x}^3o^2 - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y - 2\dot{x}o\dot{y}y - xo\dot{y}\dot{y} - \dot{x}o^2\dot{y}\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$. Minuatur quantitas o in infinitum, & neglectis terminis evaneſcentibus reſtabit $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + a^2\dot{z} = 0$. Q. E. D.

Explicatio plenior.

Ad eundem modum ſi æquatio eſſet $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax-yy} - b^3 = 0$, produceretur $3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + a^2\dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}} = 0$. Ubi ſi fluxionem $\dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax-yy} = z$, & erit $ax - y^2 = z^2$, & (per hanc Propoſitionem) $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$ ſeu $\frac{a\dot{x}-2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$, hoc eſt $\frac{a\dot{x}-2\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = \dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}}$. Et inde $3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + \frac{a^3\dot{x}-2a^2\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = 0$.

Et per operationem repetitam pergitur ad fluxiones ſecundas, tertias & ſequentes. Sit æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, & fiet per operationem primam $\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4\dot{z}z^3 = 0$, per ſecundam $\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}\dot{y}y^2 + 3z\ddot{y}y^2 + 6z\dot{y}^2y - 4\ddot{z}z^3 - 12\dot{z}^2z^2 = 0$, per tertiam $\dddot{z}y^3 + 9\ddot{z}\dot{y}y^2 + 18\dot{z}\dot{y}^2y + 3z\dddot{y}y^2 + 18z\ddot{y}\dot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 4\dddot{z}z^3 - 36\ddot{z}\dot{z}z^2 - 24\dot{z}^3z = 0$.

Ubi vero ſic pergitur ad fluxiones ſecundas, tertias & ſequentes, convenit quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem conſiderare, & pro ejus fluxione prima unitatem ſcribere, pro ſecunda vero & ſequentibus nihil. Sit æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, ut ſupra; & fluat z uniformiter, ſitque ejus fluxio unitas, & fiet per operationem primam $y^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4z^3 = 0$, per ſecundam $6\dot{y}y^2 + 3z\ddot{y}y^2 + 6z\dot{y}^2y - 12z^2 = 0$, per tertiam $9\ddot{y}y^2 + 18\dot{y}^2y + 3z\dddot{y}y^2 + 18z\ddot{y}\dot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 24z = 0$.

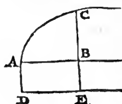
In hujus autem generis æquationibus concipiendum eſt quod fluxiones in ſingulis terminis ſint ejuſdem ordinis, id eſt vel omnes primi

ordinis $\dot{y}$, $\dot{z}$, vel omnes secundi $\ddot{y}$, $\dot{y}^2$, $\dot{y}\dot{z}$, $\dot{z}^2$, vel omnes tertii $\dddot{y}$, $\ddot{y}\dot{y}$, $\ddot{y}\dot{z}$, $\dot{y}^3$, $\dot{y}^2\dot{z}$, $\dot{y}\dot{z}^2$, $\dot{z}^3$, &c. Et ubi res aliter se habet complendus est ordo per subintellectas fluxiones quantitatis uniformiter fluentis. Sic æquatio novissima complendo ordinem tertium fit $9z\dddot{y}y^2 + 18\dot{z}\dot{y}^2y + 3\ddot{z}\dot{y}y^2 + 18\dddot{z}yyy + 6\dot{z}y^3 - 24\dot{z}z^3 = 0$.

PROP. II. PROB. II.

Invenire Curvas quæ quadrari possunt.

Sit ABC figura invenienda, BC Ordinatim applicata rectangula, & AB abscissa. Producatur CB ad E ut sit BE $=1$, & compleatur parallelogrammum ABED, & arearum ABC, ABED fluxiones erunt ut BC & BE. Assumatur igitur æquatio quævis qua relatio arearum definiatur, & inde dabitur relatio ordinatarum BC & BE per Prop. 1. Q. E. I.



Hujus rei exempla habentur in Propositionibus duabus sequentibus.

PROP. III. THEOR. I.

Si pro abscissa AB & area AE seu AB $\times$ 1 promiscue scribatur z, & si pro $e + fz^\eta + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} +$ &c. scribatur R: sit autem area Curvæ $z^\theta R^\lambda$, erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\theta e + \overline{\theta + \lambda\eta} \times fz^\eta + \overline{\theta + 2\lambda\eta} \times gz^{2\eta} + \overline{\theta + 3\lambda\eta} \times hz^{3\eta} + \&c. \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}.$$

Demonstratio.

Nam si sit $z^\theta R^\lambda = v$, erit (per Prop. 1) $\theta\dot{z}z^{\theta-1}R^\lambda + \lambda z^\theta\dot{R}R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Pro R^λ in primo æquationis termino & z^θ in secundo scribe $RR^{\lambda-1}$ & $zz^{\theta-1}$, & fiet $\theta\dot{z}R + \lambda z\dot{R}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1} = \dot{v}$. Erat autem $R = e + fz^\eta$ $+ gz^{2\eta}$

$+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+$&c. & inde (per Prop. 1) fit $\dot{R}=\eta f\dot{z}z^{\eta-1}+2\eta g\dot{z}z^{2\eta-1}+3\eta h\dot{z}z^{3\eta-1}+$&c. quibus ſubſtitutis & ſcripta BE ſeu 1 pro $\dot{z}$, fiet

$$\overline{\theta e+\overline{\theta+\lambda\eta}\times fz^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2\eta}+\overline{\theta+3\lambda\eta}\times hz^{3\eta}+\&c.}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}=\dot{v}=BC.$$

Q. E. D.

PROP. IV. THEOR. II.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & ſi pro $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+$&c. ſcribatur R, & pro $k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+$&c. ſcribatur S; ſit autem area Curvæ $z_{\theta}R_{\lambda}S_{\mu}$: Erit ordinatim applicata BC æqualis

$$\left.\begin{array}{l} \theta ek+\overline{\theta+\lambda\eta}\times fkz^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gkz^{2\eta}\ \ldots\ast\ldots\ast\ldots \\ +\overline{\theta+\mu\eta}\times elz^{\eta}+\overline{\theta+\lambda\eta+\mu\eta}\times flz^{2\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta+\mu\eta}\times glz^{3\eta}\ \ldots\ast\ldots \\ +\overline{\theta+2\mu\eta}\times emz^{2\eta}+\overline{\theta+\lambda\eta+2\mu\eta}\times fmz^{3\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta+2\mu\eta}\times gmz^{4\eta} \end{array}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$$

Demonſtratur ad modum Propoſitionis ſuperioris.

PROP. V. THEOR. III.

Si Curvæ abſciſſa AB ſit z, & pro $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+$&c. ſcribatur R: ſit autem Ordinatim applicata $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}\times\overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+dz^{3\eta}+\&c.}$ & ponatur $\frac{\theta}{\eta}=r$, $r+\lambda=s$, $s+\lambda=t$, $t+\lambda=v$, &c.

Erit Area $=z^{\theta}R^{\lambda}$ in $+\frac{\frac{1}{\eta}a}{re}$

$$+\frac{\frac{1}{\eta}b-sfA}{\overline{r+1}\times e}z^{\eta}$$

$$+\frac{\frac{1}{\eta}c-\overline{s+1}\times fB-tgA}{\overline{r+2}\times e}z^{2\eta}$$

$$+\frac{\frac{1}{\eta}d-\overline{s+2}\times fC-\overline{t+1}\times gB-vhA}{\overline{r+3}\times e}z^{3\eta}$$

$$+\frac{-\overline{s+3}\times fD-\overline{t+2}\times gC-\overline{v+1}\times hB}{\overline{r+4}\times e}z^{4\eta}$$

+&c.

 Ubi

Ubi A, B, C, D, &c. denotant totas coefficientes datas terminorum fingulorum in ferie cum fignis fuis + & —, nempe

A primi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{\eta}a}{re}$

B fecundi termini coefficientem $\frac{\frac{1}{\eta}b - sfA}{\overline{r+1}\times e}$

C tertii termini coefficientem $\frac{\frac{1}{\eta}c - \overline{s+1}\times fB - tgA}{\overline{r+2}\times e}$

Et fic deinceps.

Demonftratio.

Sunto juxta Propofitionem tertiam.

CURVARUM ORDINATÆ | AREÆ

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \theta eA + \overline{\theta+\lambda\eta}\times fAz^{\eta} + \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gAz^{2\eta} + \overline{\theta+3\lambda\eta}\times hAz^{3\eta},\ \&c. \\ 2. & + \overline{\theta+\eta}\times eBz^{\eta} + \overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fBz^{2\eta} + \overline{\theta+\eta+2\lambda\eta}\times gBz^{3\eta}\ \&c. \\ 3. & + \overline{\theta+2\eta}\times eCz^{2\eta} + \overline{\theta+2\eta+\lambda\eta}\times fCz^{3\eta}\ \&c. \\ 4. & + \overline{\theta+3\eta}\times eDz^{3\eta}\ \&c. \end{array}\right\} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} \left\{\begin{array}{l} Az^{\theta}R^{\lambda} \\ Bz^{\theta+\eta}R^{\lambda} \\ Cz^{\theta+2\eta}R^{\lambda} \\ Dz^{\theta+3\eta}R^{\lambda} \end{array}\right.$$

Et fi fumma Ordinatarum ponatur æqualis Ordinatæ $a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} +$ &c. in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, fumma arearum $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A + Bz^{\eta} + Cz^{2\eta} + Dz^{3\eta} +$ &c. æqualis erit areæ Curvæ cujus ifta eft Ordinata. Æquentur igitur Ordinatarum termini correfpondentes,

& fiet $a = \theta eA$,
$b = \overline{\theta+\lambda\eta}\times fA + \overline{\theta+\eta}\times eB$,
$c = \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gA + \overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fB + \overline{\theta+2\eta}\times eC$,
&c.

& inde $A = \frac{a}{\theta e}$
$B = \frac{b - \overline{\theta+\lambda\eta}\times fA}{\overline{\theta+\eta}\times e}$
$C = \frac{c - \overline{\theta+2\lambda\eta}\times gA - \overline{\theta+\eta+\lambda\eta}\times fB}{\overline{\theta+2\eta}\times e}$.

Et fic deinceps in infinitum.

Pone

Pone jam $\frac{\theta}{\eta} = r$, $r + \lambda = s$, $s + \lambda = t$, &c. & in area $z^\theta R^\lambda$ in $A + Bz^\eta + Cz^{2\eta} + Dz^{3\eta} +$ &c. scribe ipsorum A, B, C, &c. valores inventos, & prodibit series proposita. Q. E. D.

Et notandum est quod Ordinata omnis duobus modis in seriem resolvitur. Nam index η vel affirmativus esse potest vel negativus.

Proponatur Ordinata $\frac{3k - lzz}{zz\sqrt{kz - lz^3 + mz^4}}$: Hæc vel sic scribi potest

$z^{-\frac{5}{2}} \times \overline{3k - lz^2} \times \overline{k - lz^2 + mz^3}|^{-\frac{1}{2}}$,

vel sic $z^{-2} \times \overline{-l + 3kz^{-2}} \times \overline{m - lz^{-1} + kz^{-3}}|^{-\frac{1}{2}}$.

In casu priore est $a = 3k$, $b = 0$, $c = -l$, $e = k$, $f = 0$, $g = -l$, $h = m$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\eta = 1$, $\theta - 1 = -\frac{5}{2}$, $\theta = -\frac{3}{2} = r$, $s = -1$, $t = -\frac{1}{2}$, $v = 0$.

In posteriore est $a = -l$, $b = 0$, $c = 3k$, $e = m$, $f = -l$, $g = 0$, $h = k$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\eta = -1$, $\theta - 1 = -2$, $\theta = -1$, $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$, $t = 2$, $v = 2\frac{1}{2}$. Tentandus est casus uterque. Et si serierum alterutra ob terminos tandem deficientes abrumpitur ac terminatur habebitur area Curvæ in terminis finitis. Sic in exempli hujus priore casu scribendo in serie valores ipsorum a, b, c, e, f, g, h, λ, θ, r, s, t, v; termini omnes post primum evanescunt in infinitum & area Curvæ prodit $-2\sqrt{\frac{k - lz^2 + mz^3}{z^3}}$. Et hæc area ob signum negativum adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ. Nam area omnis affirmativa adjacet tam abscissæ quam ordinatæ, negativa vero cadit ad contrarias partes ordinatæ & adjacet abscissæ productæ, manente scilicet signo Ordinatæ. Hoc modo series alterutra & nonnunquam utraque semper terminatur & finita evadit si Curva geometrice quadrari potest. At si Curva talem quadraturam non admittit, series utraque continuabitur in infinitum, & earum altera converget & aream dabit approximando, præterquam ubi r (propter aream infinitam) vel nihil est vel numerus integer & negativus, vel ubi $\frac{z^\eta}{e}$ æqualis est unitati. Si $\frac{z^\eta}{e}$ minor est unitate, converget series in qua index η affirmativus est: sin $\frac{z^\eta}{e}$ unitate major est, converget series altera. Si in uno casu area adjacet abscissæ ad usque ordinatam ductæ, in altero adjacet abscissæ ultra ordinatam productæ.

Nota insuper quod si Ordinata contentum est sub factore rationali Q & factore surdo irreducibili R^π & factoris surdi latus R non dividit factorem rationalem Q; erit $\lambda - 1 \quad \pi$ & $R^{\lambda - 1} = R^\pi$. Sin factoris sur-

di latus R dividit factorem rationalem semel, erit $\lambda - 1 = \pi + 1$ & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+1}$: si dividit bis, erit $\lambda - 1 = \pi + 2$ & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+2}$: si ter, erit $\lambda - 1 = \pi + 3$, & $R^{\lambda-1} = R^{\pi+3}$: & sic deinceps.

Si Ordinata est fractio rationalis irreducibilis cum denominatore ex duobus vel pluribus terminis composito: resolvendus est denominator in divisores suos omnes primos. Et si divisor sit aliquis cui nullus alius est æqualis, Curva quadrari nequit: Sin duo vel plures sint divisores æquales, rejiciendus est eorum unus, & si adhuc alii duo vel plures sint sibi mutuo æquales & prioribus inæquales, rejiciendus est etiam eorum unus, & sic in aliis omnibus æqualibus si adhuc plures sint: deinde divisor qui relinquitur vel contentum sub divisoribus omnibus qui relinquuntur, si plures sunt, ponendum est pro R, & ejus quadrati reciprocum R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$, præterquam ubi contentum illud est quadratum vel cubus vel quadratoquadratum, &c. quo casu ejus latus ponendum est pro R & potestatis index 2 vel 3 vel 4 negative sumptus pro λ. & Ordinata ad denominatorem R^2 vel R^3 vel R^4 vel R^5 &c. reducenda.

Ut si Ordinata sit $\frac{z^5 + z^4 - 8z^3}{z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 8z - 4}$; quoniam hæc fractio irreducibilis est & denominatoris divisores sunt pares, nempe $z - 1$, $z - 1$, $z - 1$ & $z + 2$, $z + 2$, rejicio magnitudinis utriusque divisorem unum, & reliquorum $z - 1$, $z - 1$, $z + 2$ contentum $z^3 - 3z + 2$ pono pro R & ejus quadrati reciprocum $\frac{1}{R^2}$ seu R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$. Dein Ordinatam ad denominatorem R^2 seu $R^{1-\lambda}$ reduco, & fit $\frac{z^6 - 9z^4 + 8z^3}{\overline{z^3 - 3z + 2}|^2}$, i. e. $z^3 \times \overline{8 - 9z + z^3} \times \overline{2 - 3z + z^3}|^{-2}$ Et inde est $a = 8$, $b = -9$, $c = 0$, $d = 1$, &c. $e = 2$, $f = -3$, $g = 0$, $h = 1$, $\lambda - 1 = -2$, $\lambda = -1$, $\eta = 1$, $\theta - 1 = 3$, $\theta = 4 = r$, $s = 3$, $t = 2$, $v = 1$. Et his in serie scriptis prodit area $\frac{z^4}{z^3 - 3z + 2}$, terminis omnibus in tota serie post primum evanescentibus.

Si denique Ordinata est fractio irreducibilis & ejus denominator contentum est sub factore rationali Q & factore surdo irreducibili R^π, inveniendi sunt lateris R divisores omnes primi, & rejiciendus est divisor unus magnitudinis cujusque & per divisores qui restant, siqui sint, multiplicandus est factor rationalis Q: & si factum æquale est lateri R vel lateris illius potestati alicui cujus index est numerus integer, esto index ille m, & erit $\lambda - 1 = -\pi - m$, & $R^{\lambda-1} = R^{-\pi-m}$.

Ut

Ut si Ordinata sit $\frac{3q^5 - q^4x + 9q^3x^2 - q^2x^3 - 6qx^4}{q^2 - x^2 \times \overline{q^3 + q^2x - qx^2 - x^3}|^{\frac{1}{3}}}$, quoniam factoris surdi latus R seu $q^3 + q^2x - qx^2 - x^3$ divisores habet $q+x$, $q+x$, $q-x$ qui duarum sunt magnitudinum, rejicio divisorem unum magnitudinis utriusque & per divisorem $q+x$ qui relinquitur, multiplico factorem rationalem $q^2 - x^2$. Et quoniam factum $q^3 + q^2x - qx^2 - x^3$ æquale est lateri R, pono $m=1$, & inde, cum π sit $\frac{1}{3}$, fit $\lambda - 1 = -\frac{4}{3}$. Ordinatam igitur reduco ad denominatorem $R^{\frac{4}{3}}$, & fit

$$x^0 \times \overline{3q^6 + 2q^5x + 8q^4x^2 + 8q^3x^3 - 7q^2x^4 - 6qx^5} \times \overline{q^3 + q^2x - qx^2 - x^3}|^{-\frac{4}{3}}$$

Unde est $a = 3q^6$, $b = 2q^5$ &c. $e = q^3$, $f = q^2$ &c. $\theta - = 0$, $\theta = 1 = \eta$, $\lambda = -\frac{1}{3}$, $r = 1$, $s = \frac{2}{3}$, $t = \frac{1}{3}$, $v = 0$. Et his in serie scriptis prodit area $\frac{3q^2x + 3x^3}{\overline{q^3 + q^2x - qx^2 - x^3}|^{\frac{1}{3}}}$, terminis omnibus in serie tota post tertium evanescentibus.

PROP. VI. THEOR. IV.

Si Curvæ abscissa AB sit z, & scribantur R pro $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta}$ + &c. & S pro $k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + nz^{3\eta}$ + &c. sit autem Ordinatim applicata $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} S^{\mu - 1}$ in $a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta}$ + &c. & si terminorum, e, f, g, h, &c. & k, l, m, n, &c. rectangula sint

ek fk gk hk &c.
el fl gl hl &c.
em fm gm hm &c.
en fn gn hn &c.

Et si rectangulorum illorum coefficientes numerales sint respective

$$\frac{\theta}{\eta} = r. \quad r + \lambda = s. \quad s + \lambda = t. \quad t + \lambda = v. \quad \&c.$$

$$r + \mu = s'. \quad s + \mu = t'. \quad t + \mu = v'. \quad v + \mu = w'. \quad \&c.$$

$$s' + \mu = t''. \quad t' + \mu = v''. \quad v' + \mu = w''. \quad w' + \mu = x''. \quad \&c.$$

$$t'' + \mu = v'''. \quad v'' + \mu = w'''. \quad w'' + \mu = x'''. \quad x'' + \mu = y'''. \quad \&c.$$

Area

Area Curvæ erit hæc

$$z^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu} \text{ in } + \frac{\frac{1}{n}a}{rek}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}b - sfkA - s'elA}{\overline{r+1} \times ek} z^{\eta}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}c - \overline{s+1} \times fkB - \overline{s'+1} \times elB - tgkA - t'flA - t''emA}{\overline{r+2} \times ek} z^{2\eta}$$

$$+ \frac{\frac{1}{n}d - \overline{s+2} \times fkC - \overline{s'+2} \times elC - \overline{t+1} \times gkB - \overline{t'+1} \times flB - \overline{t''+1} \times emB - vhkA - v'glA - v''fmA - v'''enA}{\overline{r+3} \times ek} z^{3\eta}$$

$$+ \&c.$$

Ubi A denotat termini primi coefficientem datam $\frac{\frac{1}{n}a}{rek}$ cum signo suo $+$ vel $-$, B coefficientem datam secundi, C coefficientem datam tertii, & sic deinceps. Terminorum vero, a, b, c, &c. e, f, g, &c. k, l, m, &c. unus vel plures deesse possunt.

Demonstratur Propositio ad modum præcedentis, & quæ ibi notantur hic obtinent. Pergit autem series talium Propositionum in infinitum, & progressio seriei manifesta est.

PROP. VII. THEOR. V.

Si pro $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} +$ &c. scribatur R ut supra, & in Curvæ alicujus Ordinata $z^{\theta \pm \sigma\eta} R^{\lambda \pm \tau}$ maneant quantitates datæ θ, η, λ, e, f, g, &c. & pro σ ac τ scribantur successive numeri quicunque integri: & si detur Area unius ex Curvis quæ per Ordinatas innumeras sic prodeuntes designantur si Ordinatæ sunt duorum nominum in vinculo radicis, vel si dentur Areæ duarum ex Curvis si Ordinatæ sunt trium nominum in vinculo radicis, vel Areæ trium ex Curvis si Ordinatæ sunt quatuor nominum in vinculo radicis, & sic deinceps in infinitum: dico quod dabuntur Areæ curvarum omnium. Pro nominibus hic habeo terminos omnes in vinculo radicis tam deficientes quam plenos quorum indices dignitatum sunt in progressione arithmetica. Sic Ordinata $\sqrt{a^4 - ax^3 + x^4}$ ob terminos duos inter a^4 & $-ax^3$ deficientes pro quinquinomio haberi debet.

At

At $\sqrt{a^4+x^4}$ binomium eſt, & $\sqrt{a^4+x^4-\frac{x^8}{a^4}}$ trinomium, cum progreſſio jam per majores differentias procedat. Propoſitio vero ſic demonſtratur.

CAS. I.

Sunto Curvarum duarum Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ & $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$, & Areæ pA & qB, exiſtente R quantitate trium nominum $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$. Et cum per Prop. 3. ſit $z^{\theta}R^{\lambda}$ area Curvæ cujus Ordinata eſt $\theta e+\overline{\theta+\lambda\eta}\times fz^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2\eta}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, ſubduc Ordinatas & Areas priores de Area & Ordinata poſteriori, & manebit $\theta e-p+\overline{\theta+\lambda\eta}\times f-q\times z^{\eta}+\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ Ordinata nova Curvæ, & $z^{\theta}R^{\lambda}-pA-qB$ ejuſdem Area. Pone $\theta e=p$, & $\theta f+\lambda\eta f=q$, & Ordinata evadet $\overline{\theta+2\lambda\eta}\times gz^{2\eta}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, & Area $z^{\theta}R^{\lambda}-\theta eA-\theta fB-\lambda\eta fB$. Divide utramque per $\theta g+2\lambda\eta g$, & Aream prodeuntem dic C, & aſſumpta utcunque r, erit rC Area Curvæ cujus Ordinata eſt $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$. Et qua ratione ex Areis pA & qB Aream rC Ordinatæ $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$ congruentem invenimus, licebit ex Areis qB & rC Aream quartam puta sD, Ordinatæ $sz^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}$ congruentem invenire, & ſic deinceps in infinitum. Et par eſt ratio progreſſionis ab Areis B & A in partem contrariam pergentis. Si terminorum θ, $\theta+\lambda\eta$, & $\theta+2\lambda\eta$ aliquis deficit & ſeriem abrumpit, aſſumatur Area pA in principio progreſſionis unius & Area qB in principio alterius, & ex his duabus Areis dabuntur Areæ omnes in progreſſione utraque. Et contra, ex aliis duabus Areis aſſumptis fit regreſſus per Analyſin ad Areas A & B, adeo ut ex duabus datis cæteræ omnes dentur. Q. E. O.

Hic eſt caſus Curvarum ubi ipſius z index θ augetur vel diminuitur perpetua additione vel ſubductione quantitatis η. Caſus alter eſt Curvarum ubi index λ augetur vel diminuitur unitatibus.

CAS. II.

Ordinatæ $pz^{\theta-1}R^{\lambda}$ & $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}$, quibus Areæ pA & qB jam reſpondeant, ſi in R ſeu $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$ ducantur ac deinde ad R viciſſim applicentur, evadunt $\overline{pe+pfz^{\eta}+pgz^{2\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, & $\overline{qez^{\eta}+qfz^{2\eta}+qgz^{3\eta}}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$.

ſubductione unitatis, utcunque augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ſingulis prodeuntibus Ordinatis reſpondentes. Q. E. O.

CAS. IV.

Et ſimili argumento ſi Ordinata conſtat ex quatuor nominibus in vinculo radicali & dantur tres Arearum, vel ſi conſtat ex quinque nominibus & dantur quatuor Arearum, & ſic deinceps: dabuntur Areæ omnes quæ addendo vel ſubducendo numerum η indici θ vel unitatem indici λ generari poſſunt. Et par eſt ratio Curvarum ubi Ordinatæ ex binomiis conſtantur, & Area una earum quæ non ſunt Geometrice quadrabiles datur. Q. E. O.

PROP. VIII. THEOR. VI.

Si pro $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+$ &c. & $k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+$ &c. ſcribantur R & S ut ſupra, & in Curvæ alicujus Ordinata $z^{\theta\pm\sigma\eta} R^{\lambda\pm\tau} S^{\mu\pm\upsilon}$ maneant quantitates datæ θ, η, λ, μ, e, f, g, k, l, m, &c. & pro σ, τ, & υ, ſcribantur ſucceſſive numeri quicunque integri: & ſi dentur Areæ duarum ex curvis quæ per Ordinatas ſic prodeuntes deſignantur ſi quantitates R & S ſunt binomia, vel ſi dentur Areæ trium ex curvis ſi R & S conjunctim ex quinque nominibus conſtant, vel Areæ quatuor ex curvis ſi R & S conjunctim ex ſex nominibus conſtant, & ſic deinceps in infinitum: dico quod dabuntur Areæ curvarum omnium.

Demonſtratur ad modum propoſitionis ſuperioris.

PROP. IX. THEOR. VII.

Æquantur Curvarum Areæ inter ſe quarum Ordinatæ ſunt reciproce ut fluxiones Abſciſſarum.

Nam contenta ſub Ordinatis & fluxionibus Abſciſſarum erunt æqualia, & fluxiones Arearum ſunt ut hæc contenta.

COROL. I.

Si aſſumatur relatio quævis inter Abſciſſas duarum Curvarum, & inde per Prop. 1. quæratur relatio fluxionum Abſciſſarum, &

H 2 po-

ponantur Ordinatæ reciproce proportionales fluxionibus, inveniri possunt innumeræ Curvæ quarum Areæ sibi mutuo æquales erunt.

COROL. II.

Si enim Curva omnis cujus hæc est Ordinata $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda}$, assumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{\eta}{\nu} = s$, & $z^{s} = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{1}{s} x^{\frac{\nu\theta-\nu}{\eta}} \times \overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}$.

COROL. III.

Et Curva omnis cujus Ordinata est $z^{\theta-1} \times \overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\&c.} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda}$, assumendo quantitatem quamvis pro ν & ponendo $\frac{\eta}{\nu} = s$, & $z^{s} = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{1}{s} x^{\frac{\nu\theta-\nu}{\eta}} \times \overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.} \times \overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}$.

COROL. IV.

Et Curva omnis cujus Ordinata est $z^{\theta-1} \times \overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\&c.} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda} \times \overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\&c.}|^{\mu}$, assumendo quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{\eta}{\nu} = s$, & $z^{s} = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{1}{s} x^{\frac{\nu\theta-\nu}{\eta}} \times \overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.} \times \overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda} \times \overline{k+lx^{\nu}+mx^{2\nu}+\&c.}|^{\mu}$

COROL. V.

Et Curva omnis cujus Ordinata est $z^{\theta-1} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda}$, ponendo $\frac{1}{z} = x$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{1}{x^{\theta+1}} \times \overline{e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\&c.}|^{\lambda}$ id est $\frac{1}{x^{\theta+1+\eta\lambda}} \times \overline{f+ex^{\eta}}|^{\lambda}$ si duo sunt nomina in vinculo radicis, vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2\eta\lambda}} \times \overline{g+fx^{\eta}+ex^{2\eta}}|^{\lambda}$ si tria sunt nomina; & sic deinceps.

COROL. VI.

Et Curva omnis cujus Ordinata est $z^{\theta-1}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}\times\overline{k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c.}|^{\mu}$, ponendo $\frac{1}{z}=x$; migrat in aliam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{1}{x^{\theta+1}}\times\overline{e+fx^{-n}+gx^{-2n}+\&c.}|^{\lambda}\times\overline{k+lx^{-n}+mx^{-2n}+\&c.}|^{\mu}$ id est $\frac{1}{x^{\theta+1+n\lambda+n\mu}}\times\overline{f+ex^{n}}|^{\lambda}\times\overline{l+kx^{n}}|^{\mu}$ si bina sunt nomina in vinculis radicum, vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda+n\mu}}\times\overline{g+fx^{n}+ex^{2n}}|^{\lambda}\times\overline{l+kx^{n}}|^{\mu}$ si tria sunt nomina in vinculo radicis prioris ac duo in vinculo posterioris: & sic in aliis.

Et nota quod Areæ duæ æquales in novissimis hisce duobus Corollariis jacent ad contrarias partes Ordinatarum. Si Area in alterutra Curva adjacet Abscissæ, Area huic æqualis in altera Curva adjacet Abscissæ productæ.

COROL. VII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abscissam z definiatur per æquationem quamvis affectam hujus formæ,

$$y^{\alpha}\times\overline{e+fy^{n}z^{\delta}+gy^{2n}z^{2\delta}+hy^{3n}z^{3\delta}+\&c.}=z^{\beta}\times\overline{k+ly^{n}z^{\delta}+my^{2n}z^{2\delta}+\&c.}$$

hæc Figura assumendo $s=\frac{n-\delta}{n}$, $x=\frac{1}{s}z^{s}$, & $\lambda=\frac{n-\delta}{\alpha\delta-\beta n}$, migrat in aliam sibi æqualem cujus Abscissa x, ex data Ordinata v, determinatur per æquationem non affectam $\frac{1}{s}v^{\alpha\lambda}\times\overline{e+fv^{n}+gv^{2n}+\&c.}|^{\lambda}\times\overline{k+lv^{n}+mv^{2n}+\&c.}|^{-\lambda}=x$.

COROL. VIII.

Si relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abscissam z definitur per æquationem quamvis affectam hujus formæ,

$$y^{\alpha}\times\overline{e+fy^{n}z^{\delta}+gy^{2n}z^{2\delta}+\&c.}=z^{\beta}\times\overline{k+ly^{n}z^{\delta}+my^{2n}z^{2\delta}+\&c.}$$
$$+z^{\gamma}\times\overline{p+qy^{n}z^{\delta}+ry^{2n}z^{2\delta}+\&c.}$$

hæc Figura assumendo $s=\frac{n-\delta}{n}$, $x=\frac{1}{s}z^{s}$, $\mu=\frac{\alpha\delta+\beta n}{n-\delta}$, $\nu=\frac{\alpha\delta+\gamma n}{n-\delta}$, migrat

in aliam ſibi æqualem cujus Abſciſſa x ex data Ordinata v determinatur per æquationem minus affectam $v^{\alpha} \times \overline{e+fv^{\eta}+gv^{2\eta}+\&c.}$
$$= s^{\mu}x^{\mu} \times \overline{k+lv^{\eta}+mv^{2\eta}+\&c.}$$
$$+ s^{\nu}x^{\nu} \times \overline{p+qv^{\eta}+rv^{2\eta}+\&c.}$$

COROL. IX.

Curva omnis cujus Ordinata eſt
$\pi z^{\theta-1} \times \overline{\nu e + \overline{\nu+\eta} f z^{\eta} + \overline{\nu+2\eta} g z^{2\eta} + \&c.} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$ in $\overline{a+b \times \overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+\&c.}|^{\tau}}|^{\omega}$, ſi ſit $\theta = \lambda\nu$, & aſſumantur $x = \overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+\&c.}|^{\pi}$, $\sigma = \frac{\tau}{\pi}$, & $\vartheta = \frac{\lambda-\pi}{\pi}$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta} \times \overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega}$. Et nota quod Ordinata prior in hoc Corollario evadit ſimplicior ponendo $\lambda = 1$, vel ponendo $\tau = 1$, & efficiendo ut radix dignitatis extrahi poſſit cujus index eſt ω, vel etiam ponendo $\omega = -1$, & $\lambda = 1 = \tau = \sigma = \pi$, ut alios caſus prætercam.

COROL. X.

Pro $\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+\eta}+gz^{\nu+2\eta}+\&c.}$ $\overline{\nu e z^{\nu-1} + \overline{\nu+\eta} f z^{\nu+\eta-1} + \overline{\nu+2\eta} g z^{\nu+2\eta-1} + \&c.}$ $\overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\&c.}$ & $\overline{\eta l z^{\eta-1} + 2\eta m z^{2\eta-1} + \&c.}$ ſcribantur R, $\dot{r}$, S & $\dot{s}$ reſpective, & Curva omnis cujus Ordinata eſt $\overline{\pi S\dot{r} + \phi R\dot{s}} \times R^{\lambda-1} S^{\mu-1} \times \overline{aS^{\nu} + bR^{\tau}}|^{\omega}$, ſi ſit $\frac{\mu-\nu\omega}{\lambda} = \frac{\upsilon}{\tau} = \frac{\phi}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi} = \sigma$, $\frac{\lambda-\pi}{\pi} = \vartheta$, & $R^{\pi} S^{\phi} = x$, migrat in aliam ſibi æqualem cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta} \times \overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega}$. Et nota quod Ordinata prior evadit ſimplicior, ponendo unitates pro τ, υ, & λ vel μ, & faciendo ut radix dignitatis extrahi poſſit cujus index eſt ω, vel ponendo $\omega = -1$ vel $\mu = 0$.

PROP.

PROP. X. PROB. III.

Invenire Figuras simplicissimas cum quibus Curva quævis Geometrice comparari potest, cujus Ordinatim applicata y *per æquationem non affectam ex data Abscissa* z *determinatur.*

CAS. I.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}$, & Area erit $\frac{1}{\theta}az^{\theta}$, ut ex Prop. 5. ponendo $b=0=c=d=f=g=h$, & $e=1$, facile colligitur.

CAS. II.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$, & si Curva cum Figuris rectilineis Geometrice comparari potest, quadrabitur per Prop. 5. ponendo $b=0=c=d$. Sin minus convertetur in aliam Curvam sibi æqualem cujus Ordinata est $\frac{a}{\eta}x^{\frac{\theta-\eta}{\eta}}\times\overline{e+fx+gx^{2}+\&c.}|^{\lambda-1}$ per Corol. 2. Prop. 9. Deinde si de dignitatum indicibus $\frac{\theta-\eta}{\eta}$ & $\lambda-1$ per Prop. 7. rejiciantur unitates donec dignitates illæ fiant quam minimæ, devenietur ad Figuras simplicissimas quæ hac ratione colligi possunt. Dein harum unaquæque per Corol. 5. Prop. 9. dat aliam quæ nonnunquam simplicior est. Et ex his per Prop. 3. & Corol. 9. & 10. Prop. 9. inter se collatis, Figuræ adhuc simpliciores quandoque prodeunt. Denique ex Figuris simplicissimis assumptis facto regressu computabitur Area quæsita.

CAS. III.

Sit Ordinata $z^{\theta-1}\times\overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\&c.}\times\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$, & hæc Figura si quadrari potest, quadrabitur per Prop. 5. Sin minus, dis-

distinguenda est Ordinata in partes $z^{\theta-1} \times a \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$, $z^{\theta-1} \times bz^{\eta} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$, &c. & per Cas. 2. inveniendæ sunt Figuræ simplicissimæ cum quibus Figuræ partibus illis respondentes comparari possunt.

Nam Areæ figurarum partibus illis respondentium sub signis suis + & — conjunctæ component Aream totam quæsitam.

CAS. IV.

Sit Ordinata $z^{\theta-1} \times \overline{a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\&c.} \times \overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\&c.}|^{\lambda-1}$ in $\overline{k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\&c.}|^{\mu-1}$, & si Curva quadrari potest, quadrabitur per Prop. 6. Sin minus, convertetur in simpliciorem per Corol. 4. Prop. 9. ac inde comparabitur cum Figuris simplicissimis per Prop. 8. & Corol. 6, 9 & 10. Prop. 9. ut fit in Casu 2 & 3.

CAS. V.

Si Ordinata ex variis partibus constat, partes singulæ pro Ordinatis curvarum totidem habendæ sunt, & Curvæ illæ quotquot quadrari possunt, sigillatim quadrandæ sunt, earumque Ordinatæ de Ordinata tota demendæ. Dein Curva quam Ordinatæ pars residua designat seorsim (ut in Casu 2, 3 & 4,) cum Figuris simplicissimis comparanda est cum quibus comparari potest. Et summa Arearum omnium pro Area Curvæ propositæ habenda est.

COROL. I.

Hinc etiam Curva omnis cujus Ordinata est radix quadratica affecta æquationis suæ, cum Figuris simplicissimis seu rectilineis seu curvilineis comparari potest. Nam radix illa ex duabus partibus semper constat quæ seorsim spectatæ non sunt æquationum radices affectæ.

Prop.

Proponatur æquatio $a^2y^2+z^2y^2=2a^3y+2z^3y-z^4$, & extracta radix erit $y=\frac{a^3+z^3+a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$, cujus pars rationalis $\frac{a^3+z^3}{aa+zz}$ & pars irrationalis $\frac{a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$ sunt Ordinatæ curvarum quæ per hanc Propositionem vel quadrari possunt vel cum Figuris simplicissimis comparari cum quibus collationem Geometricam admittunt.

COROL. II.

Et Curva omnis cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur quæ per Corol. 7. Prop. 9. in æquationem non affectam migrat, vel quadratur per hanc Propositionem si quadrari potest, vel comparatur cum Figuris simplicissimis cum quibus comparari potest. Et hac ratione Curva omnis quadratur cujus æquatio est trium terminorum. Nam æquatio illa si affecta sit, transmutatur in non affectam per Corol. 7. Prop. 9. ac deinde per Corol. 2. & 5. Prop. 9. in simplicissimam migrando, dat vel quadraturam Figuræ si quadrari potest, vel Curvam simplicissimam quacum comparatur.

COROL. III.

Et Curva omnis cujus Ordinata per æquationem quamvis affectam definitur quæ per Corol. 8. Prop. 9. in æquationem quadraticam affectam migrat; vel quadratur per hanc Propositionem & hujus Corol. 1. si quadrari potest, vel comparatur cum Figuris simplicissimis cum quibus collationem Geometricam admittit.

SCHOLIUM.

Ubi quadrandæ sunt Figuræ; ad Regulas hasce generales semper recurrere nimis molestum esset: præstat Figuras quæ simpliciores sunt & magis usui esse possunt semel quadrare & quadraturas in Tabu-

bulam referre, deinde Tabulam consulere quoties ejusmodi Curvam aliquam quadrare oportet. Hujus autem generis sunt Tabulæ duæ sequentes, in quibus z denotat Abscissam, y Ordinatam rectangulam, & t Aream Curvæ quadrandæ, & d, e, f, g, h, η sunt quantitates datæ cum signis suis + & —.

TABULA

Curvarum simpliciorum quæ quadrari possunt.

Curvarum Formæ			Curvarum Areæ
I		$dz^{\eta-1} = y$	$\frac{d}{\eta}z^{\eta} = t$
II		$\frac{dz^{\eta-1}}{e^2+2efz^{\eta}+f^2z^{2\eta}} = y$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta e^2+\eta efz^{\eta}} = t$ vel $\frac{-d}{\eta ef+\eta f^2z^{\eta}} = t$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{2d}{3\eta f}R^3 = t$. existente $R = \sqrt{e+fz^{\eta}}$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta f^2}dR^3 = t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{16e^2-24efz^{\eta}+30f^2z^{2\eta}}{105\eta f^3}dR^3 = t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}} = y$	$\frac{-96e^3+144e^2fz^{\eta}-180ef^2z^{2\eta}+210f^3z^{3\eta}}{945\eta f^4}dR^3 = t$
IV	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{2d}{\eta f}R = t$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta f^2}dR = t$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{16e^2-8efz^{\eta}+6f^2z^{2\eta}}{15\eta f^3}dR = t$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-96e^3+48e^2fz^{\eta}-36ef^2z^{2\eta}+30f^3z^{3\eta}}{105\eta f^4}dR = t$

In Tabulis hisce, series Curvarum cujusque formæ utrinque in infinitum continuari potest. Scilicet in Tabula prima, in numeratoribus Arearum formæ tertiæ & quartæ, numeri coefficientes initialium terminorum (2, —4, 16, —96, 868, &c.) generantur multiplicando numeros —2, —4, —6, —8, —10, &c. in se continuo, & subsequentium terminorum coefficientes ex initialibus derivantur multipli-

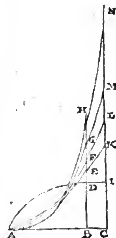
plicando ipſos gradatim, in Forma quidem tertia, per $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{6}, -\frac{7}{8}, -\frac{9}{10}$, &c. in quarta vero per $-\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}, -\frac{3}{7}, -\frac{4}{9}, -\frac{5}{11}$, &c. Et Denominatorum coefficientes 3, 15, 105, &c. prodeunt multiplicando numeros 1, 3, 5, 7, 9, &c. in ſe continue.

In ſecunda vero Tabula, ſeries Curvarum formæ primæ, ſecundæ, quintæ, ſextæ, nonæ, & decimæ ope ſolius diviſionis, & formæ reliquæ ope Propoſitionis tertiæ & quartæ, utrinque producuntur in infinitum.

Quinetiam hæ ſeries mutando ſignum numeri η variari ſolent. Sic enim *e. g.* Curva $\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$, evadit $\frac{d}{z^{\eta+1}}\sqrt{f+ez^{\eta}}=y$.

PROP. XI. THEOR. VIII.

Sit ADIC Curva quævis Abſciſſam habens $AB=z$, & Ordinatam $BD=y$, & ſit AEKC Curva alia cujus Ordinata BE æqualis eſt prioris areæ ADB ad unitatem applicatæ, & AFLC Curva tertia cujus Ordinata BF æqualis eſt ſecundæ Areæ AEB ad unitatem applicatæ, & AGMC Curva quarta cujus Ordinata BG æqualis eſt tertiæ areæ AFB ad unitatem applicatæ, & AHNC Curva quinta cujus Ordinata BH æqualis eſt quartæ Areæ AGB ad unitatem applicatæ, & ſic deinceps in infinitum. Et ſunto A, B, C, D, E, &c. Areæ Curvarum Ordinatas habentium y, zy, z^2y, z^3y, z^4y, &c. & Abſciſſam communem z.



Detur Abſciſſa quævis $AC=t$, ſitque $BC=t-z=x$, & ſunto P, Q, R, S, T Areæ Curvarum Ordinatas habentium y, xy, x^2y, x^3y, x^4y &c. & Abſciſſam communem x.

Terminentur autem hæ Areæ omnes ad Abſciſſam totam datam AC, nec non ad Ordinatam poſitione datam & infinite productam CI:

Et erit Arearum ſub initio poſitarum

Prima ADIC $=A=P$.

Secunda AEKC $=tA-B=Q$.

Ter-

Tertia AFLC $= \frac{ttA - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2}R.$

Quarta AGMC $= \frac{t^3A - 3t^2B + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6}S.$

Quinta AHNC $= \frac{t^4A - 4t^3B + 6t^2C - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24}T.$

COROL.

Unde si Curvæ quarum Ordinatæ sunt y, zy, z^2y, z^3y, &c. vel y, xy, x^2y, x^3y, &c. quadrari possunt, quadrabuntur etiam Curvæ ADIC, AEKC, AFLC, AGMC, &c. & habebuntur Ordinatæ BE, BF, BG, BH, Areis Curvarum proportionales.

SCHOLIUM.

Quantitatum fluentium Fluxiones esse primas, secundas, tertias, quartas, aliasque diximus supra. Hæ Fluxiones sunt ut termini serierum infinitarum convergentium.

Ut si z^n sit quantitas fluens & fluendo evadat $\overline{z+o}|^n$, deinde resolvatur in seriem convergentem $z^n + noz^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ooz^{n-2} + \frac{n^3-3nn+2n}{6}o^3z^{n-3}$ +&c. terminus primus hujus seriei z^n erit quantitas illa fluens, secundus noz^{n-1} erit ejus incrementum primum seu differentia prima cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio prima, tertius $\frac{nn-n}{2}ooz^{n-2}$ erit ejus incrementum secundum seu differentia secunda cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio secunda, quartus $\frac{n^3-3nn+2n}{6}o^3z^{n-3}$ erit ejus incrementum tertium seu differentia tertia cui nascenti Fluxio tertia proportionalis est, & sic deinceps in infinitum.

Exponi autem possunt hæ Fluxiones per Curvarum Ordinatas BD, BE, BF, BG, BH, &c.

Ut si Ordinata BE $(=\frac{ADB}{1})$ sit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BD.

Si BF $(=\frac{AEB}{1})$ sit quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BE, & Fluxio secunda ut Ordinata BD.

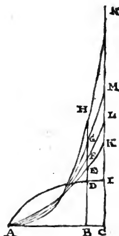
Si BH $(=\frac{AGB}{1})$ sit quantitas fluens, erunt ejus Fluxiones prima, secunda, tertia & quarta, ut Ordinatæ BG, BF, BE, BD respective.

Et hinc in æquationibus quæ quantitates tantum duas incognitas involvunt, quarum una est quantitas uniformiter fluens & altera est Fluxio qualibet quantitatis alterius fluentis, inveniri potest fluens illa

al-

altera per quadraturam Curvarum. Exponatur enim Fluxio ejus per Ordinatam BD, & si hæc sit Fluxio prima, quæratur Area ADB $= BE \times 1$, si Fluxio secunda, quæratur Area AEB$= BF \times 1$, si Fluxio tertia, quæratur Area AFB$= BG \times 1$, &c. & Area inventa erit exponens fluentis quæsitæ.

Sed & in æquationibus quæ fluentem & ejus fluxionem primam sine altera fluente, vel duas ejusdem fluentis fluxiones, primam & secundam, vel secundam & tertiam, vel tertiam & quartam, &c. sine alterutra fluente involvunt: inveniri possunt fluentes per quadraturam Curvarum. Sit æquatio $aa\dot{v} = av + vv$; existente $v = $ BE, $\dot{v} = $ BD, $z = $ AB, & $\dot{z} = 1$, & æquatio illa complendo dimensiones Fluxionum, evadet $aa\dot{v} = av\dot{z} + vv\dot{z}$, seu $\frac{aa\dot{v}}{av+vv} = \dot{z}$.



Jam fluat v uniformiter, & sit ejus Fluxio $\dot{v} = 1$, & erit $\frac{aa}{av+vv} = \dot{z}$, & quadrando Curvam cujus Ordinata est $\frac{aa}{av+vv}$ & Abscissa v, habebitur fluens z. Adhæc sit æquatio $aa\ddot{v} = a\dot{v} + \dot{v}\dot{v}$, existente $v = $ BF, $\dot{v} = $ BE, $\ddot{v} = $ BD, & $z = $ AB, & per relationem inter $\ddot{v}$ & $\dot{v}$ seu BD & BE invenietur relatio inter AB & BE, ut in exemplo superiore. Deinde per hanc relationem invenietur relatio inter AB & BF quadrando Curvam AEB.

Æquationes quæ tres incognitas quantitates involvunt aliquando reduci possunt ad æquationes quæ duas tantum involvunt, & in his casibus fluentes invenientur ex fluxionibus ut supra. Sit æquatio $a - bx^m = cxy^n\dot{y} + dy^{2n}\dot{y}\dot{y}$, ponatur $y^n\dot{y} = \dot{v}$, & erit $a - bx^m = cx\dot{v} + d\dot{v}\dot{v}$. Hæc æquatio quadrando Curvam cujus Abscissa est x & Ordinata $\dot{v}$ dat Aream v; & æquatio altera $y^n\dot{y} = \dot{v}$, regrediendo ad fluentes, dat $\frac{1}{n+1}y^{n+1} = v$: Unde habetur fluens y.

Quinetiam in æquationibus, quæ tres incognitas involvunt, & ad æquationes quæ duas tantum involvunt, reduci non possunt, fluentes quandoque prodeunt per quadraturam Curvarum. Sit æquatio $\overline{ax^m + bx^n}|^p = rex^{r-1}y^s + sex^r\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^t$, existente $\dot{x} = 1$; Et pars posterior

rior

rior $rex^{r-1}y^{s}+sex^{r}\dot{y}y^{s-1}-f\dot{y}y^{t}$, regrediendo ad fluentes, fit $ex^{r}y^{s}-\frac{f}{t+1}y^{t+1}$, quæ proinde eſt ut Area Curvæ cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata $\overline{ax^{m}+bx^{n}}|^{p}$, & inde datur fluens y.

Sit æquatio $\dot{x}\times\overline{ax^{m}+bx^{n}}|^{p}=\frac{d\dot{y}y^{n-1}}{\sqrt{e+fy^{n}}}$, Et fluens cujus Fluxio eſt $\dot{x}\times\overline{ax^{m}+bx^{n}}|^{p}$ erit ut Area Curvæ cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata eſt $\overline{ax^{m}+bx^{n}}|^{p}$. Item fluens cujus Fluxio eſt $\frac{d\dot{y}y^{n-1}}{\sqrt{e+fy^{n}}}$ erit ut Area Curvæ cujus Abſciſſa eſt y & Ordinata $\frac{dy^{n-1}}{\sqrt{e+fy^{n}}}$, id eſt (per Caſum 1. Formæ quartæ Tab. I.) ut Area $\frac{2d}{nf}\sqrt{e+fy^{n}}$. Pono ergo $\frac{2d}{nf}\sqrt{e+fy^{n}}$ æqualem Areæ Curvæ cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata $\overline{ax^{m}+bx^{n}}|^{p}$, & habebitur fluens y.

Et nota quod fluens omnis, quæ ex Fluxione prima colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quavis non fluente. Qua ex Fluxione ſecunda colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quavis cujus Fluxio ſecunda nulla eſt. Quæ ex fluxione tertia colligitur, augeri poteſt vel minui quantitate quavis cujus fluxio tertia nulla eſt. Et ſic deinceps in infinitum.

Poſtquam fluentes ex fluxionibus collectæ ſunt, ſi de veritate Concluſionis dubitatur, fluxiones fluentium inventarum viciſſim colligendæ ſunt, & cum Fluxionibus ſub initio propoſitis comparandæ. Nam ſi prodeunt æquales, Concluſio recte ſe habet: ſin minus, corrigendæ ſunt fluentes ſic, ut earum Fluxiones fluxionibus ſub initio propoſitis æquentur. Nam & fluens pro lubitu aſſumi poteſt, & aſſumptio corrigi, ponendo fluxionem fluentis aſſumptæ æqualem Fluxioni propoſitæ, & terminos homologos inter ſe comparando.

Et his principiis via ad majora ſternitur.

ENUMERATIO
LINEARUM
TERTII ORDINIS.

ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS.

I. *Linearum Ordines.*


Ineæ Geometricæ ſecundum numerum dimenſionum æquationis qua relatio inter Ordinatas & Abſciſſas definitur, vel (quod perinde eſt) ſecundum numerum punctorum in quibus a linea recta ſecari poſſunt, optime diſtinguuntur in Ordines. Qua ratione linea primi Ordinis erit Recta ſola, eæ ſecundi ſive quadratici Ordinis erunt ſectiones Conicæ & Circulus, & eæ tertii ſive cubici Ordinis Parabola Cubica, Parabola *Neiliana*, Ciſſois veterum, & reliquæ quas hic enumerare ſuſcepimus. Curva autem primi Generis, (ſiquidem recta inter Curvas non eſt numeranda) eadem eſt cum Linea ſecundi Ordinis, & Curva ſecundi Generis eadem cum Linea Ordinis tertii. Et Linea Ordinis infiniteſimi ea eſt quam recta in punctis infinitis ſecare poteſt, qualis eſt Spiralis, Cycloïs, Quadratrix, & linea omnis quæ per radii vel rotæ revolutiones infinitas generatur.

II. *Proprietates Sectionum Conicarum competunt Curvis ſuperiorum Generum.*

Sectionum Conicarum proprietates præcipuæ a Geometris paſſim traduntur. Et conſimiles ſunt proprietates Curvarum ſecundi Generis, & reliquarum, ut ex ſequenti proprietatum præcipuarum enumeratione conſtabit.

1. *De Curvarum secundi generis Ordinatis, Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si rectæ plures parallelæ & ad Conicam sectionem utrinque terminatæ ducantur, recta duas earum bisecans bisecabit alias omnes, ideoque dicitur *Diameter* figuræ & rectæ bisectæ dicuntur *Ordinatim applicatæ* ad Diametrum, & concursus omnium Diametrorum est *Centrum* figuræ, & intersectio Curvæ & diametri *Vertex* nominatur, & diameter illa *Axis* est cui Ordinatim applicatæ insistunt ad angulos rectos. Et ad eundem modum in Curvis secundi Generis, si rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus punctis: recta quæ ita secat has parallelas ut summa duarum partium ex uno secantis latere ad Curvam terminatarum æquetur parti tertiæ ex altero latere ad curvam terminatæ, eodem modo secabit omnes alias his parallelas curvæque in tribus punctis occurrentes rectas, hoc est, ita ut summa partium duarum ex uno ipsius latere semper æquetur parti tertiæ ex altero latere. Has itaque tres partes quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim applicatas*, & rectam secantem cui Ordinatim applicantur *Diametrum*, & intersectionem diametri & Curvæ *Verticem*, & concursum duarum Diametrorum *Centrum* nominare licet. Diameter autem ad Ordinatas rectangula si modo aliqua sit, etiam *Axis* dici potest, & ubi omnes Diametri in eodem puncto concurrunt, illud erit *Centrum generale*.

2. *De Asymptotis & earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Asymptotos*, ea secundi tres, ea tertii quatuor & non plures habere potest, & sic in reliquis. Et quemadmodum partes lineæ cujusvis rectæ inter Hyperbolam Conicam & duas ejus Asymptotos sunt hinc inde æquales: sic in Hyperbolis secundi Generis si ducatur recta quævis secans tam Curvam quam tres ejus Asymptotos in tribus punctis, summa duarum partium istius rectæ quæ a duobus quibusvis Asymptotis in eandem plagam ad duo puncta Curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ quæ a tertia Asymptoto in plagam contrariam ad tertium Curvæ punctum extenditur.

3. De

3. *De Lateribus rectis & transversis.*

Et quemadmodum in Conicis sectionibus non Parabolicis quadratum Ordinatim applicatæ, hoc est, rectangulum Ordinatarum quæ ad contrarias partes Diametri ducuntur, est ad rectangulum partium Diametri quæ ad Vertices Ellipseos vel Hyperbolæ terminantur, ut data quædam linea quæ dicitur *Latus rectum*, ad partem Diametri quæ inter Vertices jacet & dicitur *Latus transversum*: sic in Curvis non Parabolicis secundi Generis parallelepipedum sub tribus Ordinatim applicatis est ad parallelepipedum sub partibus Diametri ad Ordinatas & tres Vertices figuræ abscissis, in ratione quadam data: in qua ratione si sumantur tres rectæ ad tres partes diametri inter vertices figuræ sitas, singulæ ad singulas, tunc illæ tres rectæ dici possunt *Latera recta* figuræ, & illæ partes Diametri inter Vertices *Latera transversa*. Et sicut in Parabola Conica quæ ad unam & eandem diametrum unicum tantum habet Verticem, rectangulum sub Ordinatis æquatur rectangulo sub parte Diametri quæ ad Ordinatas & Verticem abscinditur & recta quadam data quæ *Latus rectum* dicitur: sic in Curvis secundi Generis quæ non nisi duos habent Vertices ad eandem Diametrum, parallelepipedum sub Ordinatis tribus æquatur parallelepipedo sub duabus partibus Diametri ad Ordinatas & Vertices illos duos abscissis & recta quadam data quæ proinde *Latus rectum* dici potest.

4. *De Ratione contentorum sub Parallelarum segmentis.*

Denique sicut in Conicis sectionibus ubi duæ parallelæ ad Curvam utrinque terminatæ secantur a duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima a tertia, & secunda a quarta, rectangulum partium primæ est ad rectangulum partium tertiæ ut rectangulum partium secundæ ad rectangulum partium quartæ: sic ubi quatuor tales rectæ occurrunt Curvæ secundi Generis, singulæ in tribus punctis, parallelepipedum partium primæ rectæ erit ad parallelepipedum partium tertiæ, ut parallelepipedum partium secundæ ad parallelepipedum partium quartæ.

5. *De Cruribus Hyperbolicis & Parabolicis & eorum plagis.*

Curvarum secundi & superiorum Generum æque atque primi cru-

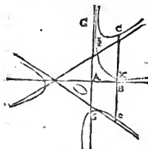
ra omnia in infinitum progredientia vel *Hyperbolici* sunt generis vel *Parabolici.* Crus *Hyperbolicum* voco quod ad Asymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicam* quod Asymptoto destituitur. Hæc crura ex Tangentibus optime dignoscuntur. Nam si punctum contactus in infinitum abeat, Tangens cruris Hyperbolici cum Asymptoto coincidet, & Tangens cruris Parabolici in infinitum recedet, evanescet & nullibi reperietur. Invenitur igitur Asymptotos cruris cujusvis quærendo Tangentem cruris illius ad punctum infinite distans. Plaga autem cruris infiniti invenitur quærendo positionem rectæ cujusvis quæ Tangenti parallela est ubi punctum contactus in infinitum abit. Nam hæc recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

III. *Reductio Curvarum omnium Generis Secundi ad æquationum casus quatuor.*

Lineæ omnes Ordinis primi, tertii, quinti, septimi & imparis cujusque duo habent ad minimum crura in infinitum versus plagas oppositas progredientia. Et lineæ omnes tertii Ordinis duo habent ejusmodi crura in plagas oppositas progredientia in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabola *Cartesiana*) tendunt.

CAS. I.

Si crura illa sint Hyperbolici generis, sit GAS eorum Asymptotos, & huic parallela agatur recta quævis CBc ad Curvam utrinque (si fieri potest) terminata, eademque bisecetur in puncto X, & locus puncti illius X erit Hyperbola Conica (puta X ϕ) cujus una Asymptotos est AG. Sit ejus altera Asymptotos AB, & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, si AB dicatur x, & BC y, semper induet hanc formam $xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d$. Ubi termini, e, a, b, c, d, designant quantitates datas signis suis $+$ & $-$ affectas, quarum quælibet deesse possunt modo ex earum defectu figura in sectionem Conicam non vertatur. Potest autem Hyperbola illa Conica cum Asymptotis suis coincidere, id est punctum X in recta AB locari: & tunc terminus $+ey$ deest.

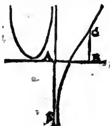


CAS.

CAS. II.

At si recta illa CBc non potest utrinque ad Curvam terminari, sed Curvæ in unico tantum puncto occurrit: age quamvis positione datam rectam AB Asymptoto AS occurrentem in A, ut & aliam quamvis BC Asymptoto illi parallelam Curvæque occurrentem in puncto C, & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam,

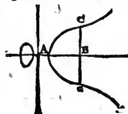
$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



CAS. III.

Quod si crura illa opposita Parabolici sint generis, recta CBc ad Curvam utrinque, si fieri potest, terminata in plagam crurum ducatur & bisecetur in B, & locus puncti B erit Linea recta. Sit ista AB, terminata ad datum quodvis punctum A, & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam,

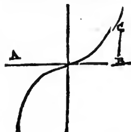
$$yy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



CAS. IV.

At vero si recta illa CBc in unico tantum puncto occurrat Curvæ, ideoque ad Curvam utrinque terminari non possit: sit punctum illud C, & incidat recta illa ad punctum B in rectam quamvis aliam positione datam & ad datum quodvis punctum A terminatam AB: & æquatio qua relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AC definitur, semper induet hanc formam,

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$



Nomina formarum.

Enumerando Curvas horum casuum, Hyperbolam vocabimus, ***Inscriptam***, quæ tota jacet in Asymptoton angulo ad instar Hyperbolæ conicæ; ***Circumscriptam***, quæ Asymptotos secat & partes Abscissas in sinu suo amplectitur; ***Ambigenam***, quæ uno crure infinito inscribitur & altero circumscribitur; ***Convergentem***, cujus crura concavitate sua se invicem respiciunt & in plagam eandem diriguntur; ***Divergentem***, cujus crura convexitate sua se invicem respiciunt & in plagas contrarias diriguntur; ***Cruribus Contrariis præditam***, cujus crura in partes contrarias convexa sunt & in plagas contrarias infinita; ***Conchoidalem***, quæ vertice concavo & cruribus divergentibus ad Asymptoton applicatur; ***Anguineam***, quæ flexibus contrariis Asymptoton secat & utrinque in crura contraria producitur; ***Cruciformem***, quæ conjugatam decussat; ***Nodatam***, quæ seipsam decussat in orbem redeundo; ***Cuspidatam***, cujus partes duæ in angulo contactus concurrunt & ibi terminantur; ***Punctatam***, quæ conjugatam habet Ovalem infinite parvam id est punctum; & ***Puram***, quæ per impossibilitatem duarum radicum Ovali, Nodo, Cuspide & Puncto conjugato privatur. Eodem sensu Parabolam quoque ***convergentem***, ***divergentem***, ***cruribus contrariis præditam***, ***cruciformem***, ***nodatam***, ***cuspidatam***, ***punctatam*** & ***puram*** nominabimus.

In casu primo si terminus ax^3 affirmativus est, Figura erit Hyperbola triplex cum sex cruribus Hyperbolicis quæ juxta tres Asymptotos quarum nullæ sunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxta unamquamque in plagas contrarias. Et hæ Asymptoti si terminus bx^2 non deest, se mutuo secabunt in tribus punctis triangulum ($Dd\delta$) inter se continentes, sin terminus bx^2 deest, convergent omnes ad idem punctum. In priori casu cape $AD = \frac{-b}{2a}$, & $Ad = A\delta = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, ac junge Dd, $D\delta$, & erunt Ad, Dd, $D\delta$ tres Asymptoti. In posteriori duc Ordinatam quamvis BC, Ordinatæ principali AG parallelam, & in ea utrinque producta cape hinc inde BF & Bf sibi mutuo æquales & in ea ratione ad AB quam habet $\sqrt{a}$ ad 1, jungeque AF, Af & erunt AG, AF, Af tres Asymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus ***Redundantem***, quia numero crurum Hyperbolicorum Sectiones Conicas superat.

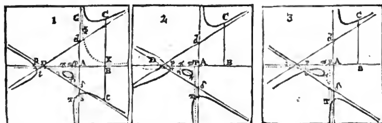
In Hyperbola omni Redundante, si neque terminus ey desit, neque sit $bb - 4ac$ æquale $+ ae\sqrt{a}$, Curva nullam habebit Diametrum, sin

ſin eorum alterutrum accidit Curva habebit unicam Diametrum, & tres ſi utrumque. Diameter autem ſemper tranſit per interſectionem duarum Aſymptoton, & biſecat rectas omnes quæ ad Aſymptotos illas utrinque terminantur & parallelæ ſunt Aſymptoto tertiæ. Eſtque Abſciſſa AB diameter Figuræ quoties terminus ey deeſt. *Diametrum* vero abſolute dictam hic & in ſequentibus in vulgari ſignificatu uſurpo, nempe pro Abſciſſa quæ paſſim habet Ordinatas binas æquales ad idem punctum hinc inde inſiſtentes.

IV. *Enumeratio Curvarum.*

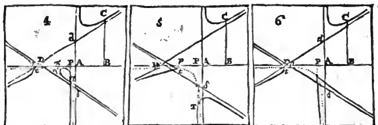
1. *De Hyperbolis novem redundantibus quæ diametro deſtituuntur & tres habent Aſymptotos triangulum capientes.*

Si Hyperbola redundans nullam habet diametrum, quærantur Æquationis hujus $ax^4+bx^3+cx^2+dx+\frac{1}{4}ee=0$ radices quatuor ſeu valores ipſius x. Eæ ſunto AP, Aϖ, Aπ, Ap. Erigantur Ordinatæ PT, ϖτ, πʇ, pt, & hæ tangent Curvam in punctis totidem T, τ, ʇ, t, & tangendo dabunt limites Curvæ per quos Species ejus innoteſcet.



Nam ſi radices omnes AP, Aϖ, Ap, (*Fig.* 1, 2.) ſunt reales, ejuſdem ſigni & inæquales, Curva conſtat ex tribus Hyperbolis, (inſcripta, circumſcripta & ambigena) cum *Ovali.* Hyperbolarum una jacet verſus D, altera verſus d, tertia verſus δ, & Ovalis ſemper jacet intra Triangulum Ddδ, atque etiam inter medios limites

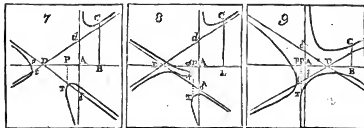
tes ρ & τ, in quibus utique tangitur ab Ordinatis $\pi\rho$ & $\varpi\tau$. Et hæc est *Species prima.*



Si e radicibus duæ maximæ $A\pi$, Ap, (*Fig.* 2.) vel duæ minimæ AP, $A\varpi$ (*Fig* 4.) æquantur inter se, & ejusdem sunt signi cum alteris duobus, Ovalis & Hyperbola circumscripta sibi invicem junguntur coeuntibus earum punctis contactus ρ & t vel T & τ, & crura Hyperbolæ sese decussando in Ovalem continuantur, figuram *Nodatam* efficientia. Quæ *Species* est *secunda.*

Si e radicibus tres maximæ Ap, $A\pi$, $A\varpi$, (*Fig.* 5.) vel tres minimæ $A\pi$, $A\varpi$, AP (*Fig.* 6.) æquentur inter se, Nodus in *Cuspidem* acutissimum convertetur. Nam crura duo Hyperbolæ circumscriptæ ibi in angulo contactus concurrent & non ultra producentur. Et hæc est *Species tertia.*

Si e radicibus duæ mediæ $A\varpi$ & $A\pi$ (*Fig.* 7.) æquentur inter se, puncta contactus τ & ρ coincidunt, & propterea Ovalis interjecta in punctum evanuit, & constat figura ex tribus Hyperbolis, inscripta, circumscripta & ambigena cum *Puncto* conjugato. Quæ est *Species quarta.*

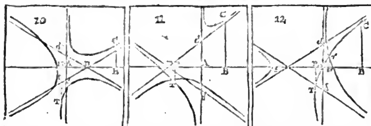


Si duæ ex radicibus sunt impossibiles & reliquæ duæ inæquales & ejusdem signi (nam signa contraria habere nequeunt,) *Puræ* habebun-

tur

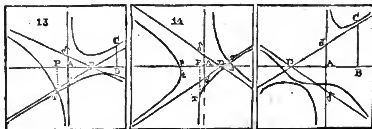
tur Hyperbolæ tres fine Ovali vel Nodo vel Cufpide vel Puncto conjugato, & hæ Hyperbolæ vel ad latera trianguli ab Afymptotis comprehenfi vel ad angulos ejus jacebunt; & perinde *Speciem* vel *quintam* (*Fig.* 7. 8.) vel *fextam* (*Fig.* 9, 10.) conftituent.

Si e radicibus duæ funt æquales & alteræ duæ vel impoffibiles funt (*Fig.* 11. 13.) vel reales (*Fig.* 12. 14.) cum fignis quæ a fignis æqualium radicum diverfa funt, figura *Cruciformis* habebitur, nempe duæ ex Hyperbolis fe invicem decuffabunt idque vel ad verticem trianguli ab Afymptotis comprehenfi (*Fig.* 13, 14) vel ad ejus bafem (*Fig.* 11, 12.) Quæ duæ *Species* funt *feptima* & *octava*.



Si denique radices omnes funt impoffibiles (*Fig.* 15.) vel fi omnes funt reales & inæquales (*Fig.* 16.) & earum duæ funt affirmativæ & alteræ duæ negativæ, tunc duæ habebuntur Hyperbolæ ad angulos oppofitos duarum Afymptoton cum Hyperbola *Anguinea* circa Afymptoton tertiam. Quæ *Species* eft *nona*.

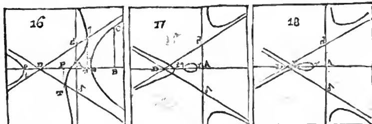
Et hi funt omnes radicum cafus poffibiles. Nam fi duæ radices funt æquales inter fe, & aliæ duæ funt etiam inter fe æquales, Figura evadet Sectio Conica cum Linea recta.



2. De Hyperbolis duodecim redundantibus unicam tantum Diametrum habentibus.

Si Hyperbola redundans habet unicam tantum Diametrum, sit ejus Diameter Abscissa AB, & æquationis hujus $ax^3+bx^2+cx+d=0$ quære tres radices seu valores x.

Si radices illæ sunt omnes reales & ejusdem signi, Figura constabit ex *Ovali* intra triangulum Ddδ (*Fig.* 17.) jacente & tribus Hyperbolis ad angulos ejus, nempe Circumscripta ad angulum D & Inscriptis duabus ad angulos d & δ. Et hæc est *Species decima.*



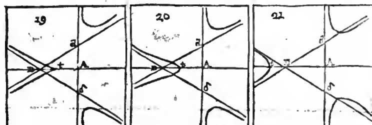
Si radices duæ majores sunt æquales & tertia ejusdem signi, crura Hyperbolæ jacentis versus D (*Fig.* 18.) sese decussabunt in forma *Nodi* propter contactum Ovalis. Quæ *Species* est *undecima.*

Si tres radices sunt æquales, Hyperbola ista fit *Cuspidata* sine Ovali, (*Fig.* 19.) Quæ *Species* est *duodecima.*

Si radices duæ minores sunt æquales & tertia ejusdem signi, Ovalis in *Punctum* evanuit, (*Fig.* 20.) Quæ *Species* est *decima tertia.*

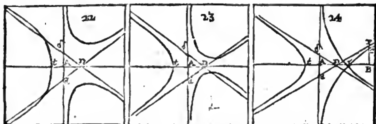
In speciebus quatuor novissimis Hyperbola quæ jacet versus D, Asymptotos in sinu suo amplectitur, reliquæ duæ in sinu Asymptoton jacent.

Si duæ ex radicibus sunt impossibiles habebuntur tres Hyperbolæ

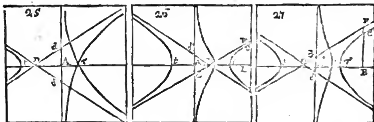


Puræ sine Ovali decussatione vel cuspide. Et hujus casus *Species* sunt qua-

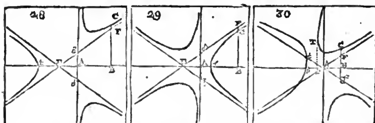
quatuor: nempe *decima quarta* si Hyperbola Circumscripta jacet versus D, (*Fig.* 20.) & *decima quinta* si Hyperbola Inscripta jacet versus D, (*Fig.* 21.) *decima sexta* si Hyperbola Circumscripta jacet sub basi dδ trianguli Ddδ, (*Fig.* 22.) & *decima septima* (*Fig.* 23.) si Hyperbola inscripta jacet sub eadem basi.



Si duæ radices sunt æquales & tertia signi diversi figura erit *Cruciformis*. Nempe duæ ex tribus Hyperbolis se invicem decussabunt idque vel ad verticem trianguli ab Asymptotis comprehensi (*Fig.* 24.) vel ad ejus basem, (*Fig.* 25.) Quæ duæ *Species* sunt *decima octava*, & *decima nona*.

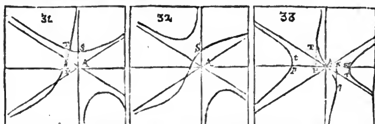


Si duæ radices sunt inæquales & ejusdem signi & tertia est signi diversi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppositis angulis duarum Asymptoton cum *Conchoidali* intermedia. *Conchoidalis* autem vel jacebit ad easdem partes Asymptoti suæ cum triangulo ab Asymptotis constituto, (*Fig.* 26.) vel ad partes contrarias, (*Fig.* 27.) Et hi duo casus constituunt *Speciem vigesimam* & *vigesimam primam*.



3. *De Hyperbolis duabus redundantibus cum tribus Diametris.*

Hyperbola redundans quæ habet tres diametros, conſtat ex tribus Hyperbolis in ſinubus Aſymptoton jacentibus, idque vel ad angulos trianguli ab Aſymptotis comprehenſi (*Fig.* 28.) vel ad ejus latera (*Fig.* 29.) Caſus prior dat *Speciem vigeſimam ſecundam*, & poſterior *Speciem vigeſimam tertiam.*

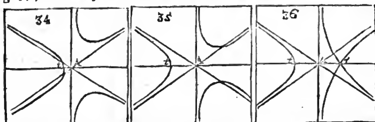


4. *De Hyperbolis novem redundantibus cum Aſymptotis tribus ad commune punctum convergentibus.*

Si tres Aſymptoti in puncto communi ſe mutuo decuſſant, vertuntur ſpecies quinta & ſexta in *vigeſimam quartam*, (*Fig.* 30.) ſeptima & octava in *vigeſimam quintam*, (*Fig.* 31.) & nona in *vigeſimam ſextam* (*Fig.* 32.) ubi Anguinea non tranſit per concurſum Aſymptoton, & in *vigeſimam ſeptimam* ubi tranſit per concurſum illum, (*Fig.* 33.) quo caſu termini *b* ac *d* deſunt, & concurſus Aſymptoton eſt Centrum figuræ ab omnibus ejus partibus oppoſitis æqualiter diſtans. Et hæ quatuor ſpecies diametrum non habent.

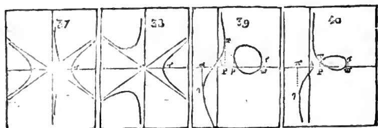
Vertuntur etiam *Species* decima quarta ac decima ſexta in *vigeſimam octavam*, (*Fig.* 34.) decima quinta ac decima ſeptima in *vigeſimam*

mam nonam, (*Fig.* 35.) decima octava & decima nona in *tricesimam*, (*Fig.* 36.) & vigesima cum vigesima prima in *tricesimam primam*, (*Fig.* 37.) Et hæ species unicam habent Diametrum.



Ac denique species vigesima secunda & vigesima tertia vertuntur in *Speciem tricesimam secundam* cujus tres sunt Diametri per concursum Asymptoton transeuntes. (*Fig.* 38.)

Quæ omnes conversiones facillime intelliguntur faciendo ut triangulum ab Asymptotis comprehensum diminuatur donec in punctum evanescat.



5. *De Hyperbolis sex defectivis diametrum non habentibus.*

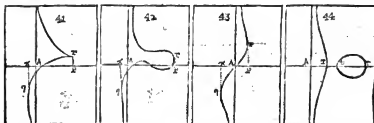
Si in primo æquationum casu terminus ax^3 negativus est, Figura erit Hyperbola defectiva unicam habens Asymptoton & duo tantum crura Hyperbolica juxta Asymptoton illam in plagas contrarias infinite progredientia. Et Asymptotos illa est Ordinata prima & principalis AG. Si terminus ey non deest figura nullam habebit Diametrum, si deest habebit unicam. In priori casu species sic enumerantur.

Si æquationis hujus $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee$ radices omnes $A\pi$, AP, Ap, $A\varpi$, (*Fig.* 39.) sunt reales & inæquales, Figura erit Hyperbola Anguinea asymptoton flexu contrario amplexa, cum *Ovali* conjugata. Quæ *Species* est *tricesima tertia*.

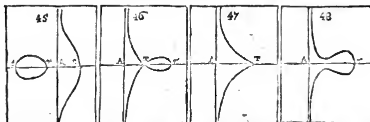
Si radices duæ mediæ AP & Ap (*Fig.* 40.) æquentur inter se, Ovalis & Anguinea junguntur sese decussantes in forma *Nodi*. Quæ est *Species tricesima quarta*.

Si tres radices sunt æquales, Nodus vertetur in *Cuspidem* acutissimum in vertice Anguineæ, (*Fig.* 41.) Et hæc est *Species tricesima quinta*.

Si e tribus radicibus ejusdem signi duæ maximæ Ap & Aϖ (*Fig.* 43.) sibi mutuo æquantur, Ovalis in *Punctum* evanuit. Quæ *Species* est *tricesima sexta*.



Si radices duæ quævis imaginariæ sunt, sola manebit Anguinea *Pura* sine Ovali, Decussatione, Cuspide vel Puncto conjugato. Si Anguinea illa non transit per punctum A (*Fig.* 42.) *Species* est *tricesima septima*; sin transit per punctum illud A (id quod contingit ubi termini b ac d desunt,) punctum illud A erit centrum figuræ rectas omnes per ipsum ductas & ad Curvam utrinque terminatas bisecans, (*Fig.* 43.) Et hæc est *Species tricesima octava*.



6. *De Hyperbolis septem defectivis diametrum habentibus.*

In altero casu ubi terminus ey deest & propterea figura Diametrum habet, si æquationis hujus $ax^3 = bx^2 + cx + d$ radices omnes AT, At, Aτ, (*Fig.* 44.) sunt reales, inæquales & ejusdem signi, figura erit Hyperbola Conchoidalis cum *Ovali* ad convexitatem. Quæ est *Species tricesima nona*. Si

Si duæ radices sunt inæquales & ejusdem signi & tertia est signi contrarii, *Ovalis* jacebit ad concavitatem Conchoidalis, (*Fig.* 45.) Estque *Species quadragesima*.

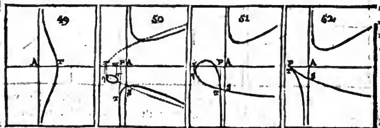
Si radices duæ minores AT, At, (*Fig.* 46.) sunt æquales, & tertia Aτ est ejusdem signi, Ovalis & Conchoidalis jungentur sese decussando in modum *Nodi*. Quæ *Species* est *quadragesima prima*.

Si tres radices sunt æquales, Nodus mutabitur in *Cuspidem*, & figura erit *Cissois Veterum*, (*Fig.* 47.) Et hæc est *Species quadragesima secunda*.

Si radices duæ majores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, Conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad convexitatem suam, (*Fig.* 49.) Estque *Species quadragesima tertia*.

Si radices duæ sunt æquales, & tertia est signi contrarii Conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad concavitatem suam, (*Fig.* 49.) Estque *Species quadragesima quarta*.

Si radices duæ sunt impossibiles habebitur Conchoidalis *Pura* sine Ovali, Nodo, Cuspide vel Puncto conjugato (*Fig.* 48. 49.) Quæ *Species* est *quadragesima quinta*.



7. *De Hyperbolis septem Parabolicis Diametrum non habentibus.*

Si quando in primo æquationum casu terminus ax^3 deest & terminus bx^2 non deest, Figura erit Hyperbola Parabolica duo habens crura Hyperbolica ad unam Asymptoton SAG & duo Parabolica in plagam unam & eandem convergentia. Si terminus ey non deest figura nullam habebit diametrum, sin deest habebit unicam. In priori casu Species sunt hæ.

Si tres radices AP, Aϖ, Aπ (*Fig.* 50.) æquationis hujus $bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ sunt inæquales & ejusdem signi, figura constabit ex *Ovali* & aliis duabus Curvis quæ partim Hyperbolicæ sunt & partim Parabolicæ. Nempe crura Parabolica continuo ductu junguntur cru-

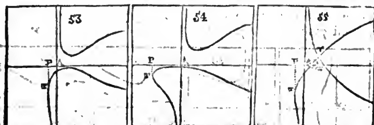
cruribus Hyperbolicis sibi proximis. Et hæc est *Species quadragesima sexta.*

Si radices duæ minores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi, Ovalis & una Curvarum illarum Hyperbolo-Parabolicarum junguntur & se decussant in formam *Nodi* (*Fig.* 51.) Quæ *Species* est *quadragesima septima.*

Si tres radices sunt æquales, Nodus ille in Cuspidem vertitur (*Fig.* 52.) Estque *Species quadragesima octava.*

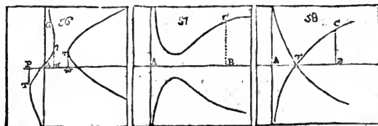
Si radices duæ majores sunt æquales & tertia est ejusdem signi, Ovalis in *Punctum* conjugatum evanuit (*Fig.* 53.) Quæ *Species* est *quadragesima nona.*

Si duæ radices sunt impossibiles, manebunt *Puræ* illæ duæ curvæ Hyperbolo-parabolicæ sine Ovali, Decussatione, Cuspide vel Puncto conjugato; & *Speciem quinquagesimam* constituent. (*Fig.* 53. 54.)



Si radices duæ sunt æquales & tertia est signi contrarii, Curvæ illæ Hyperbolo-parabolicæ junguntur, sese decussando in morem crucis (*Fig.* 55.) Estque *Species quinquagesima prima.*

Si radices duæ sunt inæquales & ejusdem signi & tertia est signi contrarii, figura evadet Hyperbola Anguinea circa Asymptoton AG, (*Fig.* 56.) cum Parabola conjugata. Et hæc est *Species quinquagesima secunda.*



8. *De*

8. *De Hyperbolis quatuor Parabolicis Diametrum habentibus.*

In altero casu ubi terminus ey deest & figura Diametrum habet, si duæ radices æquationis hujus $bx^2+cx+d=0$ sunt impossibiles, duæ habentur figuræ Hyperbolo-parabolicæ a Diametro AB (*Fig.* 57.) hinc inde æqualiter distantes. Quæ *Species* est *quinquagesima tertia*.

Si æquationis illius radices duæ sunt impossibiles, Figuræ Hyperbolo-parabolicæ junguntur sese decussantes in morem crucis; & *Speciem quinquagesimam quartam* constituunt. (*Fig.* 58.)

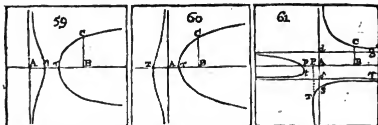
Si radices illæ sunt inæquales & ejusdem signi, habetur Hyperbola Conchoidalis cum Parábola ex eodem latere Asymptoti (*Fig.* 59.) Estque *Species quinquagesima quinta*.

Si radices illæ sunt signi contrarii, habetur Conchoidalis cum Parabola ad alteras partes Asymptoti (*Fig.* 60.) Quæ *Species* est *quinquagesima sexta*.

9. *De Quatuor Hyperbolismis Hyperbolæ.*

Si quando in primo æquationum casu terminus uterque ax^3 & bx^2 deest, figura erit Hyperbolismus sectionis alicujus Conicæ. Hyperbolismum figuræ voco cujus Ordinata prodit applicando contentum sub Ordinata figuræ illius & recta data ad Abscissam communem. Hac ratione linea recta vertitur in Hyperbolam Conicam, & sectio omnis Conica vertitur in aliquam figurarum quas hic Hyperbolismos sectionum Conicarum voco. Nam æquatio ad figuras de quibus agimus, nempe $xy^2+ey=cx+d$, dat $y=\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2x}$ quæ generatur applicando contentum sub Ordinata sectionis Conicæ $\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2m}$ & recta data m, ad curvarum Abscissam communem x. Unde liquet quod figura genita Hyperbolismus erit Hyperbolæ, Ellipseos vel Parabolæ, perinde ut terminus cx affirmativus est vel negativus vel nullus.

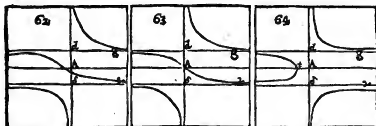
M Hy-



Hyperbolifmus Hyperbolæ tres habet Afymptotos, quarum una eft Ordinata prima & principalis Ad, alteræ duæ funt parallelæ Abfciffæ AB, ab eadem hinc inde æqualiter diftant. In Ordinata principali Ad, cape Ad, Aδ hinc inde æquales quantitati vc; & per puncta d ac δ age dg, δγ Afymptotos Abfciffæ AB parallelas.

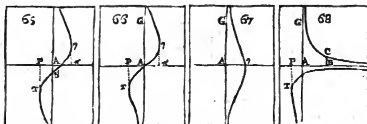
Ubi terminus ey non deeft figura nullam habet diametrum. In hoc cafu, fi æquationis hujus $cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ radices duæ AP, Ap (*Fig.* 61.) funt reales & inæquales (nam æquales effe nequeunt nifi figura fit Conica fectio) figura conftabit ex tribus Hyperbolis fibi oppofitis quarum una jacet inter Afymptotos parallelas & alteræ duæ jacent extra. Et hæc eft *Species quinquagefima feptima.*

Si radices illæ duæ funt impoffibiles, habentur Hyperbolæ duæ oppofitæ extra Afymptotos parallelas & Anguinea Hyperbolica intra eafdem. Hæc figura duarum eft fpecierum. Nam centrum non habet ubi terminus *d* non deeft (*Fig.* 62.) fed fi terminus ille deeft punctum A eft ejus centrum (*Fig.* 63.) Prior *Species* eft *quinquagefima octava*, pofterior *quinquagefima nona.*



Quod fi terminus ey deeft, figura conftabit ex tribus Hyperbolis oppofitis, quarum una jacet inter Afymptotos parallelas & alteræ duæ jacent extra ut in fpecie quinquagefima quarta, & præterea

terea diametrum habet quæ est Abscissa AB (*Fig.* 64.) Et hæc est *Species sexagesima.*



10. *De tribus Hyperbolismis Ellipseos.*

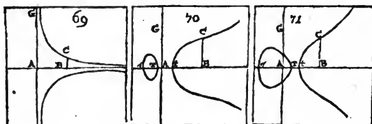
Hyperbolismus Ellipseos per hanc æquationem definitur $xy^2+ey = cx+d$, & unicam habet Asymptoton quæ est Ordinata principalis Ad (*Fig.* 65.) Si terminus ey non deest, figura est Hyperbola Anguinea sine diametro, atque etiam sine centro si terminus d non deest. Quæ *Species* est *sexagesima prima.*

At si terminus d deest, figura habet centrum sine diametro, & centrum ejus est punctum A (*Fig.* 66.) *Species* vero est *sexagesima secunda.*

Et si terminus ey deest, & terminus d non deest, figura est Conchoidalis ad Asymptoton AG (*Fig.* 67.) habetque diametrum sine centro, & diameter ejus est Abscissa AB. Quæ *Species* est *sexagesima tertia.*

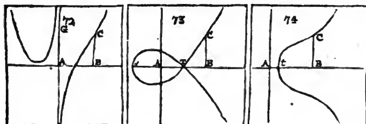
11. *De duobus Hyperbolismis Parabolæ.*

Hyperbolismus Parabolæ per hanc æquationem definitur $xy^2+ey = d$; & duas habet Asymptotos, Abscissam AB & Ordinatam primam & principalem AG. Hyperbolæ vero in hac figura sunt duæ, non in Asymptoton angulis oppositis sed in angulis qui sunt deinceps jacentes, idque ad utrumque latus abscissæ AB, & vel sine diametro si terminus ey habetur, (*Fig.* 68.) vel cum diametro si terminus ille deest (*Fig.* 69.) Quæ duæ *Species* sunt *sexagesima quarta* & *sexagesima quinta.*



12. *De Tridente.*

In Secundo æquationum casu habebatur æquatio $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Et figura in hoc casu habet quatuor crura infinita quorum duo sunt Hyperbolica circa Asymptoton AG (*Fig.* 72.) in contrarias partes tendentia & duo Parabolica convergentia & cum prioribus speciem Tridentis fere efformantia. Estque hæc Figura Parabola illa per quam *Cartesius* æquationes sex dimensionum construxit. Hæc est igitur *Species sexagesima sexta*.



13. *De Parabolis quinque divergentibus.*

In Tertio casu æquatio erat $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, & Parabolam designat cujus crura divergunt ab invicem & in contrarias partes infinite progrediuntur. Abscissa AB est ejus diameter & Species ejus sunt quinque sequentes.

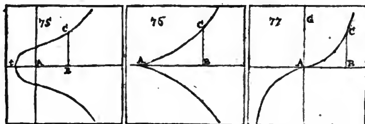
Si æquationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, radices omnes Aτ, AT, At sunt reales & inæquales, figura est Parabola divergens Campaniformis cum *Ovali* ad verticem (*Fig.* 70. 71.) Et *Species* est *sexagesima septima*.

Si radices duæ sunt æquales, Parabola prodit vel *Nodata* contingendo Ovalem (*Fig.* 73.) vel *Punctata* ob Ovalem infinite parvam

vam (*Fig.* 74.) Quæ duæ *Species* sunt *sexagesima octava* & *sexagesima nona.*

Si tres radices sunt æquales Parabola erit *Cuspidata* in vertice (*Fig.* 76.) Et hæc est Parabola *Neiliana* quæ vulgo *Semicubica* dicitur. Et est *Species septuagesima.*

Si radices duæ sunt impossibiles, habetur Parabola *Pura* campaniformis (*Fig.* 74. 75.) *Speciem septuagesimam primam* constituens.



14. *De Parabola Cubica.*

In Quarto casu æquatio erat $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, & hæc æquatio Parabolam designat quæ crura habet contraria & *Cubica* dici solet (*Fig.* 77.) Et sic *Species* omnino sunt *septuaginta duæ.*

V. *Genesis Curvarum per Umbras.*

Si in planum infinitum a puncto lucido illuminatum umbræ figurarum projiciantur, umbræ Sectionum Conicarum semper erunt Sectiones Conicæ, eæ Curvarum secundi Generis semper erunt Curvæ secundi Generis, eæ Curvarum tertii Generis semper erunt Curvæ tertii Generis, & sic deinceps in infinitum.

Et quemadmodum Circulus umbram projiciendo generat Sectiones omnes Conicas, sic Parabolæ quinque divergentes umbris suis generant & exhibent alias omnes secundi Generis Curvas; & sic Curvæ quædam simpliciores aliorum Generum inveniri possunt quæ alias omnes eorundem Generum Curvas umbris suis a puncto lucido in planum projectis formabunt.

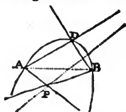
De Curvarum Punctis duplicibus.

Diximus Curvas secundi Generis a Linea recta in punctis tribus secari posse. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut cum Recta per Ovalem infinite parvam transit vel per concursum duarum partium Curvæ se mutuo secantium vel in cuspidem coeuntium ducitur. Et siquando Rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantum puncto secant, (ut fit in ordinatis Parabolæ *Cartesianæ* & Parabolæ cubicæ, nec non in rectis Abscissæ Hyperbolismorum Hyperbolæ & Parabolæ parallelis) concipiendum est quod Rectæ illæ per alia duo Curvæ puncta ad infinitam distantiam sita (ut ita dicam) transeunt. Hujusmodi intersectiones duas coincidentes sive ad finitam sint distantiam sive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem quæ habent Punctum Duplex describi possunt per sequentia Theoremata.

VI. *De Curvarum descriptione Organica.*

THEOR. I.

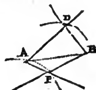
Si Anguli duo magnitudine dati PAD, PBD circa polos positione datos A, B rotentur, & eorum crura AP, BP concursu suo P percurrant Lineam rectam; crura duo reliqua AD, BD concursu suo D describent Sectionem Conicam per polos A, B transeuntem: præterquam ubi Linea illa recta transit per polorum alterutrum A vel B, vel anguli BAD, ABD simul evanescunt, quibus in casibus punctum D describet Lineam rectam.



THEOR. II.

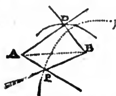
Si crura prima AP, BP concursu suo P percurrant Sectionem Conicam per polum alterutrum A transeuntem, crura duo reliqua AD, BD

BD concursu suo D describent Curvam secundi Generis per polum alterum B transeuntem & Punctum duplex habentem in polo primo A, per quem sectio Conica transit: præterquam ubi anguli BAD, ABD simul evanescunt, quo casu punctum D describet aliam sectionem Conicam per polum A transeuntem.



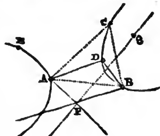
THEOR. III.

At si sectio Conica quam punctum P percurrit transeat per neutrum polorum A, B, punctum D describet Curvam secundi vel tertii generis Punctum duplex habentem. Et Punctum illud duplex in concursu crurum describentium, AD, BD invenietur ubi anguli BAP, ABP simul evanescunt. Curva autem descripta secundi erit Generis si anguli BAD, ABD simul evanescunt, alias erit tertii Generis & alia duo habebit Puncta duplicia in polis A & B.



Sectionum Conicarum descriptio per data quinque puncta.

Jam sectio Conica determinatur ex datis ejus punctis quinque & per eadem sic describi potest. Dentur ejus puncta quinque A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, & trianguli ABC rotentur anguli duo quivis CAB, CBA circa vertices suos A & B, & ubi crurum AC, BC intersectio C successive applicatur ad puncta duo reliqua D, E, incidat intersectio crurum reliquorum AB & BA in puncta P & Q. Agatur & infinite producatur recta PQ, & anguli mobiles ita rotentur ut intersectio crurum AB, BA percurrat rectam PQ, & crurum reliquorum intersectio C describet propositam sectionem Conicam per *Theorema* primum.



Cur-

Curvarum secundi generis Punctum duplex habentium descriptio per data septem puncta.

Curvæ omnes secundi generis Punctum Duplex habentes determinantur ex datis earum punctis septem quorum unum est Punctum illud duplex, & per eadem puncta sic describi possunt. Dentur Curvæ describendæ puncta quælibet septem A, B, C, D, E, F, G, quorum A est Punctum Duplex. Jungantur punctum A & alia duo quævis e punctis puta B & C; & trianguli ABC rotetur tum angulus CAB circa verticem suum A, tum angulorum reliquorum alteruter ABC circa verticem suum B. Et ubi crurum AC, BC concursus C successive applicatur ad puncta quatuor reliqua D, E, F, G incidat concursus crurum reliquorum AB & BA in puncta quatuor P, Q, R, S. Per puncta illa quatuor & quintum A describatur sectio Conica, & anguli præfati CAB, CBA ita rotentur ut crurum AB, BA concursus percurrat sectionem illam Conicam, & concursus reliquorum crurum AC, BC describet Curvam propositam per *Theorema* secundum.

Si vice puncti C datur positione recta BC quæ Curvam describendam tangit in B, lineæ AD, AP coincident, & vice anguli DAP habebitur linea recta circa polum A rotanda.

Si Punctum duplex A infinite distat debebit Recta ad plagam puncti illius perpetuo dirigi & motu parallelo ferri interea dum angulus ABC circa polum B rotatur.

Describi etiam possunt hæ Curvæ paulo aliter per *Theorema* tertium, sed descriptionem simpliciorem posuisse sufficit.

Eadem methodo Curvas tertii, quarti & superiorum Generum describere licet; non omnes quidem sed quotquot ratione aliqua commoda per motum localem describi possunt. Nam Curvam aliquam secundi vel superioris generis Punctum duplex non habentem commode describere Problema est inter difficiliora numerandum.

VII. *Con-*

VII. *Constructio æquationum per descriptionem Curvarum.*

Curvarum usus in Geometria est ut per earum intersectiones Problemata solvantur. Proponatur æquatio construenda dimensionum novem

$$x^9+bx^7+cx^6+dx^5+ex^4+\begin{array}{c}fx^3\\+m\end{array}+gx^2+hx+k=0.$$

Ubi b, c, d, &c. significant quantitates quasvis datas signis suis $+$ & $-$ affectas. Assumatur æquatio ad Parabolam cubicam $x^3=y$, & æquatio prior, scribendo y pro x^3, evadet

$$y^3+bxy^2+cy^2+dx^2y+exy+my+fx^3+gx^2+hx+k=0,$$

æquatio ad Curvam aliam secundi Generis. Ubi m vel f deesse potest vel pro lubitu assumi. Et per harum Curvarum descriptiones & intersectiones dabuntur radices æquationis construendæ. Parabolam cubicam semel describere sufficit.

Si æquatio construenda per defectum duorum terminorum ultimorum hx & k reducatur ad septem dimensiones, Curva altera delendo m, habebit Punctum Duplex in principio Abscissæ, & inde facile describi potest ut supra.

Si æquatio construenda per defectum terminorum trium ultimorum gx^2+hx+k reducatur ad sex dimensiones, Curva altera delendo f evadet sectio Conica.

Et si per defectum sex ultimorum terminorum æquatio construenda reducatur ad tres dimensiones, incidetur in constructionem *Wallisianam* per Parabolam cubicam & Lineam rectam.

Construi etiam possunt æquationes per Hyperbolismum Parabolæ cum diametro. Ut si construenda sit hæc æquatio dimensionum novem termino penultimo carens,

$$a+cx^2+dx^3\,\begin{array}{c}ex^4\\+m\end{array}+fx^5+gx^6+hx^7+kx^8+lx^9=0;$$

Assumatur æquatio ad Hyperbolismum illum $x^2y=1$, & scribendo y pro $\frac{1}{xx}$, æquatio construenda vertetur in hanc

$$ay^3+cy^2+dxy^2+ey+fxy+my+g+hx+kx^2+lx^3=0,$$

quæ curvam secundi Generis designat cujus descriptione Problema

N sol-

ſolvetur. Et quantitatum m ac g alterutra hic deeſſe poteſt, vel pro lubitu aſſumi.

Per Parabolam cubicam & Curvas tertii Generis conſtruuntur etiam æquationes omnes dimenſionum non pluſquam duodecim, & per eandem Parabolam & Curvas quarti Generis conſtruuntur omnes dimenſionum non pluſquam quindecim; Et ſic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ tertii, quarti & ſuperiorum Generum deſcribi ſemper poſſunt inveniendo eorum puncta per Geometriam planam. Ut ſi conſtruenda ſit æquatio

$$x^{12} * + ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 + gx^4 + hx^3 + ix^2 + kx + l = 0,$$

& deſcripta habeatur Parabola Cubica; ſit æquatio ad Parabolam illam Cubicam $x^3 = y$, & ſcribendo y pro x^3, æquatio conſtruenda vertetur in hanc

$$\begin{array}{lllll} y^4 + axy^3 & + cx^2y^2 & + fx^2y & + ix^2 & = 0, \\ \quad + b & + dx & + gx & + kx & \\ & + e & + h & + l & \end{array}$$

quæ eſt æquatio ad Curvam tertii Generis cujus deſcriptione Problema ſolvetur. Deſcribi autem poteſt hæc Curva inveniendo ejus puncta per Geometriam planam, propterea quod indeterminata quantitas x non niſi ad duas dimenſiones aſcendit.



METHO-

METHODUS DIFFERENTIALIS.

PROP. I.

SI figuræ curvilineæ Abſciſſa componatur ex quantitate quavis data A, *& quantitate indeterminata* x, *& Ordinata conſtet ex datis quotcunque quantitatibus* b, c, d, e, *&c. in totidem terminos hujus progreſſionis Geometricæ* x, x^2, x^3, x^4, *&c. reſpective ductis, & ad Abſciſſæ puncta totidem data erigantur Ordinatim applicatæ: dico quod Ordinatarum differentiæ primæ dividi poſſint per earum intervalla, & differentiarum ſic diviſarum differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum binarum intervalla, & harum differentiarum ſic diviſarum differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum ternarum intervalla, & ſic deinceps in infinitum.*

Etenim ſi pro Abſciſſæ parte indeterminata x ponantur quantitates quævis datæ p, q, r, s, t, &c. ſucceſſive, & ad Abſciſſarum ſic datarum terminos erigantur Ordinatæ α, β, γ, δ, ε, &c. Hæ Abſciſſæ & Ordinatæ & Ordinatarum differentiæ diviſæ per Abſciſſarum differentias (quæ utique ſunt Ordinatarum intervalla) & quo-

torum differentiæ divisæ per Ordinatarum alternarum differentias, & sic deinceps, exhibentur per Tabulam sequentem.

Abscissæ	Ordinatæ
$A+p$	$A+bp+cp^2+dp^3+ep^4=\alpha$
$A+q$	$A+bq+cq^2+dq^3+eq^4=\beta$
$A+r$	$A+br+cr^2+dr^3+er^4=\gamma$
$A+s$	$A+bs+cs^2+ds^3+es^4=\delta$
$A+t$	$A+bt+ct^2+dt^3+et^4=\varepsilon$
Divisor. Diff. Ord.	**Quoti per divisionem prodeuntes**
$p-q)\ \alpha-\beta$	$b+c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+p^2q+pq^2+q^3}=\zeta$
$q-r)\ \beta-\gamma$	$b+c\times\overline{q+r}+d\times\overline{qa+qr+rr}+e\times\overline{q^3+q^2r+qr^2+r^3}=\eta$
$r-s)\ \gamma-\delta$	$b+c\times\overline{r+s}+d\times\overline{rr+rs+ss}+e\times\overline{r^3+r^2s+rs^2+s^3}=\theta$
$s-t)\ \delta-\varepsilon$	$b+c\times\overline{s+t}+d\times\overline{ss+st+tt}+e\times\overline{s^3+s^2t+st^2+t^3}=\varkappa$
$p-r)\ \zeta-\eta$	$c+d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}=\lambda$
$q-s)\ \eta-\theta$	$c+d\times\overline{q+r+s}+e\times\overline{qq+qr+rr+qs+rs+ss}=\mu$
$r-t)\ \theta-\varkappa$	$c+d\times r+s+t+e\times rr+rs+ss+rt+st+tt=\nu$
$p-s)\ \lambda-\mu$	$d+e\times\overline{p+q+r+s}=\xi.$
$q-t)\ \mu-\nu$	$d+e\times q+r+s+t=\pi.$
$p-t)\ \xi-\pi$	$e=\sigma.$

P R O P. II.

Iisdem positis, & quod numerus terminorum b, c, d, e, *&c. sit finitus, dico quod Quotorum ultimus æqualis erit ultimo terminorum* b, c, d, e, *&c. & quod per Quotos reliquos dabuntur termini reliqui* b, c, d, e, *&c. & his datis dabitur Linea Curva generis Parabolici quæ per Ordinatarum omnium terminos transibit.*

Etenim in Tabula superiore Quotus ultimus σ æqualis erat termino ultimo e. Et hic terminus ductus in summam datam $\overline{p+q+r+s}$, & ablatus de Quoto ξ relinquit terminum penultimum d. Et quantitates

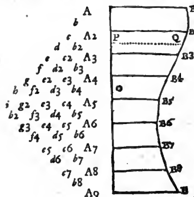
tates jam datæ $d \times \overline{p+q+r} + e \times \overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}$, si auferantur de Quoto λ, relinquunt terminorum antepenultimum c. Et quantitates jam datæ $c \times \overline{p+q} + d \times \overline{pp+pq+qq} + e \times \overline{p^3+ppq+pqq+q^3}$, si auferantur de Quoto ζ, relinquunt terminum b. Et simili computo si plures essent termini, colligerentur omnes per Quotorum Ordines totidem. Deinde quantitates datæ $bp + cpp + dp^3 + ep^4$, si subducantur de Ordinata prima α, relinquunt Abscissæ terminum primum A. Et quantitas $A + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ &c. est Ordinata Curvæ generis Parabolici quæ per Ordinatarum omnium datarum terminos transibit, existente Abscissa $A + x$.

Ex his Propositionibus quæ sequuntur facile colligi possunt.

PROP. III.

Si recta aliqua AA9 *in æquales quotcunque partes* AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad puncta divisionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. Invenire curvam Geometricam generis Parabolici quæ per omnium erectarum terminos* B, B2, B3, *&c. transibit.*

Erectarum AB, A2B2, A3B3, &c. quære differentias Primas, b, $b2$, $b3$, &c. Secundas c, $c2$, $c3$, &c. Tertias d, $d2$, $d3$, &c. & sic deinceps usque dum veneris ad ultimam differentiam, quæ hic sit i.



Tunc incipiendo ab ultima differentia excerpe medias differentias in alternis Columnis vel Ordinibus differentiarum, & Arithmetica media inter duas medias reliquarum, Ordine pergendo usque ad Seriem primorum terminorum AB, A2B2, A3B3, &c. sint hæc $k, l, m, n, o, p, q, r, s$, &c. quorum ultimus significet ultimam differentiam; penultimus medium Arithmeticum inter duas penultimas differentias; antepenultimus mediam trium antepenultimarum

differentiarum, & sic deinceps usque ad primum quod erit vel medius terminorum A, A2, A3, &c. vel Arithmeticus medius inter duos medios. Prius accidit ubi numerum terminorum A, A2, A3, &c. est impar; posterius ubi par.

CAS. I.

In Casu priori, sit A5B5 iste medius terminus, hoc est, A5B5 $= k$, $\frac{b4+b5}{2} = l$, $c4 = m$, $\frac{d3+d4}{2} = n$, $e3 = o$, $\frac{f2+f3}{2} = p$, $g2 = q$, $\frac{h+h2}{2} = r$, $i = s$. Et erecta Ordinatim applicata PQ, dic A5P $= x$; & duc terminos hujus Progressionis

$$1 \times \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{xx-1}{3x} \times \frac{x}{4} \times \frac{xx-4}{5x} \times \frac{x}{6} \times \frac{xx-9}{7x} \times \frac{x}{8} \times \frac{xx-16}{9x} \times \frac{x}{10} \times \frac{xx-25}{11x} \times \frac{x}{12} \times \frac{xx-36}{25x} \text{ \&c.}$$

in se continuo; & orientur termini

$$1 .\ x .\ \frac{x^2}{2} .\ \frac{x^3-x}{6} .\ \frac{x^4-x^2}{24} .\ \frac{x^5-5x^3+4x}{120} .\ \frac{x^6-5x^4+4x^2}{720} .\ \frac{x^7-14x^5+49x^3-36x}{5040} .\ \text{\&c.}$$

per quos si termini seriei k, l, m, n, o, p, &c. respective multiplicentur, aggregatum factorum $k + xl + \frac{x^2}{2}m + \frac{x^3-x}{6}n + \frac{x^4-x^2}{24}o + \frac{x^5-5x^3+4x}{120}p + \text{\&c.}$ erit longitudo Ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

In Casu posteriori, sint A4B4, A5B5 duo medii termini, hoc est, sit $\frac{A4B4+A5B5}{2} = k$, $b4 = l$, $\frac{c3+c4}{2} = m$, $d3 = n$, $e2+e3 = o$, $f2 = p$, $\frac{g+g2}{2} = q$, & $h = r$. Et erecta Ordinatim applicata PQ, biseca A4A5 in O, & dicto OP $= x$, duc Terminos hujus Progressionis $1 \times \frac{x}{1} \times \frac{xx-\frac{1}{4}}{2x} \times \frac{x}{3} \times \frac{xx-\frac{9}{4}}{4x} \times \frac{x}{5} \times \frac{xx-\frac{25}{4}}{6x} \times \frac{x}{7} \times \frac{xx-\frac{49}{4}}{8x}$, &c. in se continuo; & orientur termini $1 .\ x .\ \frac{4xx-1}{8} .\ \frac{4x^3-x}{24} .\ \frac{16x^4-40x^2+9}{384}$. &c. per quos si termini series k, l, m, n, o, p, q, &c. respective multiplicentur, aggregatum factorum $k + xl + \frac{4x^2-1}{8}m + \frac{4x^3-x}{24}n + \frac{16x^4-40x^2+9}{384}o + \text{\&c.}$ erit Longitudo Ordinatim applicatæ PQ.

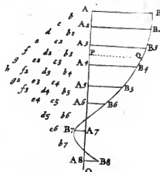
Sed hic notandum est quod intervalla AA2, A2A3, A3A4, &c. hic supponantur esse unitates, & quod differentiæ colligi debent auferendo inferiores quantitates de superioribus, A2B2 de AB, A3B3 de

de A2B2, b2 de b, &c. & faciendo ut ſint AB — A2B2 = b, A2B2 — A3B3 = b2, b — b2 = c, &c. adeoque quando differentiæ illæ hoc modo prodeunt negativæ ſigna earum mutanda ſunt.

PROP. IV.

Si recta aliqua in partes quotcunque inæquales AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad puncta diviſionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. Invenire Curvam Geometricam generis Parabolici quæ per omnium erectarum terminos* B, B2, B3, *&c. tranſibit.*

Sunto puncta data B, B2, B3, B4, B5, B6, B7, &c. & ad Abſciſſam quamvis AA7 demitte Ordinatas perpendiculariter BA, B2A2, &c.



Et fac $\frac{AB - A2B2}{AA2} = b$, $\frac{A2B2 - A3B3}{A2A3} = b2$,
$\frac{A3B3 - A4B4}{A3A4} = b3$, $\frac{A4B4 - A5B5}{A4A5} = b4$,
$\frac{A5B5 - A6B6}{A5A6} = b5$, $\frac{A6B6 - A7B7}{A6A7} = b6$,
$\frac{-A7B7 - A8B8}{A7A8} = b7$.

Deinde $\frac{b - b2}{AA3} = c$, $\frac{b2 - b3}{A2A4} = c2$, $\frac{b3 - b4}{A3A5} = c3$, &c.

Tunc $\frac{c - c2}{AA4} = d$, $\frac{c2 - c3}{A2A5} = d2$, $\frac{c3 - c4}{A3A6} = d3$, &c.

Et $\frac{d - d2}{AA5} = e$, $\frac{d2 - d3}{A2A6} = e2$, $\frac{d3 - d4}{A3A7} = e3$, &c.

Sic pergendum eſt ad ultimam differentiam.

Differentiis ſic collectis & diviſis per intervalla Ordinatim applicatarum; in alternis earum Columnis ſive Seriebus vel Ordinibus excerpe medias, incipiendo ab ultima, & in reliquis Columnis excerpe media Arithmetica inter duas medias, pergendo uſque ad ſeriem primorum terminorum, AB, A2B2, &c. Sunto hæc *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, *q*, *r*, &c. quorum ultimus terminus ſignificet ultimam differentiam; penultimus medium Arithmeticum inter duas penultimas; antepenultimus mediam trium antepenultimarum, &c. Et primus *k* erit media Ordinatim applicata, ſi numerus datorum punctorum eſt im-

impar; vel medium Arithmeticum inter duas medias, si numerus eorum est par.

CAS. I.

In Casu priori, sit A_4B_4 ista media Ordinatim applicata, hoc est, sit $A_4B_4 = k$, $\frac{b_3+b_4}{2} = l$, $c_3 = m$, $\frac{d_2+d_3}{2} = n$, $e_2 = o$, $\frac{f+f_2}{2} = p$, $g = q$. Et erecta Ordinatim applicata PQ, & in Basi AA_5 sumpto quovis puncto O, dic $OP = x$, & duc in se gradatim terminos hujus Progressionis

$$1 \times \overline{x - OA_4} \times \overline{x - \frac{OA_3+OA_5}{2}} \times \frac{\overline{x-OA_3} \times \overline{x-OA_5}}{x - \frac{1}{2}\overline{OA_3+OA_5}} \times \overline{x - \frac{OA_2+OA_6}{2}} \times \&c.$$

& ortam Progressionem asserva; vel quod perinde est duc terminos hujus Progressionis

$$1 \times \overline{x-OA_4} \times \overline{x-OA_3} \times \overline{x-OA_5} \times \overline{x-OA_2} \times \overline{x-OA_6} \times \overline{x-OA} \times \overline{x-OA_7} \times \&c.$$

in se gradatim, & terminos exinde ortos duc respective in terminos hujus Progressionis

$1 . x - \frac{+OA_3+OA_5}{2} . x - \frac{+OA_2+OA_6}{2} . x - \frac{+OA+OA_7}{2}$, &c. & orientur termini intermedii tota Progressione existente

$1 . x - OA_4 . x^2 - \frac{+OA_3+2OA_4+OA_5}{2} x + \frac{OA_3+OA_5}{2} \times OA_4$, &c.

Vel dic $OA = \alpha$, $OA_2 = \beta$, $OA_3 = \gamma$, $OA_4 = \delta$, $OA_5 = \epsilon$, $OA_6 = \zeta$, $OA_7 = \eta$: $\frac{OA_3+OA_5}{2} = \theta$, $\frac{OA_2+OA_6}{2} = \chi$, $\frac{OA+OA_7}{2} = \lambda$. Et ex Progressione

$1 \times \overline{x-\delta} \times \overline{x-\gamma} \times \overline{x-\epsilon} \times \overline{x-\beta} \times \overline{x-\zeta} \times \overline{x-\alpha} \times \overline{x-\eta}$ &c. collige terminos quibus multiplicatis per $1 . x-\theta$, $x-\chi$, $x-\lambda$, &c. collige alios terminos intermedios, tota serie prodeunte

$$1,\ x-\delta,\ x^2 - \overline{\delta+\theta}x + \delta\theta,\ x^3 - \overline{\delta+2\theta}x^2 + \overline{\gamma\epsilon+2\delta\theta}x - \gamma\delta\epsilon, \&c.$$

per cujus terminos multiplica series k, l, m, n, o, &c. Et aggregatum productorum $k + \overline{x-\delta} \times l + \overline{x^2 - \overline{\delta+\theta}x + \delta\theta} \times m + \&c.$ erit longitudo Ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

In Casu posteriori, sint A_4B_4, A_5B_5 duæ mediæ Ordinatim appli-

plicatæ, hoc eſt, $\frac{A4B4+A5B5}{2} = k$, $b4 = l$, $\frac{c3+c4}{2} = m$, $d3 = n$, $\frac{e2+e3}{2} = o$, $f2 = p$, &c. Et alternorum k, m, o, q, &c. Coefficientes orientur ex multiplicatione terminorum hujus Progreſſionis in ſe

$$1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - OA5} \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA6} \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA7} \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA8} \text{ \&c.}$$

Et reliquorum Coefficientes ex multiplicatione horum per terminos hujus Progreſſionis

$$x - \frac{+OA4+OA5}{2},\quad x - \frac{+OA3+OA6}{2},\quad x - \frac{+OA2+OA7}{2},\quad x - \frac{+OA+OA8}{2}, \text{ \&c.}$$

Hoc eſt, erit $k + \overline{x - \frac{+OA4+OA5}{2}} \times l + \overline{x^2 - \overline{OA4+OA5}\,x + OA4 \times OA5} \times m$, &c. Ordinatim applicata PQ,

vel $$PQ = k + \begin{matrix} x \\ -\frac{1}{2}OA4 \\ -\frac{1}{2}OA5 \end{matrix} \times l + \begin{matrix} x \\ -OA4 \end{matrix} \times + \begin{matrix} x \\ -OA5 \end{matrix} \times m + \begin{matrix} x \\ -OA4 \end{matrix} \times + \begin{matrix} x \\ -OA5 \end{matrix} \times + \begin{matrix} x \\ -\frac{1}{2}OA3 \\ -\frac{1}{2}OA6 \end{matrix} \times n \text{ \&c.}$$

Sive dic $x - \frac{+OA4+OA5}{2} = \pi$, $\overline{x - OA4} \times \overline{x - OA5} = \varrho$,

$\varrho \times \overline{x - \frac{+OA3+OA6}{2}} = \sigma$, $\varrho \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA6} = \tau$,

$\tau \times \overline{x - \frac{+OA2+OA7}{2}} = \upsilon$, $\tau \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA7} = \varphi$,

$\varphi \times \overline{x - \frac{+OA+OA8}{2}} = \chi$, $\varphi \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA8} = \psi$,

Et erit $k + \pi l + \varrho m + \sigma n + \tau o + \upsilon p + \varphi q + \chi r + \psi s = PQ$.

PROP. V.

Datis aliquot terminis ſeriei cujuscunque ad data intervalla diſpoſitis, invenire terminum quemvis intermedium quamproxime.

Ad rectam poſitione datam erigantur termini dati in dato angulo, interpoſitis datis intervallis, & per eorum puncta extima, per Propoſitiones præcedentes, ducatur linea Curva generis Parabolici. Hæc enim continget terminos omnes intermedios per ſeriem totam.

PROP. VI.

Figuram quamcunque Curvilineam quadrare quamproxime, cujus Ordinatæ aliquot inveniri possunt.

Per terminos Ordinatarum ducatur linea Curva generis Parabolici ope Propositionum paæcedentium. Hæc enim figuram terminabit quæ semper quadrari potest, & cujus Area æquabitur Areæ figuræ propositæ quamproxime.

SCHOLIUM.

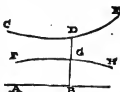
Utiles sunt hæ Propositiones ad Tabulas construendas per interpolationem Serierum, ut & ad solutiones Problematum quæ a quadraturis Curvarum dependent, præsertim si Ordinatarum intervalla & parva sint & æqualia inter se, & Regulæ computentur, & in usum reserventur pro datò quocunque numero Ordinatarum. Ut si quatuor sint Ordinatæ ad æqualia intervalla sitæ, sit A summa primæ & quartæ, B summa secundæ & tertiæ, & R intervallum inter primam & quartam, & Ordinata nova in medio omnium erit $\frac{9B-A}{16}$, & Area tota inter primam & quartam erit $\frac{A+3B}{8}R$.

Et nota quod ubi Ordinatæ stant ad æquales ab invicem distantias, sumendo summas Ordinatarum quæ ab Ordinata media hinc inde æqualiter distant, & duplum Ordinatæ mediæ, componitur Curva nova cujus Area per pauciores Ordinatas determinatur, & æqualis est Areæ Curvæ prioris quam invenire oportuit. Quinetiam si pro Ordinatis novis sumantur summa Ordinatæ primæ & secundæ, & summa tertiæ & quartæ, & summa quintæ & sextæ, & sic deinceps; vel si sumantur summa trium primarum Ordinatarum, & summa trium proximarum, & summa trium quæ sunt deinceps; vel si sumantur summæ quaternarum Ordinatarum, vel summæ quinarum: Area Curvæ novæ æqualis erit Areæ Curvæ primo propositæ. Et sic habitis Curvæ quadrandæ Ordinatis quotcunque quadratura ejus ad quadraturam Curvæ alterius per pauciores Ordinatas reducetur.

Per data vero puncta quotcunque non solum Curvæ lineæ generis

neris *Parabolici*, sed etiam Curvæ aliæ innumeræ diversorum generum duci possunt.

Sunto CDE, FGH Curvæ duæ Abscissam habentes communem AB, & Ordinatas in eadem recta jacentes BD, BG; & relatio inter has Ordinatas definiatur per æquationem quamcunque. Dentur puncta quotcunque per quæ Curva CDE transire debet, & per æquationem illam dabuntur puncta totidem nova per quæ Curva FGH transibit. Per propositiones superiores describatur Curva FGH generis *Parabolici* quæ per puncta illa omnia nova transeat, & per æquationem eandem dabitur Curva CDE quæ per puncta omnia primo data transibit.



F I N I S.



J. Newtoni epitaphium

H. S. E.

Isaacus newton. Eques auratus;
qui animi vi prope divina
planetarum motus, figuras,
Cometarum semitas, oceanique aestus,
sua Mathesi facem praeferente,
primus demonstravit.
Radiorum lucis dissimilitudines,
Colorumque inde nascentium proprietates,
quas nemo ante suspicatus erat,
pervestigavit.
Naturae, Antiquitatis, sacrae scripturae,
sedulus, sagax, fidus interpres,
Dei O.M. majestatem philosophia aperuit,
Evangelii simplicitatem moribus expressit.
Sibi gratulentur mortales
tale tantumque extitisse
humani generis decus.
Nat. XXV. Decemb. A.D. MDCLII.
Obiit Mart. MDCCXXVI.

111.


LABORAT
RESTAURO
LIBRI
PARMA

